LICZBY, RÓWNANIA, NIERÓWNOŚCI; DOWÓD INDUKCYJNY

Zgodnie z dążeniami filozofii pitagorejskiej matematyzacja abstrakcyjnego myślenia powinna być dokonywana przy pomocy liczb. Skoro tak, to liczby należy tworzyć w miarę potrzeb! Zwyczajowo rozważa się następujące rodzaje liczb: *liczby naturalne, liczby całkowite, liczby wymierne, liczby algebraiczne, liczby rzeczywiste, liczby zespolone*. Liczby to elementy wspólnego (dla wszelkich istot rozumnych) abstrakcyjnego myślenia. Początkowe mało ważnym jest czym są (lub mogłyby być) elementy abstrakcyjnego myślenia. Powinno wystarczać gdy takowe elementy zostaną określone, czyli zostaną określone właściwosci liczb. Skoro liczby możemy tworzyć w miarę potrzeb, to lista wszystkich właściwości liczb powinna (!?!) być listą wzajemnie wykluczających się własności. Stąd każdy pomyślany rodzaj liczb będzie spełniał jedynie niektóre własności z takiej listy. Spiszmy fragment listy wszystkich właściwosci liczb.

Dodawanie i mnożenie:

$$x + y = y + x; \qquad xy = yx \qquad \text{(przemieność)}.$$

$$x + (y + z) = (x + y) + z; \qquad (xy)z = x(yz) \qquad \text{(łączność)}.$$

$$x(y + z) = xy + xz \qquad \text{(rozdzielność dodawania względem mnożenia)}.$$

Dwie różne liczby 0 oraz 1 zawsze spełniają równości

$$x + 0 = x \qquad \text{oraz} \qquad x \cdot 1 = x.$$

Zawsze jednoznacznie wykonywalne jest *odejmowanie*, tzn. równanie

$$a + x = b$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie gdy liczby a oraz b są ustalone innymi słowy: istnieje dokładnie jedna liczba x taka, że $x = a - b$.
Zawsze jednoznacznie wykonywalne jest *dzielenie* przez liczby różne od zera, tzn. równanie

$$a \cdot x = b$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie gdy ustalimy liczby a oraz b tak, aby $a \neq 0$ innymi słowy: istnieje dokładnie jedna liczba $x = \frac{b}{a}$.

Uporządkowanie: Dowolne dwie różne liczby x oraz y są związane relacją mniejszości $x < y$ lub $y < x$. Przy czym:
$x < y$ oraz $y < z$ zawsze pociąga $x < z$;
Jeśli $x < y$, to nie zachodzi $y < x$;
Jeśli $x < z$, to zawsze (dla dowolnej liczby y) zachodzi $x + y < z + y$;
Gdy $0 < y$ oraz $x < z$, to zachodzi $xy < zy$.

Gdy $x < y$ to mówimy, że x jest *mniejsze niż* y: czasami piszemy $y > x$ oraz mówimy y jest *większe niż* x; zaś gdy $x < y$ lub $x = y$, to piszemy $x \leq y$ (wtedy mówimy: x jest *niewiększe niż* y) albo $y \geq x$ (wtedy mówimy: y jest *niemniejsze niż* x).

Zasada ciągłości: *Jeśli wszystkie liczby podzielimy na dwa rozłączne i niepuste zbiory A oraz B tak, aby zawsze $x \in A$ oraz $y \in B$ pociągało $x < y$, to do zbioru A należy liczba największa w zbiorze A lub do zbioru B należy liczba najmniejsza w zbiorze B.*

Wyjaśnijmy, że liczba x jest *największa w zbiorze* A gdy dowolna liczba $y \in A$ jest niewiększa niż x. Zaś liczba x jest *najmniejsza w zbiorze* B gdy dowolna liczba $y \in B$ jest niemniejsza niż x.

Zasada ciągłości wykorzystuje teorię zbiorów „dwa rozłączne i niepuste zbiory" każdy może budować według innych - przez siebie uznawanych za stosowe, praw teorii zbiorów. Skoro tak, to początkowo warto pominąć dociekania czym konkretnym są liczby. Powinno wystarczać omówienie własnosci liczb, które zaistnieją w myślach dowolnego dociekliwego ich badacza.

