RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE ZWYCZAJNE

Wiele obiektywnych prawidłowości przyrodniczych udaje się zapisać w postaci równości formalnej

$$F(x, y(x), y^{(1)}(x), y^{(2)}(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0,$$

gdzie $y^{(k)}(x)$ to $k-$ta pochodna dokładniej nie znanej funkcji $x \to y(x)$, zaś F to dokładnie sprecyzowana funkcja elementarna (albo rzeczywista) wielu zmiennych. Gdy w tej równości $y^{(n)}(x)$ występuje w sposób istotny, to nazywamy ją *równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu* n. Termin *równanie różniczkowe* został wprowadzony przez Gottfrieda Leibniza (1646 – 1716).

Różniczkowalną n-krotnie funkcję $x \to y(x)$ nazywamy *rozwiązaniem szczególnym*: także *całką szczególną*, równania

$$F(x, y(x), y^{(1)}(x), y^{(2)}(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0,$$

gdy dla dowolnej liczby x z dziedziny tej funkcji spełniona jest równość określająca równanie różniczkowe, ale rozumiana jako równość liczb.

Dla wielu równań różniczkowych wszystkie całki szczególne można zapisać w formie rodziny funkcji elementarnej $y(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ zależnej od parametrów $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Gdy podstawianie dowolnych układów liczb za parametry daje wszelkie rozwiązania szczególne – za wyjątkiem kilku, które zwyczajowo bywają nazywane *osobliwymi* – to mówimy, że znaleźliśmy *rozwiązanie ogólne* tego równania: lub jego *całkę ogólną*. Rozwiązywanie równań różniczkowych, to szukanie jego całek szczególnych oraz ogólnych. **To czynności o naturze statystycznej: precyzowanie wiedzy o postaci rozwiązań szczególnych bądź ogólnych.** Równanie różniczkowe zwyczajne rzędu n ma zwykle całkę ogólną zależną od n parametrów; chociaż nie ma powodów, aby tak było zawsze. Teoria równań różniczkowych odpowiada na pytania:
Kiedy istnieje rozwiązanie (twierdzenia o istnieniu)?
Czy wyznaczyliśmy wszelkie rozwiązania (twierdzenia o jednoznaczności)?

Równanie różniczkowe o zmniennych rozdzielonych: czyli równanie postaci $f(y)y' = h(x)$, rozwiązujemy, zgadując całki nieoznaczone w równości $\int f(y)\, dy = \int h(x)\, dx$.

Przykładowo, gdy

$$(1 + x^2)y' = 2xy^2, \qquad \text{czyli} \qquad \frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{1 + x^2},$$

to zgadujemy całki nieoznaczone z obu stron równości $\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{2x}{1+x^2}\ dx.$ Następnie zapisujemy

$$\frac{-1}{y} = \ \ln\,(1+x^2)+C. \qquad \text{Stąd} \qquad y = \frac{-1}{\ln\,(1+x^2)+C}:$$

znaleźliśmy całkę ogólną – co wymagałoby uzasadnienia, które pomijamy.

Równanie rózniczkowe postaci $y^{'} = f(ax+by+c)$, gdzie $a \neq 0 \neq b$ rozwiązujemy, podstawiając $u = ax+by+c$ oraz $y^{'}b = u^{'} - a$. Wtedy dostajemy równanie różniczkowe o zmiennych rozdzielonych $u^{'} = bf(u)+a$.

Przykładowo, gdy $y^{'} = x+y+3$, to kładziemy $u = x+y+3$ i wyliczamy $u^{'} = 1+y^{'}$. Następnie zgadujemy całki nieoznaczone w równości $\int dx = \int \frac{du}{1+u}$, w konsekwencji dostajemy całkę ogólną

$$A+x = \ \ln\,|u+1|: \qquad\qquad y = Ce^x - x - 4.$$

Aby rozwiązać równanie rózniczkowe $y^{'} = f(\frac{x}{y})$ **jednorodne względem** x **oraz** y piszemy $y = xu$, a następnie wyliczamy $y^{'} = u + xu^{'}$. Dostajemy równanie różniczkowe o zmiennych rozdzielonych $u + xu^{'} = f(u)$.

Przykładowo, gdy $xy^{'} = x+y$, to $u + xu^{'} = 1+u$. Zgadujemy całki nieoznaczone w równości

$$\int du = \int \frac{dx}{x}, \qquad \text{czyli} \qquad u = C + \ \ln\,|x|.$$

Innymi słowy: znaleźliśmy całkę ogólną

$$\frac{y}{x} = \ \ln\,|x| + C \qquad \text{bądź} \qquad y = x\,\ln\,Cx.$$

Równanie różniczkowe

$$y^{'} = f\left(\frac{Ax+By+C}{Dx+Ey+F}\right),$$

gdy układ równań liniowych

$$\begin{cases} Ax+by+C &= 0 \\ Dx+Ey+F &= 0 \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie $x = \alpha$ oraz $y = \beta$ rozwiązujemy, podstawiając $u = x - \alpha$ oraz $v = y - \beta$. Wtedy

$$\begin{cases} Ax+By+C = Au+Bv \\ Dx+Ey+F = Du+Fv, \end{cases}$$

a więc równanie to przekształca się na

$$v' = \frac{dv}{du} = f\left(\frac{Au + Bv}{Du + Ev}\right) :$$

równanie różniczkowe jednorodne względem u oraz v.

