GRANICA NIESKOŃCZONEGO CIĄGU LICZBOWEGO

Jeśli każdej liczbie naturalnej przyporządkujemy liczbę, to mówimy, że określiliśmy *ciąg nieskończony*. Ciągi nieskończone nazywamy krótko ciągami i oznaczamy:

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, \qquad b_1, b_2, b_3, \ldots, \qquad \{a_n\}_{n \in N} \qquad \text{lub} \quad \{a_n : n \in N\}.$$

Ciąg $a_1, a_2, \ldots$ nazywamy *rosnącym* gdy $a_1 < a_2 < \ldots$: gdy zawsze zachodzi $a_n < a_{n+1}$. Ciąg $a_1, a_2, \ldots$ nazywamy *niemalejącym* gdy $a_1 \leq a_2 \leq \ldots$: gdy zawsze zachodzi $a_m \leq a_{m+1}$. Gdy w definicjach $<$ zamienimy na $>$ oraz $\leq$ na $\geq$, to określimy ciągi *malejący* oraz *nierosnący*. Ciąg rosnący lub malejący nazywamy ciągiem *monotonicznym* - w literaturze czasami tak bywa określany ciąg niemalejący bądź nierosnący.

Liczbe g nazywamy *granicą* ciągu $a_1, a_2, \ldots$ gdy dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ możma dobrać liczbę k tak, aby nierówność $n > k$ pociągała nierównośc

$$|a_n - g| < \varepsilon;$$

innymi słowy: *Dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ prawie wszystkie* - tzn. poza skończoną ilością - *wyrazy ciągu $a_1, a_2, \ldots$ należą do przedziału $(g - \varepsilon, g + \varepsilon)$.*

Granicę ciągu oznaczamy symbolami

$$g = \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n = \infty} a_n.$$

Ciag posiadający granicę nazywamy *zbieżnym*. Ciąg *rozbieżny* to ciąg który nie posiada granicy. Ciąg $a_1, a_2, \ldots$ jest *rozbieżny do $+\infty$* (jest rozbieżny do plus nieskończoności) gdy prawie wszystkie wyrazy a_n są większe niż z góry zadana liczba, tzn. dla dowolnego ε istnieje liczba naturalna n taka, że jeśli $k > n$, to $a_n > \varepsilon$. Ciąg $a_1, a_2, \ldots$ jest *rozbieżny do $-\infty$* (jest rozbieżny do minus nieskończoności) gdy prawie wszystkie wyrazy a_n są mniejsze niż z góry zadana liczba, tzn. dla dowolnego ε istnieje liczba naturalna n taka, że jeśli $k > n$, to $a_n < \varepsilon$.

Twierdzenie. *Ciąg monotoniczny jest zbieżny lub rozbieżny do $+\infty$ lub rozbieżny do $-\infty$.* □

Twierdzenie. *Ciąg zbieżny jest ograniczony: istnieje liczba $\varepsilon > 0$ taka, że zawsze mamy $-\varepsilon < a_n < \varepsilon$.* □

Twierdzenie. *Jeśli ciągi $a_1, a_2, \ldots$ oraz $b_1, b_2, \ldots$ są zbieżne, to*:

$$\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n + \lim_{n \to \infty} b_n;$$

$$\lim_{n \to \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n - \lim_{n \to \infty} b_n;$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n;$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}, \qquad \text{o ile } \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0. \qquad \square$$

Twierdzenie Cauchy'ego. *Ciąg* $a_1, a_2, \ldots$ *jest zbieżny gdy dla dowolnej liczby* $\varepsilon > 0$ *istnieje liczba naturalna* k *taka, że jeśli liczby naturalne* m *oraz* n *są większe niż* k, *to* $|a_m - a_n| < \varepsilon$. $\square$

Twierdzenie Stolza. *Jeśli ciąg rosnący* $y_1, y_2, \ldots$ *jest rozbieżny, to*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}.$$

$\square$

Twierdzenie 1. *Jeśli ciąg* $a_1, a_2, \ldots$ *jest zbieżny, to*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n}.$$

$\square$

Twierdzenie 2. *Jeśli ciąg liczb dodatnich* $a_1, a_2, \ldots$ *jest zbieżny, to*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

$\square$

Twierdzenie 3. *Jeśli ciąg* $\{a_{n+1} - a_n : n = 1, 2, \ldots\}$ *jest zbieżny, to*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n).$$

$\square$

Twierdzenie 4. *Jeśli liczby* $\{a_1, a_2, \ldots\}$ *są dodatnie oraz* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g$, *to* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = g$. $\square$

Przykłady

$$\lim_{n\to\infty} g = g; \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0; \qquad \text{ogólnie:}$$

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty \qquad \text{gdy} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0.$$

$$\lim_{n\to\infty} n = +\infty \qquad \text{oraz} \qquad \lim_{n\to\infty} (-1) = -\infty.$$

Jeśli $c > 0$, to $\lim_{n\to\infty} nc = +\infty$.
Jeśli $q > 1$, to $\lim_{n\to\infty} q^n = +\infty$.
Jeśli $-1 < q < 1$, to $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.

