LICZBY ZESPOLONE

Przypomnijmy wzory

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

W oparciu o nie określimy mnożenie wektorów na płaszczyźnie. Rozważmy dwa wektory

$$(a,b) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) \qquad \text{oraz} \qquad (c,d) = (\tau\cos\psi, \tau\sin\psi),$$

a następnie połóżmy

$$(a,b)\cdot(c,d) = (\rho\tau\cos(\varphi+\psi), \rho\tau\sin(\varphi+\psi)).$$

Skoro

$$(0,1)\cdot(0,1) = (\cos(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}), \sin\pi) = (-1,0),$$

to, upraszczjąc zapis mnożenia, przyjmujemy $(0,1) = i$ oraz $i^2 = -1$. Gdy będziemy pisali $x+iy$ w miejsce (x,y), to mamy

$$(a+ib)(c+id) = ac - bd + i(bc+ad).$$

Wektor $z = (x,y)$ zapisany w postaci $z = x+iy$ nazywamy *liczbą zespoloną*. Liczba rzeczywista $x = \operatorname{Re} z$, to tzw. *realizm* liczby zespolonej z; zaś liczba rzeczywista $y = \operatorname{Im} z$ to tzw. *imaginaris* (lub część *urojona*) liczby zespolonej z. Długość wektora $z = (x,y)$, czyli

$$|z| = r = \sqrt{x^2+y^2},$$

nazywamu *modułem* liczby zespolonej z. Kąt φ taki, że

$$\frac{x}{r} = \cos\varphi \qquad \text{oraz} \qquad \frac{y}{r} = \sin\varphi$$

nazywamy *argumentem* liczby zespolonej z. Skoro argumentów może być wiele: każde dwa różnią się o wielokrotność liczby 2π, to jedyny argument spełniający nierówności $0 \le \varphi < \pi$ nazywamy *argumentem głównym.* **Iloczyn dwóch liczb zespolonych ma moduł równy iloczynowi modułów czynników oraz argument równy sumie argumentów czynników.** Liczbę $\overline{z} = x - iy$ nazywamy *sprzężeniem* liczby zespolonej $z = x+iy$. Mamy

$$z\overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2+y^2,$$

czyli $\sqrt{z\overline{z}} = |z|$. Nietrudno sprawdzamy, że zawsze zachodzi

$$\overline{a+b} = \overline{a}+\overline{b} \qquad \text{oraz} \qquad \overline{a\cdot b} = \overline{a}\cdot\overline{b}.$$

Dodawanie oraz odejmowanie liczb zespolonych to odpowiedniki działań na wektorach, czyli

$$(a+ib)+(c+id)=a+c+i(b+d),$$
$$(a+ib)-(c+id)=a-c+i(b-d).$$

Dzielenie liczb zespolonych jest wykonalne: za wyjątkiem dzielenia przez zero $0=(0,0)$. Mianowicie

$$\frac{a+ib}{c+id}=\frac{(a+ib)(c-id)}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\frac{ad-bc}{c^2+d^2}.$$

Wzory de Moivre'a: zwyczaj takiego nazewnictwa powstał po II wojnie światowej (w Polsce!), choć wzory pochodzą od Eulera.

$$[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi).$$

Pierwiastkiem n-tego stopnia z liczby u nazywamy liczbę x która wymnożona przez siebie n-razy daje u, innymi słowy: $x^n=u$. Gdy skorzystamy z trygonometrycznej postaci liczby zespolonej, czyli położymy

$$u=r(\cos\varphi+i\sin\varphi) \qquad \text{oraz} \qquad x=R(\cos\psi+i\sin\psi),$$

to dostajemy

$$x^n=R^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Stąd wnioskujemy $r=R^n$ (lub $R=\sqrt[n]{r}$) oraz $n\psi=\varphi+2\pi k$, gdzie k przebiega liczby całkowite. Istotne są tylko zależności dla $0\le k<n$, czyli

$$\psi=\frac{2\pi k+\varphi}{n} \qquad \text{dla} \qquad k\in\{0,1,\ldots,n-1\}.$$

W rezultacie mamy

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}), \qquad \text{gdzie} \qquad k\in\{0,1,\ldots,n-1\}.$$

Zasadnicze twierdzenie algebry.