Jednakże gdy

$$(x + 2y + 1)y' = 2x + 4y + 3,$$

to kładziemy $z = 2x + 4y$, a następnie wyliczamy $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{10z + 28}{z + 2}$. Zgadujemy całki nieoznaczone w równaniu $\displaystyle\int \frac{z + 2}{10z + 28}\, dz = \int dx$. Czyli

$$10x = \int 1 - \frac{0,8}{z + 2,8}\, dz = z - \frac{4}{5} \ln\,(z + 2,8).\quad \text{Całka ogólna to}$$

$$5y - 10x = \ln C(2x + 4y + 2,8) \quad \text{bądź} \quad e^{5y-10x} = C(5x + 10y + 7).$$

Równanie $y' + p(x)y = 0$ nazywamy *równaniem różniczkowym liniowym jednorodnym*. Jest to równanie różniczkowe o zmiennych rozdzielonych. Gdy funkcja $x \to p(x)$ jest całkowalna, to całkę ogólną tego równania wyliczamy z równości $\displaystyle\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)\, dx$. Skąd mamy $y(x) = Ce^{-\int p(x)\, dx}$.

Przykładowo, gdy $y' = y \operatorname{tg} x$, to $\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int \operatorname{tg} x\, dx$. Skąd mamy całkę ogólną $\ln|y| = \ln \dfrac{C}{|\cos x|}$, czyli $y = \dfrac{C}{\cos x}$.

Sprawdzamy $y' = C\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$; a więc $y' = C\dfrac{\sin x}{\cos^2 x} = \dfrac{C}{\cos x} \operatorname{tg} x$.

Równanie różniczkowe liniowe niejednorodne $y' + p(x)y = q(x)$ rozwiązujemy tzw. *metodą uzmienniania stałej*. Znajdujemy całkę ogólną jego *części jednorodnej* $y' + P'(x)y = 0$, czyli $y(x) = Ce^{-P(x)}$. Następnie stosujemy podstawienie $y(x) = u(x)e^{-P(x)}$. Skoro

$$y' = u'e^{-P(x)} - P'(x)u(x)e^{-P(x)},$$

to dostaniemy równanie różniczkowe o zmiennych rozdzielonych $\dfrac{du}{dx} = q(x)e^{P(x)}$. Gdy funkcja $u(x) = \displaystyle\int q(x)e^{P(x)}\, dx$ jest całką szczególną tego ostatnieniego równania różniczkowego, to całka ogólna wynosi

$$y(x) = u(x)e^{-P(x)} + Ce^{-P(x)}.$$

Przykładowo, gdy
$$y^{'} - 2\frac{y}{x} = x^2 \cos x,$$
to całkujemy równanie liniowe jednorodne $xy^{'} = 2y$. Dostajemy
$$\int \frac{dy}{y} = \int 2\frac{dx}{x}. \quad \text{Skąd} \quad \ln|y| = 2 \ln Cx, \quad \text{czyli} \quad y = Cx^2.$$
Uzmienniamy stałą, a więc podstawiamy
$$y = u(x)x^2 \quad \text{oraz} \quad y^{'} = 2xu(x) + x^2u^{'}(x).$$
Otrzymujemy równanie różniczkowe
$$2x^2u(x) + x^3\frac{du}{dx} - 2x^2u(x) = x^3 \cos x,$$
które upraszczamy do równania różniczkowego $u^{'} = \cos x$. Następnie wyliczamy, że $u(x) = \sin x + A$. Ostatecznie całką ogólną jest $y = x^2 \sin x + Cx^2$. Sprawdzamy: $y^{'} = 2x \sin x + x^2 \cos x + 2Cx$; a więc
$$2x \sin x + x^2 \cos x + 2Cx - 2\frac{x^2 \sin x + Cx^2}{x} = x^2 \cos x.$$

Czasami przy rozwiązywaniu równania różniczkowego przydatna jest wiedza pozwalająca przewidzieć postać całki szczególnej. Gdy $y^{'} = 2y + e^{3x}$, to całką ogólną części jednorodnej $y^{'} = 2y$ jest funkcja $y = Ce^{2x}$. Jednakże rozwiązania szczególnego tego równania poszukujemy w postaci $y = me^{3x}$. Wtedy $y^{'} = 3me^{3x}$ i dostajemy równość
$$3me^{3x} = 2me^{3x} + e^{3x};$$
z której wyliczamy $m = 1$. Ostatecznie całka ogólna – suma całki szczególnej oraz calki ogólnej części jednorodnej równania – wynosi
$$y = e^{3x} + Ce^{2x}.$$

