8. Odwzorowania domknięte.

Jeśli X oraz Y są przestrzeniami topologicznymi, to funkcja ciągła określona na X przyjmująca wartości w Y taka, że obraz dowolnego podzbioru domkniętego jest zbiorem domkniętym będzie nazywana *odwzorowaniem domkniętym*. Dowolna funkcja ciągła określona na przestrzeni zwartej Hausdorffa przyjmująca wartości w przestrzeni zwartej Hausdorffa jest odwzorowaniem domkniętym. Wtedy zbiory domknięte są zwarte, obraz zbioru zwartego jest zwarty oraz zbiory zwarte są domknięte. O dowolnej funkcji omawianej w tym rozdziale będziemy zakładali, o ile nie odnotujemy inaczej, że jest funkcją rzeczywistą określoną na podzbiorze liczb rzeczywistych. W tym rozdziale będziemy posługiwali się ciągową definicją ciągłości, tzn. funkcja f jest ciągła gdy dla dowolnego ciągu $x_0, x_1, \ldots$ zbieżnego do punktu y ciąg $f(x_0), f(x_1), \ldots$ jest zbieżny do $f(y)$. Oczywiście w zakresie funkcji rzeczywistych określonych na podzbiorach liczb rzeczywistych jest ona równoważna definicji mówiącej, że funkcja jest ciągła gdy przeciwobraz dowolnego zbioru otwartego jest otwarty.

Lemat 8.1. *Ciągła funkcja rzeczywista f jest odwzorowaniem domkniętym gdy zachodzi implikacja: Jeśli liczba b należy do przeciwdziedziny funkcji f, dla prawie wszystkich n zachodzi $b \neq f(x_n)$ oraz ciąg $f(x_0), f(x_1), \ldots$ jest zbieżny do b, to ciąg $x_0, x_1, \ldots$ ma punkt skupienia w przeciwobrazie $f^{-1}(b)$.*

Dowód. Załóżmy, że f jest odwzorowaniem domkniętym, liczba b należy do przeciwdziedziny funkcji f, dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi $b \neq f(x_n)$ oraz ciąg $f(x_0), f(x_1), \ldots$ jest zbieżny do b. Wtedy ciąg $x_0, x_1, \ldots$ ma punkt skupienia. Gdyby tak nie było, to zbiór $\{x_0, x_1, \ldots\}$ byłby domknięty oraz jego obraz przez funkcję f byłby domknięty w przeciwdziedzinie tej funkcji. Wtedy liczba b nie należałaby do domknięcia tego obrazu, co wykluczyliśmy.

Jeśli punkt p jest punktem skupienia ciągu $x_0, x_1, \ldots$, to stosowny podciąg tego ciągu, np. dla indeksów należących do zbioru nieskończonego L, jest zbieżny do punktu p. Skoro f jest funkcją ciągłą, to

$$b = f(p) = \lim_{n \in L} f(x_n).$$

Stąd $p \in f^{-1}(b)$.

Bierzemy podzbiór domknięty D zawarty w dziedzinie funkcji f oraz zakładamy, dla dowodu niewprost, że obraz $f(D)$ nie jest domknięty w przeciwdziedzinie tej funkcji. Wybieramy punkt b należący do przeciwdziedziny funkcji f, należący do domknięcia obrazu $f(D)$ oraz nie należący do obrazu $f(D)$. Wybieramy z obrazu $f(D)$ ciąg punktów $y_0, y_1, \ldots$ zbieżny do punktu b. Dla dowolnej liczby naturalnej n wybieramy punkt $x_n \in f^{-1}(y_n) \cap D$. Ciąg $x_0, x_1, \ldots$

ma punkt skupienia $p \in f^{-1}(b)$. Zbiór D jest domknięty oraz punkty $x_0, x_1, \ldots$ należą do D, a więc $p \in D$. Skoro funkcja f jest ciągła, to $b = f(p) \in f(D)$. Mamy sprzeczność wystarczającą dla zakończenia dowodu

Lemat 8.2. *Niech f oraz g będą odwzorowaniami domkniętymi. Pierwsze określone na zbiorze A, drugie na zbiorze B. Przypuśćmy, że zbiór D jest zawarty w przekroju $A \cap B$ oraz po domknięciu zawiera sumę $A \cup B$. Jeśli dla dowolnego punktu $x \in D$ zachodzi $f(x) = g(x)$, to dla dowolnego punktu t należącego do przekroju przeciwdziedzin funkcji f oraz g zachodzi $f^{-1}(t) = g^{-1}(t)$, o ile $f^{-1}(t)$ ma puste wnętrze relatywnie domknięcia zbioru D.*

Dowód. Bierzemy liczbę $t \in f(A) \cap g(B)$ taką, że przeciwobraz $f^{-1}(t)$ ma puste wnętrze relatywnie domknięcia zbioru D. Przypuśmy, dla dowodu niewprost, że $b \in g^{-1}(t) \setminus f^{-1}(t)$. Wybieramy ciąg $x_0, x_1, \ldots$ zbieżny do b złożony z liczb należących do różnicy $D \setminus f^{-1}(t)$. Skoro f jest funkcją ciągłą, to liczba b nie należy do dziedziny funkcji f. Zbiór $\{x_0, x_1, \ldots\}$ jest domknięty w tej dziedzinie oraz jego obraz przez f jest domknięty w $f(A)$. Skoro g jest funkcją ciągłą, to ciąg $g(x_0), g(x_1), \ldots$ jest zbieżny do $g(b) = t$. Dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi $t \neq f(x_n) = g(x_n)$ oraz $t \in f(A)$. Korzystamy z poprzedniego lematu i wnioskujemy, że ciąg $\{x_0, x_1, \ldots\}$ ma punkt skupienia w $f^{-1}(t)$, co wykluczyliśmy. Jest to sprzeczność pociągająca zawieranie $g^{-1}(t) \subseteq f^{-1}(t)$. Inkluzję odwrotną uzasadniamy tak samo z tym, że zamieniamy rolami funkcje f oraz g