Twierdzenie. *Dowolne równanie*

$$z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_{n-1}z+a_n=0$$

ma zawsze co najmniej jedno rozwiązanie w zakresie liczb zespolonych.

Jeśli założymy, że czytelnik umie dzielić wielomiany: zna algorytm Euklidesa, to *zasadnicze twierdzenie algebdry* formułujemy tak:

Dowolny wielomian

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$$

można przedstawic w formie iloczynu

$$(z - z_1)(z - z_2) \cdot \ldots \cdot (z - z_n),$$

gdzie $z_1, z_2, \ldots, z_n$ *to liczby zespolone.* Gdy mamy do czynienia z wielomianem o współczynnikach rzeczywistych, to dostajemy

$$x^n + x^{n-1} a_1 + x^{n-2} a_2 + \ldots + x a_{n-1} + a_n = \prod_{k=1}^{m} (x - b_k) \cdot \prod_{t=1}^{\frac{n-m}{2}} (x^2 + c_t x + d_t),$$

gdzie wszystkie dwumiany $x^2 + c_t x + d_t$ są nierozkładalne. Taki rozkład wielomianu o współczynnikach rzeczywistych wyprowadzamy z zasadniczego twierdzenia algebry oraz z własności sprzężenia liczb zespolonych. Mianowicie zauważamy, że jeśli liczba zespolona jest pierwiastkiem wielomianu o współczynnikach rzeczywistych, to liczba do niej sprzężona jest także pierwiastkiem tego wielomianu. Gdy takie pierwiastki mają niezerowy imaginaris to produkują one wielomian stopnia drugiego: nierozkładalny, występujący w wyżej zapisanym rozkładzie.

Mnożenie macierzy

Rozważmy wzór

$$c_{jp} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{kp}.$$

Jeśli wyrazy a_{jk} to współczynniki macierzy A (macierzy o n kolumnach) oraz wyrazy b_{kp} to współczynniki macierzy B (macierzy o n wierszach), to wyrazy c_{jp} możemy traktować jak wyrazy macierzy C, która na tyle samo wierszy co A oraz tyle samo kolumn co B. Mamy określone działanie na macierzach

$$C = A \circ B,$$

które nazywamy *mnożeniem macierzy.* Mnożenie macierzy nie jest przemienne. Jednakże jest to działanie łączne oraz dodawanie - rozumiane jako dodawanie współczynników o takich samych indeksach - jest rozdzielne względem mnożenia. Mamy

$$(A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C),$$

$$(A + B) \circ C = (A \circ C) + B \circ C)$$

oraz

$$A \circ (B + C) = (A \circ B) + (A \circ C).$$

Dla macierzy kwadratowych A oraz B zachodzi

$$\det(A \circ B) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Rząd iloczynu macierzy szacujemy dzięki twierdzeniu Sylwestera:

$$\mathrm{rz}(A \circ B) \leq \min\{\mathrm{rz}(A), \mathrm{rz}(B)\}.$$

Przypomnijmy, że *rząd macierzy* A, to maksymalna ilość kolumn macierzy kwadratowej - powstałej z A poprzez skreślanie wierszy lub kolumn, wśród macierzy o niezerowym wyznaczniku. Układ równań liniowych

$$y_j = b_j + \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k$$

możemy przedstawić

$$\mathbf{y} = A \circ \mathbf{x} + \mathbf{b},$$

gdzie $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ oraz A jest macierzą o współczynnikach a_{ij}. Układ taki ma rozwiązanie gdy

$$\mathrm{rz}(A) = \mathrm{rz}(A\mathbf{b}),$$

gdzie A to macierz podstawowa układu, zaś Ab to macierz powstała z A przez dołączenie kolumny $\mathbf{b}$.

Gdy $\mathbf{y} = A \circ \mathbf{x} + \mathbf{b}$ oraz $\mathbf{x} = C \circ \mathbf{z} + \mathbf{d}$, to

$$\mathbf{y} = A \circ (C \circ \mathbf{z} + \mathbf{d}) + \mathbf{b} = A \circ C \circ \mathbf{z} + A \circ \mathbf{d} + \mathbf{b}.$$

Wnioskujemy stąd, że wielokrotna afiniczna zamiana współrzędnych jest także pojedynczą afiniczną zamianą współrzędnych.