SZEREGI LICZBOWE

Z ciągu liczb $a_1, a_2, \dots$ utwórzmy nowy ciąg

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Przyjmijmy oznaczenia

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \dots = \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Gdy granica $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ jest liczbą, to mówimy, że szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ jest *sumowalny* (innymi słowy jest zbieżny). Gdy ciąg $s_1, s_2, \dots$ jest rozbieżny, to mówimy, że szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ jest *niesumowalny* (lub nie jest sumowalny lub jest rozbieżny).

Szereg geometryczny $\sum_{k=0}^{\infty} q^n$ jest sumowalny gdy $|q| < 1$; zaś jest rozbieżny dla $|q| \geq 1$: bo dla $|q| \neq 1$ zachodzi

$$\sum_{k=0}^{n} aq^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

oraz szeregi $\sum_{k=0}^{\infty} 1^n$ oraz $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^n$ są rozbieżne co sprawdzamy przy pomocy definicji granicy.

Ciag $s_1, s_2, \dots$ nazywamy ciągiem *sum częściowych*. Gdy położymy

$$r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k,$$

to ciąg $r_1, r_2, \dots$ nazywamy ciągiem reszt.

Twierdzenie. *Jeśli szereg* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *jest sumowalny, to* $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$.
Uzasadnienie. Skoro

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = -s_n + \sum_{k=1}^{\infty} a_k,$$

to

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \lim_{n\to\infty} s_n = 0.$$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (tzw. *szereg harmoniczny*) jest niesumowalny bo

$$\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2^n + k} = \frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^n + 2} + \dots + \frac{1}{2^n + 2^n} > \frac{1}{2}.$$

Warunek Cauchye'go. *Szereg* $\sum_{n=1}^{\infty}$ *jest sumowalny gdy dla dowolnej liczby* $\varepsilon > 0$ *można dobrać liczbę naturalną* k *tak, aby nierówności* $m > n > k$ *pociągały*

$$|a_n + a_{n+1} + \ldots + a_m| < \varepsilon.$$

Szeregi harmoniczne: *Szereg harmoniczny*

$$\sum_{n \to 1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

jest sumowalny gdy $\alpha > 1$ *oraz jest rozbieżny gdy* $\alpha \leq 1$. □

Twierdzenie. *Jeśli szeregi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *oraz* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *są sumowalne, to*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_m) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Szereg *naprzemienny* to szereg postaci $a_1 - a_2 + a_3 - \ldots (-1)^n a_n + \ldots$, gdzie liczby a_n są nieujemne.

Twierdzenie. *Gdy* $a_1 \geq a_2 \geq \ldots$ *oraz* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *, to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ *jest sumowalny.* □

Przykładowo

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2.$$

Twierdzenie Abela. (N. H. Abel 1802 -1929). *Jeśli* $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots$ *oraz* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *przy czym ciąg* $\{b_1 + b_2 + \ldots + b_n : n = 1, 2, \ldots\}$ *jest ograniczony, to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(a_n \cdot b_n)$ *jest sumowalny.* □

Kryterium porównawcze. *Gdy stale zachodzi* $0 \leq b_n \leq a_n$, *to sumowalność szeregu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *pociąga sumowalność szeregu* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$*; zaś rozbieżnośc szeregu* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *pociąga rozbieżność szeregu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. □

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ jest sumowalny, bo

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \ldots + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Skoro stale mamy

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}, \qquad \text{to szereg} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

jest sumowalny – można pokazać, że $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}\mathrm{tg}\frac{1}{n}$ jest sumowalny, bo stale zachodzi

$$0 \leq \sin\frac{1}{n}\mathrm{tg}\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Kryterium d'Alemberta (1717 -1783 encyklopedysta). *Niech $a_1, a_2, \ldots$ będzie ciągiem liczb. Gdy*

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest sumowalny; zaś gdy

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest niesumowalny. □

Kryterium Cauche'go. *Niech $a_1, a_2, \ldots$ będzie ciągiem liczb. Gdy*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest sumowalny; zaś gdy

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest niesumowalny. □

Uwaga: Kryteria d'Alemberta lub Cauchye'go niczego nie mówią gdy liczne w nich granice wynoszą 1.

