FUNKCJE LICZBOWE

Na zbiorze X określona jest *funkcja* $f : X \to Y$ gdy dowolnemu punktowi $x \in X$ przyporządkowany jest punkt $f(x) \in Y$. Innymi słowy

$$f \subseteq X \times Y = \{(x, y) : x \in X \text{ oraz } y \in Y\},$$

o ile $(x, y) \in f$ oraz $(x, z) \in f$ pociąga $y = z$. Czasami funkcję oznaczamy $y = f(x)$ lub $x \to f(x)$. Zbiór $X = D_f$ nazywamy *dziedziną* funkcji f. Zaś podzbiór

$$\{f(x) : x \in X\} = V_f \subseteq Y,$$

przeciwdziedziną albo *zapasem* funkcji f: nie musi być $V_f = Y$. Gdy $V_f = Y$, to mówimy, że funkcja f jest *na* zbiór Y; w przeciwnym przypadku mówimy, że funkcja f jest *w* zbiór Y.

Funkcję (*liczbową*: X oraz Y to zbiory złożone z liczb) można określić także graficznie: figura na płaszczyźnie taka, że dowolna prosta równoległa do osi $0Y$ przecina ją w co najwyżej jednym punkcie – taka figura bywa nazywana *wykresem funkcji.* Dziedziną tak określonej funkcji są punkty przecięcia z osią $0X$ prostych równoległych do osi $0Y$ oraz przecinających wykres funkcji; zaś zapas tworzą punkty przecięcia z osią $0Y$ prostych równoległych do osi $0X$ oraz przecinających wykres funkcji

Funkcję możemy określić przy pomocy tabeli: macierz o dwóch wierszach, gdzie w kolumnach zapisane są pary liczb należące do funkcji. Punkty z pierwszego wiersza tworzą dziedzinę funkcji; zaś punkty z drugiego wiersza tworzą przeciwdziedzinę tej funkcji, np.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$f(x)$	1	2	7	0	9	8	7	1	6	5	4	3	2	1

Funkcję możemy określić warunkiem zdaniowym np. *niech* $E(x)$ *oznacza największą liczbę całkowitą niewiększą niż* x. Dziedziną funkcji $E(x)$ są liczby rzeczywiste – zbiór liczb dla których potrafimy określić relację większości, zaś zapasem są liczby całkowite.

Funkcję możemy określić wzorem (bądź wzorami stosowanymi do rozłącznych podzbiorów) np. $y = x^2$ albo $f(x) = E(x) - 2E(x)$ albo

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{gdy } x \geq 0; \\ -x, & \text{gdy } x < 0. \end{cases}$$

Dla takich funkcji dziedzinę tworzą wszystkie te punkty dla których wzór ma sens, zaś zapas to zbiór wszystkich wartości: liczb wyliczonych ze wzoru, jakie przy pomocy wzoru można otrzymać.

Funkcje *elementarne* to: wielomiany, funkcje trygonometryczne, funkcje wykładnicze oraz funkcje utworzone z funkcji elementarnych poprzez operację dodawania, odejmowania, mnożenia dzielenia oraz składania funkcji, a także przez operację brania funkcji odwrotnej:

$$\begin{array}{lll} x & \to & f(x) & \text{– funkcja;} \\ x & \to & g(x) & \text{– funkcja;} \\ x & \to & f(x)+g(x) & \text{– dodawanie funkcji;} \\ x & \to & f(x)-g(x) & \text{– odejmowanie funkcji;} \\ x & \to & f(x)\cdot g(x) & \text{– mnożenie funkcji;} \\ x & \to & \dfrac{f(x)}{g(x)} & \text{– dzielenie funkcji, o ile } g(x)\neq 0; \\ x & \to & f(g(x)) & \text{– składanie funkcji.} \end{array}$$

Gdy zawsze zachodzi $f(g(x)) = x$, to funkcje f oraz g są *wzajemnie odwrotne* (funkcja f jest *odwrotna* do funkcji g): co zapisujemy $f = g^{-1}$ lub $g = f^{-1}$. Wykres funkcji odwrotnej do danej funkcji powstaje poprzez symetrię osiową względem prostej $y = x$. Przykłady:

funkcja	-	funkcja odwrotna;
$x \to e^x$	-	$x \to \ln x$;
$x \to x^{2n+1}$	-	$x \to \sqrt[2n+1]{x}$;
$y = \log_a x$	-	$y = a^x$;
$y = \operatorname{tg} x$	-	$y = \operatorname{arctg} x$;
$y = \sin x$	-	$y = \arcsin x$;
$y = \cos x$	-	$y = \arccos x$.