Niewiele bardziej skomplikowana jest metoda rozwiązywania równania różniczkowego liniowego niejednorodnego
$$\frac{dy}{dx} + y = (2x^2 + 6x + 6)e^x + 4e^{3x}.$$
Całką ogólną jego części jednorodnej $y^{'} + y = 0$ jest funkcja $y = Ce^{-x}$. Całki szczególnej równania różniczkowego $y^{'} + y = 4e^{3x}$ szukamy w postaci $y = Ae^{3x}$. Stąd $y^{'} = 3Ae^{3x}$, a więc rozwiązanie szczególne tego równania wynosi $y = e^{3x}$. Zaś całki szczególnej równania różniczkowego liniowego niejednorodnego

$y' + y = (2x^2 + 6x + 6)e^x$ szukamy w postaci $y = (Kx^2 + Lx + P)e^x$. Skoro $y' = (Kx^2 + 2Kx + Lx + p)e^x$, to drugie szukane rozwiązanie szczególne wynosi $y = (x^2 + 2x + 3)e^x$. Ostatecznie całka ogólna – suma obu całek szczególnych oraz całki ogólnej części jednorodnej – wynosi

$$y = (x^2 + 2x + 3)e^x + e^{3x} + Ce^{-x}.$$

Równanie różniczkowe Bernoulliego $y' + p(x)y + q(x)y^n = 0$. Gdy $n = 0$, to jest to równanie liniowe niejednorodne. Gdy $n = 1$, to mamy do czynienia z równaniem liniowym jednorodnym. Gdy liczba naturalna n jest większa niż 1, to stosujemy podstawienie $z = y^{1-n}$ oraz $z' = (1-n)y^{-n}y'$. Po podstawieniu – dla jaśniejszego rachunku możymy wpierw równanie wyjściowe przez $\frac{1}{y^n}$ – dostajemy równanie liniowe niejednorodne

$$z' + (1-n)p(x)z = (n-1)q(x).$$

Gdy $y' + xy = xy^3$, to po podstawieniu $z = y^{-2}$ dostajemy równanie $z' - 2xz = -2x$. Całką ogólną jego części jednorodne $z' = 2xz$ jest funkcja $z(x) = Ce^{x^2}$. Skoro całką szczególną równania otrzymanego po podstawieniu jest funkcja $z(x) = 1$, to

$$z = Ce^{x^2} + 1 = \frac{1}{y^2}.$$

Czyli całką ogólna równania początkowego wynosi

$$y = \sqrt{\frac{1}{Ce^{x^2} + 1}}.$$

Gdy $xy' + y = y^2 \ln x$, to stosujemy podstawienie $zy = 1$, a więc $z' = \frac{-y'}{y^2}$. Po wykonaniu podstawienia dostajemy równanie liniowe niejednorodne $-xz' + z = \ln x$ takie, że całką ogólną jego części jednorodnej $z = xz'$ jest funkcja $z(x) = Cx$. Stosujemy metodę uzmienniania stałej, kładąc $z = C(x)x$, a następnie wyliczamy $z' = C'x + C$. Skoro

$$\int \frac{\ln x}{x^2}dx = \frac{\ln x}{-x} + \int \frac{dx}{x^2} = \frac{1 + \ln x}{-x},$$

to z równości $-x^2C'(x) = \ln x$ wyliczamy $z = 1 + \ln x + Cx$. Mamy całkę ogólną

$$y = \frac{1}{Cx + 1 + \ln x}.$$

Równanie różniczkowe Riccatiego

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y^2 + q(x)y + r(x).$$

Gdy funkcja $x \to z(x)$ jest całką szczególną tego równania (zgadujemy taką całkę!), to stosujemy podstawienie $y = z + \frac{1}{u}$ oraz $y^{'} = z^{'} - \frac{u^{'}}{u^2}$.
Po uproszczeniach dostajemy równanie rózniczkowe liniowe niejednorodne

$$u^{'}(x) = -u(x)2p(x)z(x) - u(x)q(x) - p(x).$$

Gdy $y^{'} = y^2 - y(2x+1) + x^2 + x + 1$, to sprawdzamy, że funkcja $y = x$ jest całką szczególną tego równania. Stosując podstawienie $y = x + \frac{1}{u}$ oraz $y^{'} = 1 - \frac{u^{'}}{u^2}$, dostajemy

$$1 - \frac{u^{'}}{u^2} = \left(x + \frac{1}{u}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{u}\right)(2x+1) + x^2 + x + 1.$$

Po uproszczeniach otrzymamy równanie liniowe niejednorodne $1 = -u^{'} + u$.
Funkcja $u = 1$ jest całką szczególną tego ostatniego równania, zaś funkcja $u = Ce^x$ całką ogólną jego części jednorodnej $u = u^{'}$. Stąd mamy

$$u = 1 = Ce^x : \text{ szukana całka ogólna to } y = x + \frac{1}{1 + Ce^x}.$$

Gdy $xy^{'} = x^2y^2 - y(2x^2+1) + x^2 + 1$, to sprawdzamy, że funkcja $y = 1$ jest całką szczególną tego równania. Stosując podstawienie $y = 1 + \frac{1}{u}$ oraz $y^{'} = -\frac{u^{'}}{u^2}$, dostajemy

$$-\frac{u^{'}}{u^2} = x\left(\frac{1+u}{u}\right)^2 - \frac{2x^2+1}{x} \cdot \frac{u+1}{u} + \frac{x^2+1}{x}.$$

