

**X - 1.** Ile wektorów  $(x, y, z)$ , gdzie współrzędne  $x, y$  oraz  $z$  są liczbami naturalnymi, leży na płaszczyźnie

$$x + y + z = n?$$

Czy potrafisz opisać liczbę rozwiązań wzorem zależnym od liczby naturalnej  $n$ ?

**X - 2.** Ile wektorów  $(x, y, z)$ , których współrzędne przebiegają liczby całkowite dodatnie, leży na płaszczyźnie

$$x + y + z = n?$$

Czy potrafisz opisać liczbę rozwiązań wzorem zależnym od liczby naturalnej  $n$ ?

**X - 3.** Ile układów liczb całkowitych  $x_1, x_2, \dots, x_k$  spełnia nierówność

$$|x_1| + |x_2| + |x_3| + \dots + |x_k| \leq n?$$

Czy potrafisz opisać liczbę rozwiązań wzorem zależnym od liczb naturalnych  $n$  oraz  $k$ ?

**X - 4.** Jaki sześciobok wypukły z wierzchołkami, których współrzędne są liczbami naturalnymi, ma najmniejsze pole?

**X - 5.** Ile liczb naturalnych mniejszych niż  $10^n$  ma zapis dziesiętny, którego cyfry tworzą ciąg malejący?

**X - 6.** Jakie cyfry mogą być na ostatnim miejscu zapisu dziesiętnego liczby  $1 + 2 + 3 + \dots + n$ ?

**X - 7.** Jak można opisać wszystkie rozwiązania w liczbach naturalnych równości

$$(\sqrt{2} - 1)^n = \sqrt{m} - \sqrt{m - 1}?$$

**X - 8.** Niech  $x_1, x_2, \dots$  będzie ciągiem różnych liczb naturalnych. Kiedy możliwa jest nierówność

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \sum_{k=1}^n \frac{x_n}{k^2}?$$

**X - 9.** Czy na okręgu o promieniu 1 można znaleźć nieskończenie wiele takich punktów, że długość dowolnej cięciwy, której końcami są dwa spośród nich, jest liczbą wymierną?

**X - 10.** Niech  $x_1, x_2, \dots$  będzie niemalejącym ciągiem liczb naturalnych takim, że ciąg  $(x_1)^{-1}, 2(x_2)^{-1}, \dots, n(x_n)^{-1}, \dots$  jest nieograniczony. Czy wśród wyrazów ciągu  $(x_1)^{-1}, 2(x_2)^{-1}, \dots, n(x_n)^{-1}, \dots$  musi być nieskończenie wiele liczb naturalnych?