Niech X oraz Y będą przestrzeniami topologicznymi, zaś f funkcją określoną na podzbiorze $D \subseteq X$ przyjmującą wartości w przestrzeni Y. Będziemy mówili, że funkcja h określona na zbiorze zawartym w domknięciu zbioru D przyjmująca wartości w przestrzeni Y jest *XY-rozszerzeniem* funkcji f jeśli dla dowolnego punktu $t \in f(D)$ przeciwobrazy $f^{-1}(t)$ i $h^{-1}(t)$ są równe. Jeśli $XY-$roszerzenie funkcji jest odwzorowaniem domkniętym, to będziemy je nazywali *XY-rozszerzeniem domkniętym.*

Lemat 8.3. *Jeśli X oraz Y są podzbiorami liczb rzeczywistych, D podzbiorem gęstym w X oraz f odwzorowaniem domkniętym określonym na D przyjmującym wartości w Y, to istnieje maksymalne XY-roszerzenie domknięte funkcji f.*

Dowód. Kładziemy $F(x) = f(x)$ dla dowolnego punktu $x \in D$. Jeśli h jest XY-rozszerzeniem domkniętym funkcji f, to dla dowolnego punktu $x \in h^{-1}(t)$, gdzie t nie należy do przeciwdziedziny funkcji f, kładziemy $F(x) = h(x)$. Wobec poprzedniego lematu funkcja F jest dobrze określona.

Przypuśćmy, dla dowodu niewprost, że funkcja F nie jest ciągła. Wybieramy ciąg $x_0, x_1, \ldots$ zbieżny do liczby b tak, aby liczby $F(x_0), F(x_1), \ldots$ nie należały do domknięcia otoczenia otwartego W liczby $F(b)$. Dla dowolnej liczby naturalnej

n dobieramy XY-rozszerzenie domknięte h_n funkcji f tak, aby x_n należało do jego dziedziny. Korzystamy z ciągłości funkcji h_n i wybieramy ciąg $x_{n,0}, x_{n,1}, \ldots$ zbieżny do x_n złożony z liczb należących do D takich, że liczby $f(x_{n,0}), f(x_{n,1}), \ldots$ nie należą do domknięcia zbioru W. Bierzemy XY-rozszerzenie domknięte h funkcji f takie, że b należy do jego dziedziny. Następnie spośród liczb $x_{n,k}$ wybieramy ciąg $y_0, y_1, \ldots$ zbieżny do b. Otrzymujemy sprzeczność z ciągłością funkcji h, gdyż liczby $h(y_n) = f(y_n)$ nie należą do domknięcia zbioru W i ciąg $h(y_0), h(y_1), \ldots$ nie może być zbieżny do $h(b) = F(b)$.

Przypuśćmy, że liczba b należy do przeciwdziedziny funkcji F, dla dowolnej liczby naturalnej n liczba b jest różna od $F(x_n)$ oraz ciąg $F(x_0), F(x_1), \ldots$ jest zbieżny do b. Załóżmy, dla dowodu niewprost, że ciąg $x_0, x_1, \ldots$ nie ma punktu skupienia w dziedzinie funkcji F; dowolny punkt skupnienia ciągu $x_0, x_1, \ldots$ należący do dziedziny funkcji F należy do $F^{-1}(b)$, bo funkcja F jest ciągła a taka sytuacja nie przeczy domkniętości funkcji F. Zbiory $F^{-1}(b)$ oraz $\{x_0, x_1, \ldots\}$ są domknięte w dziedzinie funkcji F. Są one rozłączne, a więc istnieje otwarte otoczenie V zbioru $F^{-1}(b)$, które po domknięciu nie zawiera żadnego punktu x_n. Bierzemy XY-rozszerzenie domknięte h_n funkcji f takie, że liczba x_n należy do dziedziny funkcji h_n. Korzystamy z ciągłości h_n i wybieramy ciąg $y_{n,0}, y_{n,1}, \ldots$ zbieżny do x_n złożony z liczb należących do D oraz nie należących do domknięcia zbioru V. Wybieramy ciąg $q_0, q_1, \ldots$ zbieżny do b oraz złożony z liczb postaci $f(y_{n,k})$. Dla dowolnej liczby naturalnej n wybieramy spośród liczb $y_{n,k}$ liczbę $p_n \in f^{-1}(q_n)$. Bierzemy XY-rozszerzenie domknięte h funkcji f takie, że liczba b należy do przeciwdziedziny funkcji h. Korzystamy z lematu 8.1 i wnioskujemy, że ciąg $p_0, p_1, \ldots$ ma punkt skupienia w przeciwobrazie $h^{-1}(b) = F^{-1}(b)$, co jest niemożliwe gdyż liczby p_n nie należały do domknięcia zbioru V. Mamy sprzeczność pociągającą, że F jest odwzorowaniem domkniętym