Liczby naturalne: najmniejszy zbiór liczb zamknięty ze wzglęgu na działania dodawania oraz mnożenia lecz taki, że nie udaje się określić na nim działań odwrotnych do dodawania lub mnożenia, czyli odejmowania oraz mnożenia.

Liczby całkowite: najmniejszy zbiór liczb zamknięty ze wzglęgu na działania dodawania, odejmowania oraz mnożenia lecz taki, że nie udaje się określić na nim działania dzielenia przez liczby różne od zera.

Liczby wymierne: najmniejszy zbiór liczb zamknięty ze wzglęgu na działania dodawania, odejmowania, mnożenia oraz dzielenia przez liczby różne od zera.

Liczby algebraiczne: najmniejszy zbiór liczb zawierający pierwiastki wielomianów o współczynnikach wymiernych.

Liczby rzeczywiste: zbiór liczb zawierający liczby wymierne oraz spełniający zasadę ciągłości.

Liczby zespolone: najmniejszy zbiór liczb zawierający liczby rzeczywiste oraz wszystkie pierwiastki wielomianów o współczynnikach rzeczywistych.

Potęgowamie liczb: Gdy $n > 0$ jest liczbą naturalną zaś x liczbą różną od zera, to kładziemy $x^1 = x$ oraz $x^n = x^{n-1}x$ innymi słowy: $x^n = x \cdot x \cdot \ldots \cdot x$, gdzie z prawej strony równości liczba x jest mnożona n-razy przez siebie;

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n};$$

rozwiązania równania $x^n = a$ oznaczamy $a^{\frac{1}{n}}$ lub $\sqrt[n]{a}$ (w liczbach rzeczywistych rozwiązanie nie zawsze musi istnieć: gdy n jest liczbą nieparzystą, to zawsze istnieje jedno rozwiązanie; zaś gdy $n > 0$ jest liczbą parzystą oraz $a > 0$, to istnieją dwa rozwiązania);

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}.$$

Potęgowanie liczb zostało określone dla wykładników wymiernych. Gdy weźmiemy liczbę rzeczywistą $a > 0$ oraz liczbę rzeczywistą b, to przez a^b oznaczamy największą liczbę należącą do zbioru

$$\{a^q : q < b \text{ oraz } q \text{ jest liczbą wymierną}\}$$

lub najmniejszą liczbę nie należącą do tego zbioru: liczby wymierne to wszystkie liczby przedstawialne w postaci $\frac{n}{m}$, gdzie n przebiega liczby naturalne, zaś m przebiega liczby całkowite różne od zera. W powyższej definicji zasada ciągłości gwarantuje istnienie liczby rzeczywistej a^b!

Zachodzi:

$$a^b \cdot a^c = a^{b+c};$$

$$a^{-b} = \frac{1}{a^b};$$

$$(a^b)^c = a^{bc};$$

$$a^0 = 1, \text{ o ile } a \neq 0 .$$

Czy symbol 0^0 wyznacza liczbę?

Logarytmowanie liczb dodatnich: Gdy $1 \neq a > 0$ oraz $b > 0$, to równanie $a^x = b$ ma dokładnie jedno rozwiazanie w liczbach rzeczywistych. Rozwiazanie to nazywamy *logarytmem liczby b przy podstawie a* innymi słowy: $x = \log_a b$. Zachodzi:

$$a^{\log_a b} = b;$$

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c;$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c;$$

$$\log_a b^c = c \cdot \log_a b.$$

Wartość bezwględna (moduł liczby):

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{gdy } x \geq 0; \\ -x, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Mamy

$$\begin{aligned} |a| &= |-a|; \\ |ab| &= |a| \cdot |b|; \\ a &\leq |a|; \\ |a+b| &\leq |a| + |b|; \\ |a| - |b| &\leq |a-b|. \end{aligned}$$

Dwumian Newtona: Kładziemy

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$$

oraz, gdy $0 \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}.$$

Symbol Newtona $\binom{n}{k}$ został dobrze określony dla liczb naturalnych k oraz n takich, że $0 \leq k \leq n$. Zachodzi