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^n}{n!}$ jest sumowalny, bo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{c^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{c}{n+1} = 0.$$

Zaś szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{100^n}$ jest niesumowalny. Także szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ jest sumowalny, bo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}.$$

Dla szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{c^n}$ mamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^p}{c^{n+1}} \frac{c^n}{n^p} = \frac{1}{c}.$$

Wnioskujemy, że gdy p jest liczbą całkowitą, to dla $c > 1$ szereg jest sumowalny; zaś dla $0 < c < 1$ jest niesumowalny.

Zbadajmy sumowalność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-1} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}.$$

Mamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n+1}(-1)^{n+1}(2n-1)}{x^{2n-1}(-1)^{n-1}(2n+1)} = x^2.$$

Wnioskujemy stąd, że jest to szereg sumowalny, o ile $|x| < 1$; gdy $|x| > 1$, to szereg ten jest niesumowalny. Gdy $|x| = 1$, to dostajemy dwa szeregi naprzemienne

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1},$$

które są sumowalne. Gdy rozważymy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{n+1}}{n^2}$, to mamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(x-1)^{n+1} n^2}{(n+1)^2 (x-1)^n} = x - 1,$$

Wnioskujemy, że dla $-1 < x < 1$ jest to szereg sumowalny. Jednocześnie sprawdzamy, że dla $|x| = 1$ dostajemy szereg porównywalny z szeregiem harmonicznym $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, a więc szereg ten jest sumowalny dla $-1 \leq x \leq 1$.

Kryterium Kummera. *Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest sumowalny gdy istnieje ciąg liczb dodatnich $b_1, b_2, \ldots$ taki, że*

$$\lim_{n\to\infty} (b_n \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} - b_{n+1}) > 0.$$

Kryterium Raabego. *Gdy*

$$\lim_{n\to\infty} n(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} - 1) > 1,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest sumowalny. Gdy

$$\lim_{n\to\infty} n(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} - 1) < 1,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest niesumowalny.* $\square$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$ jest sumowalny, bo $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n} = \frac{2}{3}$. Skoro

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n^{100}99^n}{100^n}\right)^n} = \frac{99}{100}, \qquad \text{to szereg} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{100}99^n}{100^n}$$

jest sumowalny. Podobnie sprawdzamy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\operatorname{arctg} n)^n}{2^n}$ jest sumowalny: zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(\operatorname{arctg} n)^n}{2^n}} = \frac{\pi}{4} < 1.$$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazywamy *bezwzglednie zbieżnym* gdy sumowalny jest szereg o wyrazach nieujemnych $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Twierdzenie. *Jeśli szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest bezwzglednie zbieżny, to jest on także sumowalny oraz*

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Twierdzenie. *Jeśli szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest bezwzglednie zbieżny, to granica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *nie zależy od kolejności wyrazów* a_n. $\square$

Twierdzenie (Riemanna 1826 -1866). *Jeśli szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest sumowalny oraz szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *jest rozbieżny, to zmieniając kolejność wyrazów* $a_1, a_2, \ldots$ *możemy dostać szereg zbieżny do dowolnej z góry ustalonej liczby.* $\square$

Mnożenie szeregów. Jeśli szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ są bezwzglednie zbieżne, to

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots a_n b_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1}.$$

Policzmy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} n! = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x+y)^n.$$

Skoro zawsze zachodzi $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, to udowodniliśmy wzór

$$e^x \cdot e^y = e^{x+y}.$$

Iloczyny nieskończone. Kładziemy

$$\lim_{n\to\infty} (a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n) = \prod_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Gdy granica $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ jest liczbą różną od zera, to mówimy, że iloczyn nieskończony $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny: w przeciwnym przypadku jest on rozbieżny. Uwaga: $\prod_{n=1}^{\infty} a_n = 0$ znaczy iloczyn nieskończony $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

Twierdzenie. *Gdy iloczyn* $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny, to* $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$. □

Twierdzenie. *Szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *jest sumowalny gdy iloczyn* $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|b_n|)$ *jest zbieżny (gdy iloczyn* $\prod_{n=1}^{\infty}(1-|b_n|)$ *jest zbieżny).* □

