UKŁADY RÓWNAŃ LINIOWYCH, MACIERZE, WYZNACZNIKI

Rozważmy układ równań liniowych

$$\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Współczynniki a_{ik} oraz b_j to liczby. Szukamy układu liczb $x_1, x_2, \ldots x_n$ tak, aby wszystkie równania były spełnione: wszystkie równości były prawdziwe. Takie szukanie nazywamy rozwiązywaniem, przy którym można:
(1). *Dowolnie zamieniać kolejność wypisywania równań;*
(2). *Równanie pomnożyć stronami przez liczbę różną od zera, a następnie wynik wpisać na jego miejsce.*
(3). *Dwa równania dodać stronami do siebie, a następnie wynik wpisać na miejscu jednego z nich.*
Operacja (1) jest odwracalna, bo zmiana kolejności zapisywania to czynność mechaniczna, której odwracalnosc każdy sprawdza doświadczalnie! Gdy wykonujemy operację (2) mnożąc przez liczbę α, to mnożenie przez $\frac{1}{\alpha}$ gwarantuje odwracalność tej operacji. Równość

$$(A + B) - A = B$$

pociąga odwracalność operacji (3): wykonanie operacji odwrotnej wymaga stosowania (3) oraz (2) z mnożeniem przez -1. Pokazaliśmy, że stosowanie operacji (1), (2) oraz (3) pozwala przekształcić dowolny układ równań liniowych na układ równań liniowych o takich samych rozwiązaniach, z którego łatwo odczytać te rozwiązania.

Zapiszmy układ równań liniowych w postaci macierzy

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}$$

Jest to *macierz* współczynników o $(m) -$ *wierszach* oraz $(n + 1) -$ *kolumnach*. Współczynnik a_{ik} należy do $i-$tego wiersza oraz $k-$tej kolumny; zaś współczynnik b_j należy do $j-$tego wiersza oraz $(n + 1)-$szej kolumny: przy okazji wyjaśniliśmy jaki obiekt nazywamy *macierzą*. Gdy $a_{11} \neq 0$, to macierz współczynników przekształcamy tak, aby w pierwszej kolumnie dostać same zera za wyjątkiem a_{11}. Dokonujemy tego „umiejętnie" stosując operacje (2) oraz (3): kolejno względem k mnożymy $1-$ty wiersz przez $\frac{a_{1k}}{a_{11}}$, odejmujemy go od wiersza $k-$tego, a wynik odejmowania wpisujemy w miejsce wiersza $k-$tego. Jako wynik otrzymyjemy macierz postaci

$$\begin{array}{lllll} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & c_{m2} & \dots & c_{mn} & d_m \end{array}$$

Gdy z otrzymanej macierzy usumiemy pierwszą kolumnę oraz pierwszy wiersz, to powyższą procedurę możemy powtórzyć: jeśli w lewym górnym rogu pojawi się zero to niedogodność taka usuwamy stosując operację (1). Jeśli będziemy powtarzali tą procedurę tyle razy ile jest to możliwe, to możemy dostać wiersz, w którym współczynniki, za wyjątkiem ostatniego, są zerami: znaczy to, iż badany układ równań liniowych nie ma rozwiązań. W przeciwnym przypadku rozwiązania układu równań wyliczamy zaczynając od wiersza o największej ilości zer w początkowych kolumnach. Dla przykładu zapiszmy rozwiązanie układu równań

$$\begin{array}{rcl} x+y+z+t & = & 4 \\ x+y-z+t & = & 2 \\ x-y+z+t & = & 2 \\ x-y-z+t & = & 0. \end{array}$$

Potraktujmy sposób zapisywania rozwiązania jako ćwiczenie w posługiwaniu się pismem. Czy klarowne zapisanie rozwiązania to demostracja umiejętności pisania?

$$\begin{array}{rrrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -4 \end{array}$$

Odczytujemy rozwiązanie: z drugiego wiersza mamy $z = 1$; z trzeciego wiersza $y = 1$; po wstawieniu części znanych rozwiązań do pierwszego wiersza dostajemy $x = -t$.

Znane są znane metody rozwiązywania układu równań liniowych, w których użyteczne bywają wyznaczniki. *Wyznacznik* to liczba przyporządkowana macierzy kwadratowej: macierz nazywamy kwadratową gdy ma tyle samo wierszy co kolumn,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

według następujących wzorów:

$$det([a]) = a \qquad \text{oraz} \qquad det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} det(A_{ij}),$$

gdzie A_{ij} to macierz powstała z macierzy A przez skreślenie $i-$tego wiersza oraz $j-$tej kolumny. Wzór określajacy wyznacznik wymyślił Pierre Simon Laplace (1749 – 1827). W literaturze wyznacznik bywa definiowany również tak:

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} det(A_{ij}).$$

Dowodzi się, że wybór wiersza: $i-$tego w pierwszej definicji, lub kolumny: $j-$tej w drugiej definicji, nie ma wpływu na wartość wyznacznika. Przykłady:

$$det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\right) = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot 3 + (-1)^{2+1} \cdot 2 \cdot 1 = 3 - 2 = 1;$$

$$det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}\right) = (-1)^2 \cdot det\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}\right) + (-1)^3 \cdot 2 \cdot det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}\right) = -2 + 8 = 6.$$

Jeśli w macierzy A skreślimy kilka wierszy bądź kolumn tak, aby nieskreślone współczynniki utworzyły macierz kwadratową M o niezerowym wyznaczniku, to macierz M nazywamy *minorem*. Mówimy, że macierz A jest *rzędu n* gdy posiada ona minor o $n-$wierszach (oraz $n-$kolumnach) oraz nie posiada minora o większej ilości wierszy.

Twierdzenie. *Układ równań liniowych*

$$\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

ma rozwiązanie gdy rządy macierzy rozszerzonej

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$$

oraz macierzy podstawowej

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

są równe. □

Wzory Cramera (dotyczą układu równań liniowych gdy $n = m$):

$$x_k = \frac{det(M_k)}{det(A)},$$

gdzie A to macierz podstawowa układu oraz $det(A) \neq 0$, zaś M_k to macierz powstała z A gdy w miejsce $k-$tej kolumny wpiszemy kolumnę ostatnią z macierzy rozszerzone: wpiszemy kolumnę współczynników b_j. Przykład: $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 6. \end{cases}$ Wtedy $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$; $det(A) = -2$; $M_1 = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$; $det(M_1) = -11$; $M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$; $det(M_2) = 1$. Na koniec otrzymujemy

$$x = \frac{11}{12} \qquad \text{oraz} \qquad y - \frac{-1}{2}.$$

Fakty o wyznacznikach, które przy pomocy indukcji zupełnej można wyprowadzić z definicji Laplace'a:

Jeśli w macierzy kwadratowej wiersz (kolumna) składa się z samych zer, to jej wyznacznik wynosi zero.

Jeśli w macierzy kwadratowej dwa wiersze (kolumny) są takie same, to jej wyznacznik wynosi zero.

Jeśli w macierzy kwadratowej zamienimy dwa wiersze (kolumny), to wyznaczniki obu macierzy różnią się znakiem.

Jeśli w macierzy kwadratowej do współczynnikow w jednym wierszu (kolumnie) dodamy odpowiadające im współczynniki innego wiersza (kolumny), to wyznaczniki obu macierzy są równe.

Jeśli w macierzy kwadratowej do współczynnikow w jednym wierszu (kolumnie) dodamy odpowiadające im współczynniki innego wiersza (kolumny) pomnożone przez ustaloną liczbę, to wyznaczniki obu macierzy są równe.