Po uproszczeniach otrzymamy $-xu^{'} = x^2 - u$. Funkcja $u = -x^2$ jest całką szczególną tego równania liniowego niejednorodnego, zaś funkcja $u = Cx$ całką ogólną jego części jednorodnej $u = xu^{'}$. Stąd mamy

$$u = -x^2 + Cx : \quad \text{szukana całka ogólna to} \quad y = 1 + \frac{1}{Cx - x^2}.$$

Gdy $y^{'} = x^2 - y^2 + 1$, to sprawdzamy, że funkcja $y = x$ jest całką szczególną. Stosujemy podstawienie $y = x + \frac{1}{u}$ oraz $y^{'} = 1 -$

$\dfrac{u'}{u^2}$ i dostajemy równanie różniczkowe, które po uproszczeniach jest równaniem różniczkowym liniowym niejednorodnym $u' = 2ux + 1$. Funkcja $u = Ce^{x^2}$ jest całką ogólną jego części jednorodnej $2ux = u'$. Stosujemy metodę uzmienniania stałej, kładąc $u = C(x)e^{x^2}$ i wyliczamy, że całką szczególną równania $u' = 2ux + 1$ jest funkcja $x \to e^{x^2} \int e^{-x^2}\, dx$. Stąd mamy

$$u = Ce^{x^2} + e^{x^2} \int e^{-x^2}\, dx : \quad \text{szukana całka ogólna to } \; y = x + \frac{e^{-x^2}}{C + \int e^{-x^2}\, dx}.$$

Równanie różniczkowe Clairauta $y = xy' + f(y')$. Rózniczkujemy je stronami: $y' = y' + xy'' + y'' f'(y')$, i uproszczamy. Dostajemy równanie $y''(x + f'(y') = 0$. Wśród funkcji liniowych $y = Bx = C$ szukamy całki ogólnej: jest ona zawarta w całce ogólnej równania $y'' = 0$. Skoro $y' = B$, to wyliczamy $Bx + C = Bx + f(B)$, a więc $C = f(B)$: całka ogólna to $y = Bx = f(B)$. Równanie $x + f(y') = 0$, to równanie różniczkowe o zmiennych rozdzielonych, gdzie szukaną funkcją jest pochodna $x \to y'(x)$. Wśród rozwiązań tego równania mogą znajdować się rozwiązania osobliwe (tzn. rozwiązania, które nie mają zapisu zgodnego z całką ogólną) równania różniczkowego Clairauta. Wyszukujemy je przez sprawdzenie: jest to konieczne, gdyż różniczkując równanie różniczkowe Clairauta stronami zwiększyliśmy ilość funkcji, które pojawią się w dalszych krokach szukania całek tego równania.

Gdy $y = xy' + (y')^4$, to różniczkowanie stronami prowadzi do równania $y' = y' + xy'' + 4y''(y')^4$, które upraszczamy do równania $y''(x + 4(y')^3) = 0$. Gdy $y'' = 0$, to $y = Ax + B$. Po wstawieniu do równania wyjściowego mamy $Ax + B = xA + A^4$, czyli $B = A^4$. Stąd wnioskujemy, że calką ogólną jest funkcja $y = Ax + A^4$. Z równości $x + 4(y')^3 = 0$ wyliczamy, że $y' = \sqrt[3]{\dfrac{-x}{4}}$. Tego ostatniego równania nie musimy całkować! Podstawiamy wyliczone y' do równania wyjściowego i dostajemy jego całkę osobliwą

$$y = x\left(\frac{-x}{4}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{-x}{4}\right)^{\frac{4}{3}} = \frac{-3}{8}x\sqrt[3]{2x}.$$

Gdy $y = 2xy' + y^2(y')^4$, to mnożymy stronami przez y to równanie rózniczkowe, a następnie podstawiamy $t^2 = y$ oraz $t' = 2yy'$. W rezultacie dostajemy równanie $t = zt' + \dfrac{1}{8}(t')^3$, które – różniczkujemy i upraszczamy – przekształcamy w równanie różniczkowe $t''\left(x + \dfrac{3}{8}(t')^2\right) = 0$. Gdy $t'' = 0$, to $t = Ax + B$. Po wstawieniu do równania wyjściowego mamy $Ax + B = xA + \frac{1}{8}A^3$, czyli $8B = A^3$. Stąd wnioskujemy, że całka ogólna to $y = Ax + \frac{A^3}{8}$. Z równości $8x + 3(t^{'})^2 = 0$ wyliczamy $t^{'} = \sqrt{\frac{-8x}{3}}$. Całkujemy to ostatnie równanie różniczkowe i wyliczamy, że $t^2 = \frac{-32}{27}x^3$. W rezultacie dostajemy całkę osobliwą $y^4 = \frac{-32}{27}x^3$.