Wyznaczanie dziedziny lub zapasu funkcji bywa niezbędne gdy precyzyjnie zechcemy określić funkcję odwrotną do niej lub gdy mamy do czynienia ze wzorem, który nie ma sensu dla niekórych liczb.

Funkcja $x \to \ln(1+x)$ nie ma sensu dla $x \leq -1$, a więc jej dziedziną jest przedział $(-1, +\infty)$, zaś zapasem zbiór wszystkich liczb rzeczywistych; gdy położymy $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x}{n}$, to szereg wyznacza funkcję o dziedzinie $(-1, 1]$ oraz zapasie $(-\infty, \ln 2]$: uwaga (!!!) wyznaczania dziedziny oraz przeciwdziedziny przebiegałoby inaczej gdybyśmy przyjęli, że liczba znaczy liczba zespolona.

Dziedziną funkcji $x \to \dfrac{1}{x - E(x)}$ jest zbiór liczb rzeczywistych za wyjątkiem liczb całkowitych; zaś zapasem przedział $(1, +\infty)$.

Dziedziną funkcji $x \to \sin x$ jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych; zaś zapasem przedział $(-1, 1)$. Skoro funkcja ta jest różnowartościowa na przedziale $(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, to mamy określoną funkcję odwrotną $x \to \arcsin x$, dla której dziedziną jest przedział $(-1,1)$; zaś zapasem przedział $(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Dziedziną funkcji $x \rightarrow \cos x$ jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych; zaś zapasem przedział $(-1,1)$. Skoro funkcja ta jest różnowartościowa na przedziale $(0,\pi)$, to mamy określoną funkcję do niej odwrotną $x \rightarrow \arccos x$, dla której dziedziną jest przedział $(-1,1)$; zaś zapasem przedział $(0,\pi)$.

Dziedziną funkcji $x \rightarrow \operatorname{tg} x$ jest suma przedziałów $(\frac{-\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, gdzie k przebiega liczby całkowite. Skoro funkcja ta jest różnowartościowa na przedziale $(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, to mamy określoną funkcję do niej odwrotną $x \rightarrow \operatorname{arctg} x$, dla której dziedziną jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych; zaś zapasem przedział $(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

CIĄGŁOŚĆ

Liczbę g nazywamy *granicą* funkcji f w punkcie a gdy dla dowolnego ciągu $\{x_n\}$ zbieżnego do a (tzn. $\lim_{n\to\infty} x_n = a$) zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g: \text{ piszemy wtedy } g = \lim_{x\to a} f(x).$$

To była definicja granicy według Heinego. Według A. Cauchye'go granica funkcji w punkcie a znaczy: *Dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ można dobrać liczbę $\delta > 0$ tak, aby nierówność $|x-a| < \delta$ zawsze pociągała nierówność $|f(x) - g| < \varepsilon$.*

Funkcja f ma w punkcie a granicę *lewostronną* (*prawostronną*) g gdy dla dowolnego ciągu $\{x_n\}$ zbieżnego do a oraz złożonego z liczb mniejszych niż a (oraz złożonego z liczb wiekszych niż a) zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g: \text{ piszemy wtedy } g = \lim_{x\to a^-} f(x) \qquad (g = \lim_{x\to a^+} f(x)).$$

Funkcja jest *ciągła* w punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy jej granice lewostronna oraz prawostronna w tym punkcie są równe wartości funkcji w tym punkcie. Funkcję ciągłą w dowolnym punkcie swej dziedziny nazywamy - krótko, *ciągłą*. Innymi słowy funkcja jest ciągła w punkcie a gdy $f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$. Gdy $f(a) = \lim_{x\to a^-} f(x)$, to funkcja jest *lewostronnie ciągła* w punkcie a; zaś gdy $f(a) = \lim_{x\to a^+} f(x)$, to funkcja jest *prawostronnie ciągła* w punkcie a. Rozważmy kontrprzykład: jeśli n jest liczbą całkowitą, to

$$\lim_{x\to n^-} E(x) = n-1 \text{ oraz } \lim_{x\to n^+} E(x) = n.$$

Wnioskujemy stąd, że funkcja $x \rightarrow E(x)$ nie jest ciągła w punktach które są liczbami całkowitymi.

