GEOMETRIA ANALITYCZNA W PRZESTRZENI

Położenie punktu w przestrzeni określamy za pomocą trzech liczb (x, y, z). Liczby te odpowiadają rzutom na osie układu współrzędnych: każdy rzut wzdłuż płaszczyzny równoległej do dwóch osi oraz przechodzącej przez punkt, który rzutujemy. Gdy osie układu sa prostopadłe, przecinają się w punkcie $(0, 0, 0)$, na każdej osi wybrany jest zwrot oraz jednostka długosci, to taki układ nazywamy *kartezjańskim układem współrzędnych.*

Gdy kartezjański układ współrzędnych przesuniemy o wektor (a, b, c), to współrzędne punktu (x, y, z) w nowym układzie wyrażają się wzorami

$$\begin{cases} x^* &= x - a, \\ y^* &= y - b, \\ z^* &= z - c. \end{cases}$$

W przestrzeni wektory oznaczamy tak samo jak punkty. Jeśli (x, y, z) jest punktem (wektorem), to liczba

$$|(x, y, z)| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

jest odległoscią tego punktu od początku układu: jest długością wektora od punktu $(0, 0, 0)$ do punktu (x, y, z). Mamy

$$\begin{cases} x &= \rho \cos \alpha, \\ y &= \rho \cos \beta, \\ z &= \rho \cos \gamma, \end{cases}$$

gdzie $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Z wzorów tych odczytujemy, że

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

i wnosimy, że kąty α, β oraz γ, to kąty pomiędzy wektorem od punktu $(0, 0, 0)$ do punktu (x, y, z), a dodatnio zwróconymi osiami: osiami zwróconymi w stronę zaznaczonej na nich jednostkach długości, układu współrzędnych. Odległośc między punktami (a, b, c) a (d, e, f) wyznaczamy według wzoru

$$\sqrt{(a - d)^2 + (b - e)^2 + (c - f)^2}.$$

Kierunek wektora od (a, b, c) do (d, e, f) charakteryzują trzy kąty jakie wektor ten tworzy z wektorami jednostkowymi na osiach układu współrzędnych:

$$\cos \alpha = \frac{a - d}{\sqrt{(a - d)^2 + (b - e)^2 + (c - f)^2}};$$

$$\cos\beta = \frac{b-e}{\sqrt{(a-d)^2+(b-e)^2+(c-f)^2}};$$

$$\cos\gamma = \frac{c-f}{\sqrt{(a-d)^2+(b-e)^2+(c-f)^2}}.$$

Jeśli kierunki dwóch prostych są dane za pomocą kątów (α, β, γ) oraz (μ, τ, ν), to kąt φ pomiędzy prostymi równoległymi do nich oraz przecinającymi się wyznaczamy według wzoru

$$\cos\varphi = \cos\alpha\cos\mu + \cos\beta\cos\tau + \cos\gamma\cos\tau.$$

Takie proste są prostopadłe, o ile

$$0 = \cos\alpha\cos\mu + \cos\beta\cos\tau + \cos\gamma\cos\tau.$$

Afiniczna zamiana współrzędnych zadawana jest równaniami

$$x^* = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + b_1$$

$$y^* = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + b_2$$

$$z^* = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + b_3,$$

o ile wyznacznik

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

jest niezerowy. Gdy wyznacznik ten wynosi 1, to mamy do czynienia z obrotem oraz przesunięciem o wektor (b_1, b_2, b_3): wiersze tego wyznacznika cosinusy kątów jakie osie nowego układu tworzą z osiami układu starego.

Jeśli położymy

$$\begin{array}{lcl} x = \rho\cos\varphi\sin\tau & & x = \rho\cos\varphi\cos\tau \\ y = \rho\sin\varphi\sin\tau & \text{albo} & y = \rho\sin\varphi\cos\tau \\ z = \rho\cos\tau & & z = \rho\sin\tau, \end{array}$$

to liczby (ρ, φ, τ) bywają nazywane współrzędnymi *sferycznymi* lub *geograficznymi*. Wtedy: - ρ to odległość punktu od początku układu; - φ to odpowiednik długości georaficznej; - τ to odpowiednik szerokości geograficznej. Współrzędne sferyczne zmieniają się w zakresie

$$\begin{cases} 0 & \le \rho < & +\infty, \\ 0 & \le \varphi < & 2\pi, \\ 0 & \le \tau \le & \pi. \end{cases}$$

Zaś współrzędne geograficzne w zakresie

$$\begin{cases} 0 & \leq \rho < & +\infty, \\ -\pi & \leq \varphi < & \pi, \\ \frac{-\pi}{2} & \leq \tau \leq & \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Równania

$$\begin{cases} x & = & \rho \cos \varphi, \\ y & = & \rho \sin \varphi, \\ z & = & z; \end{cases}$$

charakteryzują wspólrzedne walcowe Iloczyn skalarny wektorów (a, b, c) oraz (d, e, f): iloczym długości wektorów razy cosinus kąta pomiędzy nimi, to liczba

$$ad + be + cf.$$

Obierzmy na osiach układu współrzędnych wektory jednostkowe $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ oraz $\mathbf{k}$ tak, aby tworzyły one układ prawoskrętny. *Iloczyn wektorowy* określamy według tabeli