O zbiorze równolicznym ze zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych będziemy mówili, że jest *mocy continuum*. Zbiór Cantora 2^ω jest mocy continuum. Produkt kartezjański $(2^\omega)^\omega$ można przedstawić w formie $2^{\omega\times\omega}$ oraz zbiór $2^{\omega\times\omega}$ jest równoliczny ze zbiorem 2^ω, a więc rodzina wszystkich ciągów przyjmujących wartości rzeczywiste jest mocy continuum. Liczbę porządkową, która nie jest równoliczna z liczbą porządkową mniejszą będziemy nazywali *liczbą kardynalną*. Gdy będziemy mówili o mocach zbiorów zakładamy, że są one dobrze uporządkowane, tzn. dowolny zbiór jest równoliczny z jakąś liczbą kardynalną. Liczbę kardynalną równoliczną z rodziną wszystkich podzbiorów liczby kardynalnej λ będziemy oznaczali przez 2^λ. Liczbę kardynalną równoliczną z rodziną wszystkich podzbiorów liczb rzeczywistych będziemy oznaczali przez 2^c. Najmniejszą liczbę kardynalną większą od continuum będziemy oznaczali c^+. Jeśli X jest zbiorem, to liczbę kardynalną równoliczną ze zbiorem X będziemy oznaczali przez $|X|$. Najmniejszą nieskończoną liczbę kardynalną będziemy oznaczali przez ω.

Będziemy korzystali z faktu, że jeśli λ jest nieskończoną liczbą kardynalną, to produkt kartezjański $\lambda \times \lambda$ jest równoliczny z λ. Aby się o tym przekonać wprowadzamy na zbiorze wszystkich par liczb porządkowych należących do λ relację określoną następująco.

$$(\alpha, \beta) \quad (\gamma, \xi) \text{ gdy zachodzi jeden z trzech warunków:}$$

(a) $\max(\alpha, \beta) < \max(\gamma, \xi)$,
(b) $\max(\alpha, \beta) = \max(\gamma, \xi)$ oraz $\alpha < \gamma$,
(b) $\max(\alpha, \beta) = \max(\gamma, \xi)$ oraz $\alpha = \gamma$ oraz $\beta < \xi$.

Relacja dobrze porządkuje produkt kartezjański $\lambda \times \lambda$. Przypuśćmy, dla dowodu niewprost, że liczba kardynalna $\tau < \lambda$ jest najmniejszą nieskończoną liczbą kardynalną, która nie jest porządkowo izomorficzna z $\lambda \times \lambda$. Wtedy liczba kardynalna τ jest nieprzeliczalna oraz istnieje para liczb porządkowych (α, β) mniejszych od τ taka, że liczba porządkowa τ jest porządkowo izomorficzna ze zbiorem par liczb porządkowych mniejszych w sensie od pary (α, β). Mamy sprzeczność, gdyż ostatni zbiór jest równoliczny z podzbiorem produktu kartezjańskiego $\max(\alpha, \beta) \times \max(\alpha, \beta)$, który jest mocy mniejszy od τ na podstawie założenia indukcyjnego .

Lemat 8.4. *Niech X oraz Y będą podzbiorami liczb rzeczywistych. Istnieje rodzina S mocy nie większej od continuum złożona z odwzorowań domkniętych określonych na podzbiorach zbioru X oraz przyjmująca wartości w Y taka, że jeśli $D \subseteq X$ oraz h jest odwzorowaniem domkniętym określonym na D przyjmującym wartości w Y, to istnieje odwzorowanie $f \in S$ oraz zbiór przeliczalny $E \subseteq h(D)$ taki, że dla dowolnej liczby $t \in h(D) \setminus E$ zachodzi równość $f^{-1}(t) = h^{-1}(t)$.*

Dowód. Przypuśćmy, że $P \subseteq X$ jest przeliczalnym podzbiorem oraz f funkcją określoną na P przyjmującą wartości w Y. Jeśli istnieje odwzorowanie domknięte o dziedzinie zawartej w domknięciu zbioru P, zawierające P oraz przyjmujące wartości w Y, które po obcięciu do P jest funkcją f, to wybieramy jedno takie odwzorowanie. Następnie korzystamy z poprzedniego lematu, bierzemy maksymalne XY-rozszerzenie domknięte tego odwzorowania i oznaczamy je przez F. Niech S będzie rodziną wszystkich wyżej określonych funkcji F. Rodzina S jest mocy nie większej od continuum, gdyż jest równoliczna z podrodziną rodziny wszystkich ciągów o wartościach rzeczywistych.

Przupyśćmy, że mamy odwzorowanie domknięte określone na nieprzeliczalnym podzbiorze $D \subseteq X$ przyjmuje wartości w Y. Bierzemy jego obcięcie f do podzbioru $P \subset D$ przeliczalnego i gęstego w D. Następnie dobieramy funkcję $F \in S$ określoną wyżej. Potem kładziemy $E = f(P)$. Korzystamy z lematu 8.2 i sprawdzamy, że funkcja F jest taka, jakiej potrzebujemy

Jeśli przestrzeń X jest obrazem homeomorficznym podprzestrzeni przestrzeni Y, to będziemy mówili, że *typ wymiaru* przestrzeni X jest nie większy od typu wymiaru przestrzeni Y. Symbolicznie będziemy to zapisywali $d(X)$ $d(Y)$. Jeśli zachodzi $d(X)$ $d(Y)$ oraz nie zachodzi $d(Y)$ $d(X)$, to będziemy pisali $d(X) < d(Y)$ oraz mówili, że typ wymiaru przestrzeni X jest mniejszy od typu wymiaru przestrzeni Y.

Jeśli przestrzeń X jest obrazem podprzestrzeni przestrzeni Y przez odwzorowanie domknięte, to będziemy mówili, że *klasa wymiaru* przestrzeni X jest nie większa od klasy wymiaru przestrzeni Y. Symbolicznie będziemy to zapisywali $c(X)$ $c(Y)$. Jeśli zachodzi $c(X)$ $c(Y)$ oraz nie zachodzi $c(Y)$ $c(X)$, to będziemy pisali $c(X) < c(Y)$ oraz mówili, że klasa wymiaru przestrzeni X jest mniejsza od klasy wymiaru przestrzeni Y.