Jeśli $q > 1$, to $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{q} = 1$. **Uzasadnienie:** Gdy $q > 1$, to ciąg $q, \sqrt[2]{q}, \sqrt[3]{q}, \ldots$ jest malejący, gdyż

$$\sqrt[n+1]{q} = q^{\frac{1}{n+1}} < q^{\frac{1}{n+1}\frac{n+1}{n}} = \sqrt[n]{q}.$$

Skoro $\sqrt[n]{q} > 1$, to ciąg ten jest ograniczony, a więc zbieżny. Musi być

$$\lim_{n\to\infty} = \sqrt[n]{q} \geq 1.$$

Przypuśćmy, że $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{q} = 1 + a$, Skoro $a > 0$, to $1 + a < \sqrt[n]{q}$. Korzystamy z dwumianu Newwtona i dostajemy

$$q > (1+a)^n = \sum_{k=o}^{n} a^k > na.$$

Z prawej strony nierówności występuje liczba, która może być dowolnie duża, a więc q nie może być liczbą: jest $\lim_{n\to\infty} = \sqrt[n]{q} = 1$. □

Dla $0 < q < 1$ mamy

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{q} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{q}} = 1.$$

Gdy $|q| < 1$, to

$$\lim_{n\to\infty} (1 + q + q^2 + q^3 + \ldots) = \frac{1}{1-q} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k.$$

Ciąg $\{(1 + \frac{1}{n})^n : n = 1, 2, \ldots\}$ jest rosnący i ograniczony.

$$e = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Liczba $e = 2{,}718\ 281\ 828\ 459\ldots$ – nazywana tak od nazwiska L. Eulera – nie jest liczbą wymierną. Co więcej nie może być pierwiastkiem wielomianu o współczynnikach całkowitych: bywa określana jako liczba przestępna. Policzmy $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$. Jest tak bo

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n-1}}.$$

Gdy w twierdzeniu 4 położymy $a_n = n$ - skoro $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$, to mamy $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.
Zaś gdy położymy $a_n = n!$, to mamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} n + 1 = +\infty.$$

Z czego wnioskujemy $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$: twierdzenie 4 jest także prawdziwe dla litery q rozumianej jako $+\infty$.

Gdy w twierdzeniu Stolza podstawimy $y_n = n$ oraz $x_n = a^n$ – gdzie liczba a jest większa niż 1, to dostaniemy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n} = \lim_{n\to\infty} (a^n - a^{n-1}) = \lim_{n\to\infty} a^{n-1}(a-1) = +\infty.$$

Zaś gdy skorzystamy z faktu $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, to dostaniemy (kładąc $y_n = n$ oraz $x_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt[k]{k}$)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \ldots + \sqrt[n]{n}}{n} = 1.$$

Zachodzi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{c^n}{n!} = 0$. **Uzasadnienie:** Mamy

$$\left|\frac{c^{n+1}}{(n+1)!}\right| = x_{n+1} = \left|\frac{c^n}{n!}\frac{c}{n+1}\right| = x_n \left|\frac{c}{n+1}\right|.$$

Jeśli tylko $n > |c| - 1$, to ciąg liczb nieujemnych $x_1, x_2, \ldots$ jest malejący, a więc zbieżny bo jest jednocześnie ograniczony. Mamy

$$g = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{c}{n+1} = g \cdot 0 = 0.$$

Twierdzenie o trzech ciągach. *Jeśli zawsze zachodzi*

$$a_n \leq b_n \leq c_n \qquad \textit{oraz} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n,$$

to

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n.$$

Przykład.

$$0 < \frac{2 + (-1)^n}{n} < \frac{3}{n} :$$

wyrazy ciągów skrajnych zmierzają do zera, a więc ciąg o wyrazach jak między nierównościami jest także zbieżny do zera.

Wniosek. *Jeśli ciąg $a_1, a_2, \ldots$ jest ograniczony oraz ciąg $b_1, b_2, \ldots$ jest zbieżny do zera, to ciąg $a_1b_1, a_2b_2, \ldots$ jest także zbieżny do zera.*

Jeśli $n_1 < n_2 < \ldots$ jest rosnącym ciągiem liczb naturalnych, to ciąg $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$ nazywamy *podciągiem*.

Twierdzenie. *Jeśli ciąg $a_1, a_2, \ldots$ jest ograniczony oraz nie jest zbieżny, to można dobrać dwa jego podciągi zbieżne do różnych granic.*