Gdy $x = \frac{y}{y^{'}} + \frac{1}{(y^{'})^2}$, to szukamy całek w postaci funkcji $y \to x(y)$. Innymi słowy: równanie $x = yx^{'} + (x^{'})^2$ różniczkujemy stronami względem y; po uproszczeniu dostaniemy $0 = x^{"}(y + 2x^{'})$. Gdy $x^{"} = 0$, to $x = Ay + B$ oraz $x^{'} = A$. Po wstawieniu do przekształconego równania wyjściowego mamy $Ay + B = xA + A^2$, czyli $B = A^2$. Stąd wnioskujemy, że całka ogólna to $y = \frac{x - A^2}{A}$. Z równości $y = -2x^{'}$ wyliczamy całkę osobliwą

$$y^2 = -4x, \quad \text{czyli} \quad y = 2\sqrt{-x}.$$

Jest to całka osobliwa dla $x \leq 0$, bo $y^{'}\sqrt{-x} = -1$: po podstawieniu do równania wyjściowego mamy

$$x = -2\sqrt{-x}\sqrt{-x} + \frac{1}{(-x)^{-1}} = -2(-x) - x.$$

Równanie różniczkowe Eulera $ax^2y^{"} + bxy^{'} + cy = f(x)$**.**

Gdy $x^2y^{"} + 9xy^{'} + 12y = 0$, to szukamy całek w postaci funkcji $y = x^r$. Mamy wtedy $y^{'} = rx^{r-1}$ oraz $y^{"} = (r-1)rx^{r-2}$; zaś równanie zostaje przekształcone na

$$x^2(r-1)rx^{r-2} + 9xrx^{r-1} + 12x^r = 0.$$

Po uproszczeniu – dzielimy stronami przez x^r – dostaniemy $(r+2)(r+6) = 0$. Skąd wnioskujemy, że funkcje $y = \frac{1}{x^2}$ oraz $y = \frac{1}{x^6}$ to całki szczególne. Wtedy funkcja $y = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x^6}$ jest całką ogólną.

Gdy $x^2y^{"} - xy^{'} + y = 2x$, to szukając całek w postaci funkcji $y = x^r$. dostajemy równanie

$$x^2(r-1)rx^{r-2} - xrx^{r-1} + x^r = 0.$$

Po uproszczeniu mamy równość $(r-1)^2 = 0$. Skąd wnioskujemy, że funkcje $y = Ax$ oraz $y = Bx \ln x$ to całki szczególne. Wtedy funkcja $y = Ax + Bx \ln x$ jest całką ogólną części jednorodnej. Następnie sprawdzamy, że funkcja $y = x \ln^2 x$ jest całką szczególna. W rezultacie funkcja

$$y = Ax + Bx \ln x + x \ln^2 x$$

to szukana całka ogólna.

Gdy $x^2 y'' + xy' = 12 \ln x$, to szukanie całek – części jednorodnej tego równania $x^2 y'' + xy' = 0$ – w postaci funkcji $y = x^r$ prowadzi do równości $r^2 = 0$. Skąd wnioskujemy, że rodzina funkcji

$$y = Ax^0 + Bx^0 \ln x = A + B \ln x$$

jest całką ogólną części jednorodnej: sprawdzamy to, podstawiając w części jednorodnej $y' = \frac{B}{x}$ oraz $y'' = \frac{-B}{x^2}$. Skoro funkcja $y = 2 \ln^3 x$ jest całką szczególną równania wyjściowego – co sprawdzamy, podstawiając w tym równaniu różniczkowym $y' = \frac{6}{x} \ln^2 x$ oraz

$$y'' = \left(\frac{6 \ln^2 x}{x} \right)' = \frac{12 \ln x - 6 \ln^2 x}{x^2}$$

– to całką ogólną równania wyjściowego jest

$$y = A + B \ln x + 2 \ln^3 x.$$

Gdy $x^2 y'' + xy' + y = 2 \sin(\ln x)$, to szukanie całek – części jednorodnej tego równania $x^2 y'' + xy' + y = 0$ – w postaci funkcji $y = x^r$ prowadzi do równości $r^2 + 1 = 0$. Skąd wnioskujemy, że rodzina funkcji o wartościach zespolonych $y = Ax^i + Bx^{-i}$ zawiera całką ogólną części jednorodnej. Kładziemy $t = \ln x$, korzystamy ze wzoru $e^{it} = \cos t + i \sin t$ i wyliczamy

$$y = Ae^{it} + Be^{-it} = (A + B)\cos t + i(A - B)\sin t.$$

Jeśli sprawdzimy, że funkcja $y = -\ln x \cos(\ln x)$ jest całką szczególną, to

$$y = A \cos(\ln x) + B \sin(\ln x) - \ln x \cos(\ln x)$$

jest całką ogólną.