Dowolny homeomorfizm jest odwzorowaniem domkniętym, a więc nierówność $d(X)$ $d(Y)$ pociąga nierówność $c(X)$ $c(Y)$. Implikacja odwrotna nie jest prawdziwa. Przykładowo zbiór Cantora jest homeomorficzny z podzbiorem odcinka $[0,1]$, a więc $d(2^\omega)$ $d([0,1])$. Jedynymi podzbiorami spójnymi zbioru Cantora są pojedyncze punkty i zbiór pusty. Dowolny odcinek jest spójny, a więc mamy $d(2^\omega) < d([0,1])$. Odcinek $[0,1]$ jest obrazem ciągłym zbioru Cantora. Obie przestrzenie są zwarte, a więc $c([0,1])$ $c(2^\omega)$.

Jeśli dla przestrzeni X oraz Y nie zachodzi żadna z nierówności $d(X)$ $d(Y)$ lub $d(Y)$ $d(X)$, to będziemy mówili, iż mają *nieporównywalne typy wymiaru*, zaś gdy nie zachodzi żadna z nierówności $c(X)$ $c(Y)$ lub $c(Y)$ $c(X)$, to będziemy mówili, iż mają *nieporównywalne klasy wymiaru*.

Podstawowe rezultaty teorii typów wymiaru zastały udowodnione w latach dwudziestych i trzydziestych XX wieku przez matematyków polskich, takich jak S. Banach, K. Kuratowski oraz W. Sierpiński. Prezentowana tutaj teoria klas wymiaru jest adaptacją rezultatów dotyczących typów wymiaru.

Lemat 8.5 (K. Kuratowski). *Niech λ będzie nieskończoną liczbą kardynalną. Jeśli S jest rodziną mocy nie większej od λ złożoną z funkcji określonych na podzbiorach liczby kardynalnej λ przyjmujących wartości na podzbiorach liczby kardynalnej λ mocy λ, to istnieje rodzina mocy 2^λ podzbiorów liczby kardynalnej λ taka, że dla dowolnych dwu elementów Y i Z z tej rodziny oraz dowolnej funkcji $f \in S$ różnica $f(Z) \setminus Y$ jest mocy λ.*

Dowód. Ustawiamy w ciąg pozaskończony $f_0, f_1, \ldots, f_\alpha, \ldots$ długości λ funkcje z rodziny S, tak aby dowolna funkcja należąca do S występowała w tym ciągu λ razy. Jest to możliwe, gdyż dowolna nieskończona liczba kardynalna jest równoliczna z dwukrotnym swoim produktem kartezjańskim. Dla dowolnej funkcji $f \in S$ oraz dowolnego punktu y należącego do przeciwdziedziny funkcji f wybieramy punkt x należący do przeciwobrazu $f^{-1}(y)$. Jeśli funkcja f jest równa f_α, to oznaczamy przez A_α zbiór wszystkich punktów wybranych jak x powyżej. Dowolny zbiór A_α jest mocy λ, gdyż przeciwdziedzina dowolnej funkcji z S jest mocy λ. Dla dowolnej liczby porządkowej $\alpha < \lambda$ oznaczamy przez g_α obcięcie funkcji f_α do zbioru A_α, a więc funkcja g_α jest różnowartościowa oraz w ciągu pozaskończonym $g_0, g_1, \ldots, g_\alpha, \ldots$ długości λ, funkcja g_α występuje λ razy.

Wybieramy punkt $p_0 \in A_0$. Następnie zakładamy, że określiliśmy punkty $p_\beta \in A_\beta$ dla liczb porządkowych $\beta < \alpha$. Wtedy wybieramy punkt $p_\alpha \in A_\alpha$ różny od punktów p_β, $g_\alpha(p_\beta)$, $g_\alpha^{-1}(p_\beta)$, $g_\beta^{-1}(p_\gamma)$ oraz $g_\beta(p_\gamma)$, gdzie $\beta < \alpha$ oraz $\gamma < \alpha$. Zbiór wszystkich punktów p_α oznaczamy przez P. Jest to zbiór mocy λ. Dowolny zbiór A_α był użyty λ razy w powyższej indukcji, a więc dowolny przekrój $P \cap A_\alpha$ jest mocy λ. Ustawiamy w ciąg pozaskończony $B_0, B_1, \ldots, B_\alpha, \ldots$ długości λ wszystkie przekroje $P \cap A_\alpha$ tak, aby każdy przekrój występował w tym ciągu λ razy. Z każdego zbioru B_α wybieramy, indukcyjnie, dwa rozłączne zbiory $\{s_\beta : \beta < \alpha\}$ oraz $\{t_\beta : \beta < \alpha\}$ złożone z punktów, które nie zostały wybrane wcześniej. Dla dowolnej liczby porządkowej $\beta < \lambda$ niech zbiór C_β będzie zbiorem wszystkich punktów s_β, zaś zbiór D_β zbiorem wszystkich punktów t_β. Zbiory C_β oraz D_β są rozłączne i każdy z nich zawiera λ elementów należących do dowolnego przekroju $P \cap A_\alpha$.