Iloczyny
$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n}) \qquad \text{oraz} \qquad \prod_{n=2}^{\infty}(1-\frac{1}{n})$$
są rozbieżne, bo
$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n}) = \lim_{k\to\infty} 2(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})\ldots(1+\frac{1}{k}) = \lim_{k\to\infty} 2\frac{3}{2}\frac{4}{3}\ldots\frac{k+1}{k} = \lim_{k\to\infty}(k+1) = +\infty;$$
$$\prod_{n=2}^{\infty}(1-\frac{1}{n}) = \lim_{k\to\infty}(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})\ldots(1-\frac{1}{k}) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{3}{4}\ldots\frac{k-1}{k} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k} = 0.$$
Iloczyny $\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n^s})$ oraz $\prod_{n=2}^{\infty}(1-\frac{1}{n^s})$ są zbieżne, o ile $1 < s$ oraz rozbieżne gdy $s \le 1$.

Szereg postaci
$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$$
nazywamy *szeregiem potęgowym*. Kres górny zbioru wszystkich wartości x-ów, dla których szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ jest sumowalny nazywamy promieniem zbieżności tego szeregu. Jeśli r jest promieniem zbieżności szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$, to przedział $(-r, r)$ nazywamy *przedziałem zbieżności* tego szeregu.

Twierdzenie. *Jeśli* $(-r, r)$ *jest przedziałem zbieżności szeregu* $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$, *to dla dowolnej liczby* $c \in (-r, r)$ *szereg* $\sum_{n=0}^{\infty} a_nc^n$ *jest bezwzględnie zbieżny.*
Uzasadnienie. Przyjmijmy, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_nb^n$ jest sumowalny oraz, że $|c| < |b|$. Wtedy ciąg $a_1b^1, a_2b^2, \ldots$ jest ograniczony: np. przez liczbę M. Mamy
$$|a_nc^n| = |a_nb^n|\left|\frac{c}{b}\right|^n \le M\left(\frac{c}{b}\right)^n.$$
Skoro szereg geometryczny $\sum_{n=1}^{\infty} M\left(\frac{c}{b}\right)^n$ jest sumowalny: bo $|\frac{c}{b}| < 1$, to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_nc^n$ jest bezwzględnie zbieżny. □

Z kryteriów d'Alemberta lub Cauchye'go wnioskujemy, że *Jeśli*

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = g \qquad \textit{albo} \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = g,$$

to promień zbieżności szereg u $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *wynosi* $r = \dfrac{1}{g}$. Uwaga: szereg potęgowy na krańcach swego przedziału zbieżności może być sumowalny lub nie. Szereg potęgowy

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

ma przedział zbieżności $[-1,1)$: dla $x=1$ przedstawia on $\ln 2$; zaś dla $x=-1$ szereg rozbieżny $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Wzory wykorzystujące szeregi potęgowe:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!};$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}(-1)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}(-1)^n;$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{(5)!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}(-1)^n;$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty}x^n, \qquad \text{o ile } |x|<1.$$

Z ostatniego wzoru wniosku

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty}x^n\sum_{n=0}^{\infty}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}x^k x^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n.$$

Mamy także, zawsze przy założeniu $|x|<1$:

$$\text{arctg } x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1};$$

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)(2n+1)};$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}.$$

Przy pomocy szeregów potęgowych można uzasadnić wzór

$$e^i x = \cos x + i\sin x.$$

Zapisany szeregami potęgowymi wyraża się on tak

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)n}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$

Dla jego uzasadnienia wystarczy zauważyć, że $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$ oraz $i^3 = -i$ itd. Czyli

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} + \dots.$$

Co drugi składnik tej sumy zaczynając od 1 daje

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}(-1)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}(-1)^n;$$

pozostałe składniki dają

$$i\sin x = i\frac{x}{1!} - i\frac{x^3}{3!} + i\frac{x^5}{(5)!} - \dots = i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}(-1)^n.$$

Skoro $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$, to podstawiając za x wartość $-x$ dostaniemy

$$\ln(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n};$$

dodatkowo ze wzoru na mnożenie iloczynów nieskończonych dostaniemy

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = \ln\frac{1+x}{1-x} = 2(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots) = 2(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}).$$