Równanie różniczkowe Langrange'a - d'Alemberta $y = xf(y') + g(y')$, różniczkujemy stronami względem x i dostajemy

$$y' = f(y') + xf'(y')y'' + g'(y')y''.$$

Następnie kładziemy $p = y^{'}$ i mamy

$$p = f(p) + (xf^{'}(p) + g^{'}(p))p^{'}.$$

Jeśli dla liczby q zachodzi równość $q = f(q)$, to szukamy całki osobliwej w postaci $y = Ax + B$. Po wstawieniu do równania wyjściowego dostajemy $B = g(q)$ i mamy całkę osobliwą $y = qx + g(q)$. Jeżeli założymy $p \neq f(p)$, to mamy

$$\frac{dx}{dp} = x\frac{f^{'}(x)}{p - f(p)} + \frac{g^{'}(p)}{p - f(p)} :$$

równanie różniczkowe liniowe niejednorodne, którego rozwiązaniami są funkcje $p \to x(p)$. Wówczas całkę ogólną równania wyjściowego otrzymujemy w postaci parametrycznej

$$\begin{cases} x = & x(p); \\ y = & x(p)f(p) + g(p). \end{cases}$$

Gdy $y = 2xy^{'} + (y^{'})^{-2}$, to po zrózniczkowaniu oraz podstawieniu $p = y^{'}$ dostajemy

$$0 = p + 2xp^{'} - 2\frac{p^{'}}{p^3}.$$

Dla $p = 0$ znajdujemy całkę osobliwą $y = 0$. Jeżeli $p \neq 0$, to pozostaje do rozwiązania równanie różniczkowe liniowe niejednorodne $\frac{dx}{dp} = \frac{-2x}{p} + \frac{2}{p^4}$. Całka ogólna jego części jednorodnej $\frac{dx}{dp} = \frac{-2x}{p}$, to rodzina funkcji $x = \frac{C}{p^2}$. Metodą uzmienniania stałej zgadujemy, że funkcja $x = \frac{-2}{p^3}$ to całka szczególna. Stąd oraz z podstawienia w równaniu wyjściowym dostajemy całkę ogólną w postaci rodzimy funkcji określonych parametrycznie

$$\begin{cases} x = & \frac{C}{p^2} - \frac{2}{p^3}; \\ y = & \frac{2C}{p} - \frac{3}{p^2}. \end{cases}$$

Gdy $y = 2xy^{'} - (y^{'})^2$, to po zrózniczkowaniu oraz podstawieniu $p = y^{'}$ dostajemy

$$0 = p + 2xp^{'} - 2p^{'}p.$$

Dla $p = 0$ znajdujemy całkę osobliwą $y = 0$. Jeżeli $p \neq 0$, to pozostaje do rozwiązania równanie różniczkowe liniowe niejednorodne $\frac{dx}{dp} = \frac{-2x}{p} + 2$. Całka ogólna jego części jednorodnej $\frac{dx}{dp} = \frac{-2x}{p}$, to rodzina funkcji $x = \frac{C}{p^2}$. Metodą uzmienniania stałej zgadujemy, że funkcja

$x = \dfrac{2}{3}p$ to całka szczególna. Stąd oraz z podstawienia w równaniu wyjściowym dostajemy całkę ogólną w postaci rodzimy funkcji określonych parametrycznie

$$\begin{cases} x = & \dfrac{C}{p^2} + \dfrac{2}{3}p; \\ y = & \dfrac{2C}{p} - \dfrac{2}{3}p^2. \end{cases}$$

Gdy $y = x(y')^2 - y'$, to po zróżniczkowaniu oraz podstawieniu $p = y'$ mamy

$$p - p^2 = p'(2xp - 1).$$

Dla $p = 0$ znajdujemy całkę osobliwą $y = 0$; zaś dla $p = 1$ znajdujemy całkę osobliwą $y = x + 1$. Jeżeli $1 \neq p \neq 0$, to pozostaje do rozwiązania równanie różniczkowe liniowe niejednorodne $\dfrac{dx}{dp} = \dfrac{2x}{1-p} - \dfrac{1}{p-p^2}$. Całka ogólna jego części jednorodnej $\dfrac{dx}{dp} = \dfrac{2x}{1-p}$, to rodzina funkcji $x = \dfrac{C}{(1-p)^2}$. Metodą uzmienniania stałej zgadujemy, że funkcja $x = \dfrac{p - \ln p}{(1-p)^2}$ to całka szczególna. Stąd oraz z podstawienia w równaniu wyjściowym dostajemy całkę ogólną w postaci rodzimy funkcji określonych parametrycznie

$$\begin{cases} x = & \dfrac{p - \ln p + C}{(1-p)^2}; \\ y = & \dfrac{p - \ln p + C}{(1-p)^2} p^2 - p. \end{cases}$$

Równanie różniczkowe rzędu drugiego $F(x, y', y") = 0$, w którym y nie występuje wyraźnie rozwiązujemy przez podstawienie $y' = p(x)$.