Jeśli X jest podzbiorem λ, to kładziemy

$$R(X) = \cup\{C_\beta : \beta \in X\} \cup \cup\{D_\gamma : \gamma \in \lambda \setminus X\}.$$

Rodzina wszystkich zbiorów $R(X)$ jest taka, jakiej potrzebujemy. Jest równoliczna z rodziną wszystkich podzbiorów liczby kardynalnej λ, a więc jest mocy 2^λ. Jeśli X oraz Y są podzbiorami liczby kardynalnej λ oraz $f \in S$, to bierzemy funkcję g_α taką, że obcięcie f do zbioru A_α jest funkcją g_α. Wtedy dla $\beta \in X \setminus Y$ mamy

$$C_\beta \subseteq R(X) \setminus R(Y) \text{ oraz } D_\beta \subseteq R(Y) \setminus R(X).$$

Zbiór $P \cap C_\beta \cap A_\alpha$ jest mocy λ. Jeśli $\alpha < \gamma$, to $g_\alpha(p_\gamma) = p_\gamma$ lub $g_\alpha(p_\gamma)$ nie należy do zbioru P. Gdyby $g_\alpha(p_\gamma) = p_\beta$, to w przypadku $\gamma < \beta$ przy definiowaniu punktu p_β wykluczyliśmy tą równość. Zaś gdy $\beta < \gamma$, to tą równość wykluczyliśmy przy określaniu punktu p_γ. Skoro

$$f(R(X)) \setminus R(Y) \supseteq g_\alpha(R(X)) \setminus R(Y) \supseteq \{g_\alpha(p_\gamma) : \alpha < \gamma \text{ oraz } p_\gamma \in C_\beta \cap A_\alpha\},$$

to różnica $f(R(X)) \setminus R(Y)$ jest mocy λ.

Podobnie prowadzimy dowód gdy $\beta \in Y \setminus X$, tzn. zamieniamy rolami zbiory C_β oraz D_β. To wystarcza dla zakończenia dowodu

Twierdzenie 8.6. *Dla dowolnego podzbioru liczb rzeczywistych mocy continuum istnieje rodzina mocy* 2^c *złożona z podzbiorów tego zbioru o nieporównywalnych klasach wymiaru.*

Dowód. Ustalamy podzbiór liczb rzeczywistych X mocy continuum oraz korzystamy z lematu 8.4 przy założeniu $X = Y$. Otrzymujemy rodzinę odwzorowań domkniętych S o własnościach jak w lemacie 8.4. Dla dowolnej funkcji $f \in S$ wybieramy jeden jej selektor f_*. Niech S^* będzie rodziną wszystkich selektorów f_*. Korzystamy z lematu 8.5 zastępując rodzinę S przez S^*. Otrzymana na podstawie tego lematu rodzina podzbiorów zbioru X jest mocy 2^c. Gdy A oraz B są podzbiorami tej rodziny i h jest odwzorowaniem domkniętym określonym na podzbiorze $D \subset A$ o wartościach w B, to wybieramy odwzorowanie domknięte $f \in S$ zawierające h z dokładnością do przeliczalnego podzbioru przeciwdziedziny. Wtedy $f_*(B) \setminus A$ jest mocy continuum. Czyli zbiór $\{t \in B : f^{-1}(t) \neq h^{-1}(t)\}$ jest mocy continuum, co jest niemożliwe wobec lematu 8.2. To wystarcza dla zakończenia dowodu

Twierdzenie 8.7. *Jeśli podzbiór liczb rzeczywistych nie zawiera podzbioru homeomorficznego ze zbiorem Cantora, to jego klasa wymiaru jest mniejsza od klasy wymiaru zbioru Cantora.*

Dowód. Jeśli przeciwdziedzina odwzorowania domkniętego f określonego na podzbiorze liczb rzeczywistych X jest zbiorem Cantora 2^ω, to funkcja wielowartościowa F określona wzorem $F(x) = f^{-1}(x)$ jest ciągła. Wynika to z komentarza do lematu 7.3. Na podstawie dowodu twierdzenia 7.4 istnieje selektor h klasy 1 dla funkcji wielowartościowej F. Korzystamy z twierdzenia 5.5 i wybieramy podzbiór zwarty zawarty w zbiorze punktów ciągłości funkcji h. Funkcja h obcięta do tego zbioru jest zanurzeniem. To wystarcza dla zakończenia dowodu

Twierdzenie 8.8. *Jeśli klasa wymiaru podzbioru liczb rzeczywistych X jest mniejsza od klasy wymiaru zbioru Cantora, to istnieje podzbiór liczb rzeczywistych o klasie wymiaru większej od klasy wymiaru X oraz mniejszej od klasy wymiaru zbioru Cantora.*

Dowód. Gdy X jest mocy mniejszej od continuum, to dowolny podzbiór liczb rzeczywistych mocy continuum nie zawierający podzbioru homeomorficznego ze zbiorem Cantora, wobec twierdzenia 8.7, wystarcza. Istnienie takiego zbioru gwarantuje tzw. konstrukcja zbioru Bernsteina. Mianowicie, ustawiamy w ciąg pozaskończony $P_0, P_1, \ldots, P_\alpha, \ldots$ długości continuum wszystkie podzbiory liczb rzeczywistych homeomorficzne ze zbiorem Cantora (dla konstrukcji wystarczy aby były to zbiory mocy continuum). Z dowolnego zbioru P_α wybieramy, indukcyjnie, dwa punkty p_α oraz q_α różne od punktów wybranych wcześniej. Wtedy zbiór wszystkich punktów postaci p_α jest *zbiorem Bernsteina*, tzn. zbiór ten oraz jego dopełnienie przecinają dowolny podzbiór liczb rzeczywistych homeomorficzny ze zbiorem Cantora (dowolny zbiór P_α).