	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{i}$	0	$\mathbf{k}$	$-\mathbf{j}$
$\mathbf{j}$	$-\mathbf{k}$	0	$\mathbf{i}$
$\mathbf{k}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{i}$	0

Jeśli założymy, że $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ oraz $\mathbf{c}$ to wektory; zaś n oraz n to liczby oraz zachodzą warunki

$$\begin{array}{rcccl} (m\mathbf{a}) & \times & (n\mathbf{b}) & = & nm(\mathbf{a} \times \mathbf{b}); \\ (\mathbf{a} + \mathbf{b}) & \times & \mathbf{c} & = & (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}); \\ \mathbf{a} & \times & (\mathbf{b} + \mathbf{c}) & = & (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{c}), \end{array}$$

to iloczyn wektorowy wektorów $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ oraz $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ oznaczamy $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ i sprawdzamy, że

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_3 - a_1 b_3).$$

Innymi słowy iloczyn wektorowy $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ to wektor prostopadły do wektorów $\mathbf{a}$ oraz $\mathbf{b}$ o długości

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} \sin \alpha :$$

gdzie α to kąt pomiędzy wektorami $\mathbf{a}$ oraz $\mathbf{b}$, oraz o zwrocie takim aby występując po wektorach $\mathbf{a}$ oraz $\mathbf{b}$ dawał układ prawoskrętny. Długośc wektora $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ to pole równoległoboku o bokach $\mathbf{a}$ oraz $\mathbf{b}$. Iloczyn wektorowy można określić także wzorem

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Równanie $Ax + By + Cz + D = 0$ wyznacza płaszczyznę prostopadłą do wektora (A, B, C): każdą płaszczyznę można przedstawić takim równaniem. Jeśli płaszczyzna jest określona przez trzy swoje punkty (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) oraz (c_1, c_2, c_3), to ma ona równanie

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Jesli cztery punkty (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3) oraz (d_1, d_2, d_3) nie leżą na jednej płaszczyźnie, to $\frac{1}{6}$ wartości bezwzglednej z wyznacznika

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 1 \end{vmatrix}$$

jest równa objętosci czworościanu, którego wierzchołkami są te punkty. Odległość punktu (a, b, c) od płaszczyzny $Ax + By + Cz + D = 0$ obliczamy według wzoru

$$\left| \frac{Aa + Bb + Cc + d}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

Kąt φ między płaszczyznami $Ax + By + Cz + D = 0$ oraz $Ex + Fy + Gz + H = 0$ obliczamy według wzoru

$$\cos \varphi = \frac{|AE + BF + CG|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{E^2 + F^2 + G^2}}.$$

Płaszczyzny te są równoległe gdy

$$(A, B, C) = \lambda(E, F, G),$$

zaś są prostopadłe gdy $AE + BF + CG = 0$.

Prostą w przestrzeni określamy jako część wspólną dwóch płaszczyzn

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D &= 0 \\ Ex + Fy + Gz + H &= 0 \end{cases}$$

Gdy prosta przechodzi przez punkty (a, b, c) oraz (d, e, f), to wyznaczają ją równania

$$\frac{x - a}{d - a} = \frac{y - b}{e - c} = \frac{z - c}{f - c}.$$

Innymi słowowy równania

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p}$$

wyznaczają prosta przechodzącą przez punkt (a, b, c) oraz równoległą do wektora (m, n, p): wektorem (m, n, p) może być iloczyn wektorowy

$$(A, B, C) \times (E, F, G)!$$

Równanie postaci

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

nazywamy równaniem *stopnia drugiego*. Przez afiniczną zamianę współrzędnych doprowadzamy go do tzw. *postaci kanonicznej*. W ustaleniu takiej zamiany użyteczny bywa wzór

$$Ax^2 + Dxy + Exz + Gx = A\left(x + \frac{Dy}{2\sqrt{A}} + \frac{Ez}{2\sqrt{A}} + \frac{G}{2\sqrt{A}}\right)^2 + W(y, z),$$

gdzie $W(y, z)$ jest wielomianem drugiego stopnia zależnym jedynie od zmienych y oraz z. Wzór ten zastosowany dwukrotnie pozwala znaleźć afiniczną zamianę sprowadzająca dowolne równanie stopnia drugiego do postaci: $x^2 = 0$ - punkt, $x = 1$ - płaszczyzna, $x^2 - y^2 = 0$ - dwie przecinające się płaszczyzny, $x^2 + y^2 = 1$ - walec eliptyczny, $x^2 - y^2 = 1$ - walec hiperboliczny, $x^2 = y$ - walec paraboliczny, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ - elipsa, $x^2 + y^2 = z$ - paraboloida, $x^2 + y^2 = z^2$ - stożek eliptyczny, $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ - hiperboloida jednopowłokowa, $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ - hiperboloida dwupowłokowa.