

GEOMETRIA ANALITYCZNA NA PŁASZCZYŹNIE

Ustalmy na płaszczyźnie dwie prostopadłe osie X oraz Y przecinające się w punkcie $(0, 0)$. Aby określić położenie punktu P rysujemy proste równoległe do obu osi przechodzące przez ten punkt. Przecięcie jednej z narysowanych prostych z osią X oznaczamy $(x, 0)$; zaś przecięcie drugiej prostej z osią Y oznaczamy $(0, y)$. Gdy na osiach są ustalone jednostki długości, to x oraz y możemy traktować jak liczby określające odległości punktów od osi. Para (x, y) jednoznacznie opisuje położenie punktu P . Liczbę x nazywamy *odciętą* punktu P ; liczbę y *rzedną* tego punktu; obie liczby *współrzednymi kartezjańskimi* punktu P : taki sposób opisywania płaszczyzny zawdzięczamy Rene Descartes - w wersji polskiej Kartezjusz, żyjącemu w latach 1596 - 1650.

Gdy przyjmniemy

$$\begin{cases} x = r \cos \phi; \\ y = r \sin \phi, \end{cases}$$

to liczby r oraz ϕ nazywamy *współrzednymi biegunowymi* punktu P . Wówczas r jest odległością pomiędzy punktami $(0, 0)$ a (x, y) ; zaś ϕ jest kątem między osią X a prostą łączącą te punkty.

Równania

$$\begin{cases} x^* = Ax + By + C; \\ y^* = Dx + Ey + F, \end{cases}$$

opisują afiniczną zamianę układu współrzędnych, o ile wyznacznik $\det \begin{pmatrix} A & B \\ D & E \end{pmatrix}$ jest niezerowy. Dwukrotna afiniczna zamiana współrzędnych jest także pojedynczą zamianą współrzędnych. Bliższe rozeznanie tej własności prowadzi do określania mnożenia macierzy: prowadzi do tzw. *algebry liniowej*.

W układzie współrzędnych kartezjańskich wektory oznaczamy tak samo jak punkty. Punkt P o współrzędnych (x, y) utożsamiamy z wektorem od punktu $(0, 0)$ do punktu P .

Iloczyn skalarny wektorów, czyli iloczyn długości wektora oraz cosinusa kąta pomiędzy wektorami (a, b) oraz (c, d) , wyliczamy według wzoru

$$ac + bd.$$

Długość wektora (a, b) , czyli długość odcinka łączącego punkt $(0, 0)$ z punktem (a, b) , wyliczamy według wzoru

$$\sqrt{a^2 + b^2};$$

zaś długość odcinka łączącego punkty (a, b) oraz (c, d) według wzoru

$$\sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}.$$

Wzory na długość wektora są natychmiastowymi konsekwencjami twierdzenia Pitagorasa.

Skoro iloczyn skalarny dwu prostopadłych wektorów jest równy zero, to wektor (a, b) jest zawsze prostopadły do wektora $(b, -a)$: wtedy ze wzoru na iloczyn skalarny mamy $ab - ab = 0$.

Przyjmijmy, że $\mathbf{i}$ jest wektorem jednostkowym na osi X , zaś $\mathbf{j}$ wektorem jednostkowym na osi Y . Wówczas wektor (a, b) możemy zapisywać w postaci $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$. Z pomocą algebraicznych własności iloczynu skalarnego wyprowadzimy wzór na ten iloczyn:

$$\begin{aligned} & (a\mathbf{i} + b\mathbf{j}) \circ (c\mathbf{i} + d\mathbf{j}) = \\ = & ac\mathbf{i} \circ \mathbf{i} + ad\mathbf{i} \circ \mathbf{j} + bc\mathbf{j} \circ \mathbf{i} + bd\mathbf{j} \circ \mathbf{j} = \\ = & ac + 0 + 0 + bd. \end{aligned}$$

Równanie prostej:

$$Ax + By + C = 0.$$

Gdy $C = 0$, to jest to prosta przechodząca przez początek układu współrzędnych.

Gdy $A = 0$, to jest to prosta równoległa do osi X przecinająca oś Y w punkcie $(0, \frac{-C}{B})$.

Gdy $B = 0$, to jest to prosta równoległa do osi Y przecinająca oś X w punkcie $(\frac{-C}{A}, 0)$.

Gdy $ABC \neq 0$, to jest to prosta przechodząca przez punkt $(0, \frac{-C}{B})$ oraz $(\frac{-C}{A}, 0)$: jej równanie

$$\frac{Ax}{C} + \frac{By}{C} = -1 \quad \text{bywa zapisywane} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Wektor (A, B) jest zawsze prostopadły do dowolnego wektora leżącego na prostej $Ax + By + C = 0$ innymi słowy: prosta $Ax + By + C = 0$ jest prostopadła do wektora (A, B) .