Załóżmy, że podzbiór liczb rzeczywistych X jest mocy continuum. Oznaczamy przez F rodzinę wszystkich zbiorów postaci $X \cap C$ mocy continuum oraz przez H rodzinę wszystkich zbiorów postaci $C \setminus X$, gdzie C przebiega podzbiory liczb rzeczywistych homeomorficzne ze zbiorem Cantora. Korzystamy z lematu 8.4 przy założeniu, że Y jest zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych. Otrzymujemy rodzinę S odwzorowań domkniętych o własnościach jak w tym lemacie. Oznaczamy przez G rodzinę dopełnień obrazów $f(X)$, gdzie f przebiega funkcje z rodziny S. W końcu kładziemy $Q = F \cup H \cup G$.

Zbiór Cantora zawiera continuum rozłącznych podzbiorów homeomorficznych z całością. W każdym z tych zbiorów są punkty nie należące do X. Stąd dowolny podzbiór rodziny Q jest mocy continuum oraz rodzina Q jest mocy continuum. Skoro zbiór X nie zawiera podzbioru homeomorficznego ze zbiorem Cantora, to Stosujemy na rodzinie Q konstrukcję zbioru Bernsteina i otrzymujemy podzbiór liczb rzeczywistych R taki, że zbiór ten oraz jego dopełnienie przecinają dowolny podzbiór z rodziny Q.

Kładziemy $Y = X \cup R$. Jeśli T jest podzbiorem liczb rzeczywistych homeomorficznym ze zbiorem Cantora, to różnica $T \setminus X$ należy do rodziny H. Skoro $(T \setminus X) \setminus R = T \setminus Y$, to różnica $T \setminus Y$ jest mocy continuum. To oznacza, że zbiór Y nie zawiera podzbioru homeomorficznego ze zbiorem Cantora. Stąd i z twierdzenia 8.7 mamy $c(X) \;\; c(Y) < c(2^\omega)$.

Przypuśmy, dla dowodu niewprost, że istnieje odwzorowanie domknięte f określone na podzbiorze $Z \subsetneq X$ którego przeciwdziedziną jest Y. Bierzemy podzbiór przeliczalny $P \subset Z$ gęsty w Z. Niech h będzie funkcją należącą do rodziny S taką, jak w lemacie 8.4 przyporządkowaliśmy obcięciu funkcji f do zbioru P. Zbiór R zawiera continuum punktów nie należących do obrazu zbioru Z przez funkcją h. To pociąga $c(X) < c(Y)$

Lemat 8.9 (S. Banach). *Przypuśmy, że λ oraz $\tau < \lambda$ są nieskończonymi liczbami kardynalnymi. Niech S będzie rodziną funkcji określonych na podzbiorach liczby kardynalnej λ przyjmujących wartości w λ. Jeśli rodzina S jest mocy nie mniejszej od λ oraz dla dowolnego punktu $t \in \lambda$ i dowolnej funkcji $f \in S$ przeciwobraz $f^{-1}(t)$ jest mocy nie większej od τ, to istnieje rodzina $\{H_\alpha : \alpha < \lambda\}$ podzbiorów liczby kardynalnej λ taka, że :*

(i) *Zbiory H_α są rozłączne i dają w sumie λ.*

(ii) *Jeśli $\gamma < \lambda$, to suma $\cup\{H_\alpha : \alpha < \gamma\}$ jest mocy mniejszej od λ.*

(iii) *Jeśli* $f \in S$, *to istnieje liczba porządkowa* β *taka, że dla dowolnej liczby porządkowej* $\alpha > \beta$ *zachodzi* $f(H_\alpha) \subseteq H_\alpha$.

Dowód. Ustawiamy w ciąg pozaskończony $T_0, T_1, \dots T_\alpha, \dots$ długości λ funkcje z rodziny S. Określamy ciąg pozaskończony $W_0, W_1, \dots W_\alpha, \dots$ podzbiorów liczby kardynalnej λ następująco: Kładziemy $W_{0,0} = \{\}$ oraz $W_{0,n} = T_0(W_{0,n-1}) \cup T_0^{-1}(W_{0,n-1})$. W końcu przyjmujemy $W_{0,0} \cup W_{0,1} \cup \dots = W_0$.

Załóżmy, że dla dowolnej liczby porządkowej $\beta < \alpha$ zbiór W_β został określony. Niech p_α będzie najmniejszą liczbą porządkową należącą do różnicy $\lambda \setminus \cup\{W_\beta : \beta < \alpha\}$. Kładziemy $W_{\alpha,0} = \{p_\alpha\} \cup \{W_\beta : \beta < \alpha\}$ oraz

$$W_{\alpha,n} = \cup\{T_\beta(W_{\alpha,n-1}) : \beta < \alpha\} \cup \cup\{T_\beta^{-1}(W_{\alpha,n-1}) : \beta < \alpha\}$$

oraz $W_{\alpha,0} \cup W_{\alpha,1} \cup \dots = W_\alpha$.

Jeśli $|A| \ \ |\tau \times \alpha \times \omega|$ oraz $T \in S$, to

$$|T(A)| \ \ |\tau \times \alpha \times \omega|$$

oraz

$$|T^{-1}(A)| \ \ |\tau \times \alpha \times \omega|.$$

Piewsza nierówność zachodzi, gdyż T jest funkcją. Zaś druga, bo $T^{-1}(A) = \cup\{T^{-1}(t) : t \in A\}$ oraz $|T^{-1}(t)| \ \ \tau$. Czyli nierówność

$$|W_{\alpha,n}| \ \ |\tau \times \alpha \times \omega| \ \text{ pociąga nierówności } |W_{\alpha+1,n}| \ \ |\tau \times \alpha \times \omega|$$

oraz

$$|W_\alpha| \ \ |\tau \times \alpha \times \omega|.$$

Stąd indukcyjnie wnioskujemy, że $|W_\alpha| \ \ |\tau \times \alpha \times \omega|$, gdyż $W_{0,0} = \{\}$.