Przykładowo, gdy $y" = \sin x \cos x$, to kładziemy $p' = \sin x \cos x$. Całkujemy to równanie różniczkowe i dostajemy równanie różniczkowe $y' = p = \dfrac{-\cos 2x}{4} + C$, które także całkujemy. Mamy całkę ogólną $y = \dfrac{-\sin 2x}{8} + Cx + D$.

Równanie różniczkowe rzędu drugiego $F(y, y', y") = 0$, w którym x nie występuje wyraźnie rozwiązujemy przez podstawienie $u(y) = y'$ oraz $y" = \dfrac{du}{dx} = \dfrac{du}{dy}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{du}{dy}u(y)$. Otrzymujemy $F(y, u, u') = 0$: równanie rzędu pierwszego ze względu na y.

Przykładowo, gdy $2yy" + (y')^2 = 0$, to po podstawieniu jak wyżej i uproszczeniu dostaniemy $2y\dfrac{du}{dy} + u = 0$. Całkując to ostatnie równanie różniczkowe wyliczamy, że $u = \dfrac{1}{\sqrt{Cy}} = y^{'}$. Całka ogólna tego równania różniczkowego $y^3 = A(x+B)^2$ jest jednocześnie szukaną całką ogólną.

Czasami możemy postępować inaczej. Gdybyśmy szukali całek postaci $y = e^{u(x)}$, podstawiając $y^{'} = u^{'}e^u$ oraz $y^{"} = e^u(u^{"} + (u^{'})^2)$, to po podstawieniu w $2yy^{"} + (y^{'})^2 = 0$ i uproszczeniach dostalibyśmy $3(u^{'})^2 + 2u^{"} = 0$.

Także, gdy $yy^{"} = (y^{'})^2$, to podstawiamy $y^{'} = yz$ i wyliczamy $y^{"} = y(z^2 - z^{'})$. Po wstawieniu do równania wyjściowego dostajemy równanie różniczkowe o zmiennych rozdzielonych $y^{'} = Ay$, którego całka ogólna $y = Ae^{Bx}$ jest jednocześnie szukaną całką ogólną.

Równanie różniczkowe liniowe o współczynnikach stałych

$$A_n y^{(n)} + A_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + A_1 y^{'} + A_0 y = f(x)$$

– gdzie $A_n, A_{n-1}, \ldots, A_1, A_0$ to ustalone liczby – rozwiązujemy, podstawiając $y = e^{rx}, y^{'} = re^{rx}, \ldots, y^{(n)} = r^n e^{rx}$. Następnie upraszczamy – dzielimy stronami przez e^{rx} – jego część jednorodną

$$A_n y^{(n)} + A_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + A_1 y^{'} + A_0 y = 0$$

i dostajemy *wielomian charakterystyczny*

$$A_n r^n + A_{n-1} r^{n-1} + \ldots + A_1 r + A_0 = 0.$$

Gdy r jest pierwiastkiem co najmniej k-krotnym wielomianu charakterystycznego, to funkcja $y = x^{k-1}e^{rx}$ jest całką szczególną części jednorodnej. Kombinacja liniowa wszystkich takich całek szczególnych oraz jednej całki szczególnej wyjściowego równania daje całkę ogólną.

Gdy $y^{"} = 4y$, to mamy wielomian charakterystyczny

$$r^2 - 4 = 0 = (r-2)(r+2).$$

Wtedy całka ogólna wynosi $y = Ae^{-2x} + Be^{2x}$.

Gdy $y^{"} + 6y^{'} + 9y = 0$, to mamy wielomian charakterystyczny

$$r^2 + 6r + 9 = 0 = (r+3)^2.$$

Wtedy całka ogólna wynosi $y = (A + Bx)e^{-3x}$.

Gdy $\quad y^{(3)} - y^{"} = 0, \quad$ to mamy wielomian charakterystyczny

$$r^3 - r^2 = 0 = r^2(r-1).$$

Wtedy całka ogólna wynosi $\quad y = (A + Bx)e^0 + Ce^x = A + Bx + Ce^x.$

Gdy $\ y^{"} - 3y^{'} + 2y = x^2,$ to wielomian charakterystyczny części jednorodnej $y^{"} - 3y^{'} + 2y = 0, \quad$ wynosi

$$r^2 - 3r + 2 = 0 = (r-2)(r-1):$$

całka ogólna części jednorodnej to $\quad y = Ae^{2x} + Be^x. \quad$ Całki szczególnej szukamy w postaci wielomianu $\quad y = ax^2 + bx + c. \quad$ Podstawiając $\quad y^{'} = 2ax + b,$ oraz $\quad y^{"} = 2a, \quad$ wyliczamy $2a = 1, \quad 2b = 3$ oraz $4c = 7$. Stąd całka ogólna to

$$y = Ae^x + Be^{2x} + \frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{7}{4}.$$