Z definicji nietrudno można wyprowadzić, że: – *Suma funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą;* – *Iloczyn funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą;* – *Różnica funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą;* – *Iloraz funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą;* –

Złożenie funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą. Własności te dotyczą punktów, dla których wynik każdej operacji jest określony. Gdy dopuścimy do rozważań funkcje określane punkt po punkcie (np. różnymi wzorami), to ciągłość musimy staranie sprawdzać. Także ciągłość funkcji odwrotnej do ciągłej nie zawsze jest oczywista.

Twierdzenie. *Jeśli funkcja rzeczywista $x \to f(x)$ jest różnowartościowa i ciągła na przedziale $[a, b]$, to jest ona monotoniczna, zaś funkcja do niej odwrotna jest ciągła.* □

Z twierdzenia oraz definicji ciągłości wnioskujemy, że funkcje elementarne są ciągłe.

FUNKCJE WIELU ZMIENNYCH

Gdy wektorowi przyporządkowana jest liczba, to funkcję tego rodzaju oznaczamy $f : R^n \to R$ i nazywamy funkcją rzeczywistą wielu zmiennych. Przykładem jest długość wektora

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Wyznacznik bądź iloczyn skalarny to inne przykłady funkcji rzeczywistej o dziedzinie złożonej z wektorów. Gdy wektorowi przyporządkujemy wektor, to mówimy o funkcji *wektorowej*. Przykładami takich funkcji są: iloczym wektorowy, dodawanie wektorów, mnożenie wektora przez skalar, mnożenie macierzy, itd.

Ciąg wektorów $\{(x_1^n, x_2^n, \ldots, x_k^n) : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ jest zbieżny do wektora $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ gdy $\lim_{n\to\infty} x_i^n = x_i$, o ile $1 \le i \le k$. Ciągłosc funkcji wielu zmiennych określamy według takiego samego schematu jak ciągłość funkcji liczbowej (rzeczywistej). Funkcja jest ciągła w punkcie $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ gdy dla dowolnego ciągu wektorów $\{(x_1^n, x_2^n, \ldots, x_k^n) : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ zbieżnego do $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ zachodzi

$$f((x_1, x_2, \ldots, x_k)) = \lim_{n\to\infty} f((x_1^n, x_2^n, \ldots, x_k^n).$$

Jeśli położymy

$$\rho((x_1, x_2, \ldots, x_k), (y_1, y_2, \ldots, y_k)) = \sum_{n=1}^{k} \sqrt{(x_n - y_n)^2},$$

to możemy przytoczyć definicję ciągłosci według Cauchye'go: funkcja f jest w punkcie $\mathbf{a}$ ciągła gdy dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ można dobrać liczbę $\delta > 0$ tak, aby nierówność $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \delta$ zawsze pociągała nierówność $\rho(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{a}) < \varepsilon$. W zakresie przestrzeni euklidesowych definicje ciągłości według Heinego oraz Cauchye'go są równoważne: chociaż w szerszy zakresie - w sytuacjach bardziej ogólnych prowadzą do rozłącznych pojęć ciągłości. Można sobie pomyśleć przestrzenie, w których jedynymi ciągami zbieżnymi są ciągi stałe, ale poprawiona definicja Cauchye'go będzie miała nietrywialny sens.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}, & \text{gdy } (x,y)\neq(0,0);\\ 1, & \text{gdy } (x,y)=(0,0):\end{cases}$$

funkcja f jest ciągła w punktach różnych niż $(0,0)$ - na podstawie ciągłości sumy, ilorazu i złożenia funkcji ciągłych oraz ciągłości funkcji wykładniczej. Skoro

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}=\lim_{u\to0}\frac{e^u-1}{u}=1,$$

to jest to funkcja ciągła dla dowolnego punktu płaszczyzny.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}=\lim_{u\to0}\frac{1-\cos u}{u^2}=\frac{1}{2}.$$

Jednakże granica

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2}$$

nie istnieje, bo gdy $y=0$, to

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x^2}{x^4}=\lim_{u\to0}\frac{1-\cos u}{u^2}=\frac{1}{2};$$

gdy $y=x$, to

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos 2x^2}{2x^4}=\lim_{u\to0}\frac{1-\cos u}{2u^2}=1.$$

Także granica

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y}{2x^2+y^4}$$

nie istnieje, bo gdy $x_n=\frac{1}{n}$ oraz $y_n=\frac{1}{n}$, to

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n}}{2\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}=+\infty;$$

gdy $x_n=\frac{1}{n}$ oraz $y_n=\frac{1}{n^3}$, to

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^3}}{2\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^{12}}}=0.$$