Kładziemy $H_\alpha = W_\alpha \setminus \cup\{W_\beta : \beta < \alpha\}$. Zbiory H_α są rozłączne z definicji. Skoro liczba porządkowa p_α była najmniejsza w zbiorze $\lambda \setminus \cup\{W_\beta : \beta < \alpha\}$, to zbiory H_α dają w sumie λ. Dla dowolnej liczby porządkowej α zachodzi

$$| \cup \{H_\beta : \beta < \alpha\}| = \ \cup\{W_\beta : \beta < \alpha\}| \ \ |\tau \times \alpha \times \omega|.$$

Czyli warunek (ii) jest spełniony. Sprawdzimy, że warunek (iii) jest także spełniony. Aby to zrobić bierzemy funkcję $F = T_\alpha$. Wtedy dla $\beta > \alpha$ zachodzi $F(H_\beta) \subseteq H_\beta$. Rzeczywiście, gdy $x \in H_\beta \subset W_\beta$, to $x \in W_{\beta,n}$. Wtedy $F(x) \in W_{\beta,n+1}$, czyli $F(H_\beta) \subseteq W_\beta$. Gdyby tak nie było, to $F(x) \in H_\gamma$, dokładniej $F(x) \in W_{\gamma,n}$, gdzie $\gamma < \alpha$. Zaś to pociąga $x \in F^{-1}(W_{\gamma,n}) \subseteq W_\gamma$, ale to jest sprzeczne z $x \in H_\alpha \subseteq W_\alpha \setminus W_\gamma$ To wystarcza dla zakończenia dowodu

Twierdzenie 8.10. *Niech X oraz Y będą dowolnymi podzbiorami liczb rzeczywistych. Jeśli X jest mocy continuum, to istnieje rodzina mocy continuum podzbiorów zbioru X mocy continuum taka, że jeśli podzbiór zbioru Y ma klasę wymiaru mniejszą od dwu elementów tej rodziny, to jest mocy mniejszej od continuum.*

Dowód. Bierzemy podzbiór zbioru X mocy continuum nie zawierający podzbioru homeomorficznego ze zbiorem Cantora i korzystamy z lematu 8.4. Dowolną funkcję f z otrzymanej rodziny S obcinamy do podzbioru dziedziny, który jest sumą wszystkich zwartych przeciwobrazów pojedynczych punktów. Co najwyżej przeliczalna ilość takich przeciwobrazów nie jest zwarta, gdyż na podstawie lematu 8.1 zwarte są wszystkie przeciwobrazy nigdziegęste. Do rodziny obcięć jak wyżej stosujemy lemat 8.9.

Bierzemy ciąg pozaskończony $P_0, P_1, \ldots, P_\alpha, \ldots$ długości continuum złożony z rozłącznych podzbiorów liczby kardynalnej continuum mocy continuum. W końcu kładziemy

$$A_\alpha = \cup\{H_\beta : \beta \in P_\alpha\},$$

gdzie zbiory H_β są takie, jak w lemacie 8.9. Z punktu (iii) tego lematu wnioskujemy, że zbiory A_α są takie jakich potrzebujemy

Twierdzenie 8.11. *Istnieje ciąg pozaskończony $A_0, A_1, \ldots, A_\alpha, \ldots$ długości c^+ złożony z podzbiorów liczb rzeczywistych taki, że jeśli $\alpha < \beta < c^+$, to klasa wymiaru zbioru A_α jest mniejsza od klasy wymiaru zbioru A_β.*

Dowód. Niech A_0 będzie podzbiorem zbioru Cantora mocy continuum nie zawierającym podzbioru homeomorficznego ze zbiorem Cantora, np zbiorem Bersteina.

Załóżmy, że dla liczby porządkowej α został określony podzbiór zbioru Cantora A_α nie zawierający podzbioru homeomorficznego ze zbiorem Cantora. Korzystamy z twierdzenia 8.8. i za zbiór $A_{\alpha+1}$ bierzemy podzbiór zbioru Cantora taki, że

$$c(A_\alpha) < c(A_{\alpha+1}) < c(2^\omega).$$

Załóżmy, że α jest graniczną liczbą porządkową mocy nie większej od continuum. Jeśli dla dowolnej liczby porządkowej $\beta < \alpha$ został określony podzbiór A_β zawarty w zbiorze Cantora, to ustalamy ciąg pozaskończony $y_0, y_1, \ldots, y_\beta, \ldots$ długości α różnych punktów należących do zbioru Cantora tak, aby zbiór $\{y_\beta : \beta < \alpha\}$ nie zawierał podzbioru homeomorficznego ze zbiorem Cantora. W końcu kładziemy

$$A_\alpha = \cup\{A_\beta \times \{y_\beta\} : \beta < \alpha\} \subset 2^\omega \times 2^\omega.$$