Równanie kierunkowe prostej: Rozpatrzmy prostą nierównoległą do osi Y , tzn. prostą $-Ax + y - C = 0$. Przekształcamy jej równanie do równania

$$y = Ax + C,$$

które nazywamy *równaniem kierunkowym prostej*. Współczynnik A jest tangensem kąta nachylenia prostej do osi X : jest tangensem kąta między osią X a „naszą” prostą.

Dane są dwie proste o równaniach

$$y = m_1x + n_1 \quad \text{oraz} \quad y = m_2x + n_2.$$

Korzystając ze wzoru

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

otrzymujemy wzór na tangens kąta ϕ pomiędzy tymi prostymi

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1}.$$

Równanie wektorowe prostej:

$$(x, y) = t(\lambda, \gamma) + (a, b),$$

gdzie t to parament przebiegający liczby rzeczywiste, (x, y) to dowolny punkt prostej, (a, b) to ustalony punkt prostej, zaś (λ, γ) to wektor równoległy do prostej. Równanie to możemy zapisać w postaci układu równań liniowych

$$\begin{aligned} x &= t \lambda + a \\ y &= t \gamma + b \end{aligned}$$

Rugując parament t otrzymujemy

$$\frac{x - a}{\lambda} = \frac{y - b}{\gamma}.$$

W tej postaci wektor (λ, γ) to wektor równoległy do prostej. „Paradoksalnie” taka postać równania może wyglądać jakbyś my umieli dzielić przez zero: gdy $\lambda = 0$ lub $\gamma = 0$.

Równania drugiego stopnia: Równanie

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

przedstawia okrąg o promieniu r oraz środka w punkcie (a, b) . Nierówność

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2$$

przedstawia koło ograniczone okręgiem (Ciekawe dlaczego nie mówimy okręgiem?) o promieniu r oraz środkiem (a, b) .

Parabola: (Co to takiego sik paraboliczny?) *Parabolą* nazywamy krzywą taką, dla której odległość jej dowolnego punktu od ustalonej prostej -zwanej *kierownicą*, jest równa odległości od ustalonego punktu - zwanego *ogniskiem*. Gdy kierownica ma równanie $y = c$; jest prostą równoległą do osi Y , to równanie

$$y - c = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

przedstawia parabolę o ognisku (a, b) . Wtedy prostą $x = a$ nazywamy *osią* paraboli: jest to oś symetrii paraboli, zaś punkt $(a, \frac{b-c}{2})$ wierzchołkiem paraboli: jest to punkt paraboli należący do jej osi symetrii. Podnosimy obie strony równości: określającej parabolę, do kwadratu, rozwijamy nawiasy, redukujemy i w konsekwencji dostajemy

$$y = mx^2 + nx + p,$$

gdzie

$$m = \frac{1}{2(b-c)}, \quad n = \frac{a}{c-b} \quad \text{oraz} \quad p = \frac{a^2}{2(b-c)} + \frac{b+c}{2}.$$

Elipsa: *Elipsę* nazywamy taką krzywą, dla której suma odległości dowolnego jej punktu od dwu ustalonych punktów - zwanych *ogniskami* jest stała. Ustalmy układ współrzędnych tak, aby ogniska elipsy miały współrzędne $(c, 0)$ oraz $(-c, 0)$. Sumę odległości punktów elipsy od ognisk oznaczamy $2a$. Zatem elipsę przedstawia równanie

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a.$$

Uwalniając (Czy takie uwalnianie jest prostą operacją rachunkową?) to równanie od pierwiastków oraz podstawiając $a^2 - c^2 = b^2$ dostajemy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Punkty $(-a, 0)$, $(a, 0)$, $(0, -b)$ oraz $(0, b)$ nazywamy *wierzchołkami* elipsy; zaś odcinki od $(0, 0)$ do $(a, 0)$ oraz od $(0, 0)$ do $(0, b)$ jej *półosiami*. Co to są osie elipsy?

Hiperbola: *Hiperbolę* nazywamy taką krzywą, dla której różnica odległości dowolnego jej punktu od dwu ustalonych punktów - zwanych *ogniskami* jest stała. Ustalmy układ współrzędnych tak, aby ogniska elipsy miały współrzędne $(c, 0)$ oraz $(-c, 0)$. Różnicę odległości punktów elipsy od ognisk oznaczamy $2a$. Zatem elipsę przedstawia równanie

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a.$$

Uwalniając (Czy takie uwalnianie jest prostszą operacją rachunkową niż w przypadku elipsy?) to równanie od pierwiastków oraz podstawiając $c^2 - a^2 = b^2$ dostajemy

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Punkty $(-a, 0)$ oraz $(a, 0)$ nazywamy *wierzchołkami* hiperboli; zaś proste $y = \frac{b}{a}x$ oraz $y = -\frac{b}{a}x$ *asymptotami* hiperboli.