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}:$$

co sprawdzamy następująco

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (k-1)} \cdot \frac{k}{k}$$

$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}(n-k+1+k) = \binom{n+1}{k}$$

Mamy także

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \ldots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \ldots + \binom{n}{n} b^n,$$

w szczególności

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}.$$

Twierdzenie. *Dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y oraz każdej liczby naturalnej $n > 0$ zachodzi*

$$\sqrt[n]{|x-y|} \geq \sqrt[n]{|x|} - \sqrt[n]{|y|}.$$

Uzasadnienie innymi słowy: dowód. Skoro lewa strona nierówności jest stale dodatnia to przyjmijmy, że $|x| = a > |y| = b > 0$ oraz pomyślmy sobie, że twierdzenie jest fałszywe w jakimś szczególnym przypadku czyli zachodzi

$$\sqrt[n]{a-b} + \sqrt[n]{b} < \sqrt[n]{a}.$$

Podnosimy tak pomyślaną nierówność stronami do $n-$tej potęgi. Według wzoru na dwumian Newtona dostaniemy

$$a - b + \sum(\ldots) + b < a:$$

otrzymamy absurd, gdyż suma liczb dodatnich $\sum(\ldots)$ zawsze bywa większa niż zero. $\square$

Indukcja zupełna: Niech $\phi(k)$ będzie zdaniem orzekającym o jakiejś właściwości liczby naturalnej k.

Aksjomat. *Jeśli zdanie $\phi(0)$ jest prawdziwe oraz z założenia prawdziwości zdania $\phi(n)$ wynika prawdziwość zdania $\phi(n+1)$, to zdanie $\phi(k)$ jest zawsze prawdziwe.*

Nierówność $a \leq -1$ pociąga $1 + na \leq (1+a)^n$. Gdy $n = 0$, to mamy $1 = 1 + 0a \leq (1+a)^0 = 1$. Gdy założymy $1 + na \leq (1+a)^n$, to - mnożąc taką nierówność stronami przez liczbę dodatnią $1 + a$, dostajemy

$$1 + (n+1)a < 1 + (1+n)a + a^2 = (1+na)(1+a) \leq (1+a)^{n+1}.$$

. Gdy $x \neq 0$, to zachodzi

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin \frac{2n+1}{2}x}{2 \sin \frac{x}{2}}.$$

Dla $n = 0$ mamy

$$\frac{1}{2} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}}.$$

Skoro - ze wzoru na różnicę simusów, zachodzi

$$\sin \frac{2n+3}{2}x - \sin \frac{2n+1}{2}x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos(n+1)x,$$

to możemy wyliczyć, że

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx+\cos(n+1)x=$$

$$=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}+\cos(n+1)x=$$

$$=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x+2\sin\frac{x}{2}\cos(n+1)x}{2\sin\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x+\sin\frac{2n+3}{2}x-\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{2n+3}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Rozważmy nierówność

$$\left|\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}\right|<1;$$

$$\left|\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-5)}\right|<1;$$

$$\left|\frac{x-3}{x-5}\right|<1;$$

$$(x-3)^2<(x-5)^2;$$

$$x<4.$$

Gdy rozważamy nierówność

$$\left|\frac{x^2-8x+16}{x^2+6x+5}\right|<1,$$

to wpierw zbadajmy równości

$$\begin{array}{rclcrcl}
x^2-8x+15 & = & x^2+6x+5 & \text{oraz} & x^2-8x+15 & = & -x^2-6x-5; \\
x & = & 14x & & x^2+x+10 & = & 0; \\
x & = & \frac{5}{7} & & \text{brak} & & \text{rozwiązań.}
\end{array}$$

Skoro wyrażenie z lewej strony nierówności jako funkcja ma wykres będący linią dotykającą nieskończoność - dowolnie wysoką, w punktach -5 oraz -1, to nierówność ta ma rozwiązania $x>\frac{5}{7}$: dla $x-$sów dowolnie wielkich lewa strona przybliża się do 1, ale licznik jest stale mniejszy od mianownika z powodu minusa przed $8x$.