Zbiór A_α nie zawiera podzbioru homeomorficznego ze zbiorem Cantora. Gdyby

$X \subseteq A_\alpha$ był takim zbiorem, to jego rzut na drugą oś jako obraz zbioru zwartego przez funkcję ciągłą byłby zwarty. Skoro założyliśmy że zbiór $\{y_\beta : \beta < \alpha\}$ nie zawiera podzbioru homeomorficznego ze zbiorem Cantora, to podzbiory zwarte tego zbioru są przeliczalne. Wnioskujemy stąd, że istnieje punkt y_β taki, że zbiór

$$X \cap (2^\omega \times \{y_\beta\})$$

jest zwarty i nieprzeliczalny, a więc zawiera podzbiór homeomorficzny ze zbiorem Cantora. Wtedy zbiór A_β zawierałby także taki zbiór, co wykluczyliśmy. Dla dowolnej liczby porządkowej $\gamma < \alpha$ z nierówności $\gamma < \beta < \alpha$ oraz $c(A_\gamma) < c(A_\beta)$ wnioskujemy $c(A_\gamma) < c(A_\alpha)$. Co wystarcza dla zakończenia dowodu

Nie wiemy, czy twierdzenie 8.11 ma prawdziwą wersję dla dowolnego podzbioru liczb rzeczywistych mocy continuum, tzn. czy można zakładać, że dla ustalonego podzbioru liczb rzeczywistych X mocy continuum ciąg pozaskończony $A_0, A_1, \ldots, A_\alpha, \ldots$ długości c^+ jest złożony z podzbiorów zbioru X.

Twierdzenie 8.12 *Dla dowolnego podzbioru liczb rzeczywistych mocy continuum istnieją ciągi pozaskończone $A_0, A_1, \ldots, A_\alpha, \ldots$ oraz $B_0, B_1, \ldots, B_\alpha, \ldots$ długości continuum złożone z podzbiorów tego zbioru takie, że jeśli $\beta < \alpha$, to klasa wymiaru zbioru A_β jest mniejsza od klasy wymiaru zbioru A_α oraz klasa wymiaru zbioru B_α jest mniejsza od klasy wymiaru zbioru B_β .*

Dowód. Ustalamy podzbiór liczb rzeczywistych X mocy continuum nie zawierający podzbioru homeomorficznego ze zbiorem Cantora. Korzystamy z lematu 8.4 i dowolną funkcję f o przeciwdziedzinie mocy continuum należącą do rodziny S otrzymanej na podstawie tego lematu obcinamy do podzbioru zbioru X, który jest sumą nigdziegęstych w dziedzinie przeciwobrazów pojedynczych punktów. Rodzinę wszystkich tak otrzymanych obcięć oznaczamy przez T. Na podstawie lematu 8.1 przeciwobrazy pojedynczych punktów dla funkcji z T są zwarte i przeliczalne. Ustawiamy w ciąg pozaskończony $f_0, f_1, \ldots, f_\alpha, \ldots$ długości continuum wszystkie funkcje z rodziny T.

Dla liczby porządkowej α wybieramy punkt $p_\alpha \in X$ różny od punktów p_β, $f_\beta(p_\gamma), f_\beta^{-1}(p_\gamma), f_\alpha(p_\beta), f_\alpha^{-1}(p_\beta)$, gdzie $\beta < \alpha$ oraz $\gamma < \alpha$

Niech P oznacza zbiór wszystkich określonych wyżej punktów p_α. Odnotujmy, że jeśli $\alpha < \beta$, to liczba $f_\alpha(p_\beta)$ jest równa p_β lub nie należy do P. Jest tak, bo gdy $f_\alpha(p_\beta) = p_\gamma$, to: w przypadku $\gamma < \beta$ zakładaliśmy, że punkt p_β jest różny od $f_\alpha^{-1}(p_\gamma)$. Zaś gdy $\beta < \gamma$, to zakładaliśmy, że punkt p_γ jest różny od $f_\alpha(p_\beta)$.

Przedstawiamy zbiór P w postaci sumy ciągu pozaskończonego $H_0, H_1, \ldots, H_\alpha, \ldots$ długości continuum złożonego z rozłącznych podzbiorów mocy continuum. Dla liczby porządkowej α

kładziemy

$$A_\alpha = \cup\{H_\beta : \beta \quad \alpha\} \quad \text{oraz} \quad B_\alpha = P \setminus A_\alpha.$$

Natychmiast z określenia mamy

$$c(A_0) \quad c(A_1) \quad \ldots \quad c(A_\alpha) \quad \ldots$$

oraz

$$c(B_0) \quad c(B_1) \quad \ldots \quad c(B_\alpha) \quad \ldots,$$

gdyż odpowiednie nierówności wynikają z zawierań.

Załóżmy, że liczba porządkowa γ jest mniejsza od liczby porządkowej β. Przypuśmy, dla dowodu niewprost, że funkcja f_α po obcięciu do podzbioru $D \subseteq A_\gamma$ jest odwzorowaniem domkniętym przyjmującym wszystkie wartości ze zbioru H_β poza przeliczalną ilością. To obcięcie nie jest tożsamością, a więc punkty p_ζ, dla $\zeta > \alpha$, nie mogą należeć do przeciwdziedziny tego obcięcia. Mamy sprzeczność pociągającą $c(A_\gamma) < c(A_\beta)$.

Nierówności $c(B_\beta) < c(B_\gamma)$ dowodzimy tak samo podstawiając za A_γ zbiór B_β. Wtedy zamiast H_β należy rozważyć zbiór H_γ. To wystarcza dla zakończenia dowodu

Wszystkie twierdzenia tego rozdziału, oprócz twierdzenia 8.11, mają wersje dla funkcji monotonicznych wziętych zamiast odwzorowań domkniętych. Sprawdzenie tego jak i odczytanie jakie własności przestrzeni topologicznych wykorzystujemy w dowodach pozostawiamy czytelnikowi. Oczywiście wszystkie dowody przechodzą przy założeniu, iż dotyczą przestrzeni metrycznych ośrodkowych.