Gdy $\ y^{"} - y = 2\sin x,$ to wielomian charakterystyczny części jednorodnej $y^{"} - y = 0, \quad$ wynosi

$$r^2 - 1 = 0 = (r+1)(r-1):$$

całka ogólna części jednorodnej to $\quad y = Ae^{-x} + Be^x. \quad$ Całki szczególnej szukamy w postaci funkcji $\quad y = a\sin x. \quad$ Podstawiając $\quad y^{"} = -a\sin x,$ wyliczamy $a = -1$. Stąd całka ogólna to

$$y = Ae^{-x} + Be^x - \sin x.$$

Gdy $\ y^{"} + y = 0,$ to

$$r^2 - 1 = 0 = (r+i)(r-i)$$

jest wielomianem charakterystycznym. Całka ogólna to rodzina funkcji zespolonych $y = Ae^{-ix} + Be^{ix}. \quad$ Korzystamy z równości $\quad e^{ix} = \cos x + i\sin x, \quad$ i wyliczamy całkę ogólną: jako rodzinę funkcji rzeczywistych,

$$Ae^{-ix} + Be^{ix} = (A+B)\cos x + i(B-A)\sin x = C\cos x + D\sin x = y.$$

Gdy $\ y^{"} + 2y^{'} + 5y = 0,$ to

$$r^2 + 2r + 5 = 0 = (r + 1 + 2i)(r + 1 - 2i)$$

jest wielomianem charakterystycznym. Całka ogólna to rodzina funkcji zespolonych $y = Ae^{(-1+2i)x} + Be^{(-1-2i)x}. \quad$ Korzystamy z równości

$$e^{a+ib} = e^a(\cos b + i\sin b),$$

i wyliczamy całkę ogólną

$$Ae^{(-1+2i)x} + Be^{(-1-2i)x} = e^{-x}(C\cos 2x + iD\sin 2x) = y.$$

Gdy $y^{"} - y^{'} = 2\sin x - \cos x$, to

$$r^2 + 1 = 0 = (r+i)(r-i)$$

jest wielomianem charakterystycznym części jednorodnej. Sprawdzamy, że funkcja

$$y = -x\cos x - \frac{x}{2}\sin x$$

to całka szczególna. Wtedy

$$y = -x\cos x - \frac{x}{2}\sin x + A\cos x + B\sin x$$

to całka ogólna.

Gdy $y^{"} + 4y^{'} = \dfrac{1}{\cos 2x}$, to

$$r^2 + 4 = 0 = (r+2i)(r-2i)$$

jest wielomianem charakterystycznym części jednorodnej. Sprawdzamy, że funkcja

$$y = \frac{1}{4}\cos 2x\ \ln\ (\cos 2x) + \frac{x}{2}\sin 2x$$

to całka szczególna. Wtedy

$$y = \frac{1}{4}\cos 2x\ \ln\ (\cos 2x) + \frac{x}{2}\sin 2x + +A\cos 2x + B\sin 2x$$

to całka ogólna.

Gdy $y^{(3)} + y^{"} = \sin 2x$ to

$$r^3 + r^2 = 0 = r^2(r+1)$$

jest wielomianem charakterystycznym części jednorodnej. Sprawdzamy, że funkcja

$$y = \frac{1}{10}\cos 2x - \frac{1}{20}\sin 2x$$

to całka szczególna. Wtedy

$$y = \frac{1}{10}\cos 2x - \frac{1}{20}\sin 2x + +Ax + Be^{-x} + C$$

to całka ogólna.

Układy równań różniczkowych. Rozważmy układ równań różniczkowych $y^{'} = y + z$ oraz $z^{'} = y + x + z$. Z pierwszego równania wyliczamy równanie $z = y^{'} - y$, które zróżniczkowane stronami daje $z^{'} = y^{"} - y^{'}$. Po podstawieniach dostajemy równanie liniowe niejednorodne o stałych współczynnikach

$$y^{"} - y^{'} = y^{'} + x, \quad \text{czyli} \quad y^{"} - 2y^{'} = x.$$

Wielomian charakterystyczny jego części jednorodnej to $r^2 - 2r = 0$, zaś całka szczególna to $y = \frac{-x^2}{4} - \frac{x}{4}$. Stąd

$$\begin{cases} y = A + Be^{2x} - \dfrac{x + x^2}{4}; \\ z = Be^{2x} - A - \dfrac{1 - x^2 + x}{4}. \end{cases}$$

Gdy $x^{'} = x + 5y$ oraz $y^{'} = -x - 3y$, to wyliczamy równanie równanie $x = -3y - y^{'}$, które zróżniczkowane stronami (względem paramertu t!) daje $x^{'}(t) = -y^{"}(t) - 3y^{'}(t)$. Po podstawieniach dostajemy równanie liniowe o stałych współczynnikach

$$-y^{"} - 3y^{'} = -3y - y^{'} + 5y, \quad \text{czyli} \quad y^{"}(t) + 2y^{'}(t) + 2y(t) = 0.$$

Wielomian charakterystyczny jego części jednorodnej to $r^2 + 2r + 2 = 0$. Całkę ogólną wyliczamy w postaci parametrycznej

$$\begin{cases} y = e^{-t}(A\sin t + B\cos t); \\ x = e^{-t}[(B - 2A)\sin t + (A - 4B)\cos t]. \end{cases}$$