7. Funkcje wielowartościowe i selektory.

Rodzinę wszystkich podzbiorów zbioru X będziemy oznaczali przez $P(X)$. Gdy X jest przestrzenią topologiczną, to odwzorowanie $F : Y \to P(X)$ określone na zbiorze Y oraz przyjmujące jako wartości domknięte podzbiory przestrzeni X, będziemy nazywali *funkcją wielowartościową.*

Jeśli L jest rodziną podzbiorów zbioru Y oraz X jest przestrzenią topologiczną, to będziemy mówili, że funkcja wielowartościowa $F : Y \to P(X)$ jest L- *mierzalna* gdy dla dowolnego podzbioru otwartego $U \subseteq X$ zbiór

$$\{x \in Y : F(x) \cap U \neq \varnothing\}$$

należy do rodziny L.

W literaturze pojęcia L-mierzalności bywa nazywane mierzalnością z dołu (*lower-measurable*). Bywa tak gdy rozważane są inne rodzaje mierzalności. Przykładowo gdy w definicji L-mierzalności założymy, że zbiór U przebiega zbiory domknięte, to o funkcji wielowartościowej F będziemy mówili, że jest U*-mierzalna.* Jednakże gdy rodzina L jest zamknięta na przeliczalne sumy oraz X jest przestrzenią doskonałą, to dowolny podzbiór otwarty $U \subseteq X$ można przedstawić jako sumę ciągu $V_0, V_1, \ldots$ zbiorów domkniętych. Wtedy

$$\{x \in Y : F(x) \cap U \neq \varnothing\} = \cup\{\{x \in Y : F(x) \cap V_n \neq \varnothing\} : n \in \omega\}.$$

To wystarcza dla wnioskowania, że dowolna funkcja wielowartościowa U-mierzalna jest L-mierzalna. Wnioskowanie w odwrotną stronę jest niepoprawne w ogólnej sytuacji. Chociaż jest możliwe przy założeniu zwartości wartości funkcji wielowartościowej F.

Jeśli $F : Y \to P(X)$ jest funkcją wielowartościową, to funkcję $f : Y \to X$ taką, że dla dowolnego punktu $x \in Y$ zachodzi $f(x) \in F(x)$ będziemy nazywali *selektorem funkcji F.*

Lemat 7.1 (N. łuzin) *Jeśli L jest rodziną wszystkich sum przeliczalnych podrodzin ciała S, to dla dowolnego ciągu $A_0, A_1, \ldots$ elementów L istnieje ciąg $B_0, B_1, \ldots$ rozłącznych elementów L taki, że*

$$A_0 \cup A_1 \cup \ldots = B_0 \cup B_1 \cup \ldots$$

oraz dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi $B_n \subseteq A_n$.

Dowód. Dla dowolnej liczby naturalnej n przedstawiamy zbiór A_n w postaci sumy zbiorów $A_{n,0}, A_{n,1}, \ldots$ należących do ciała S. Ustawiamy w ciąg $s_0, s_1, \ldots$ wszystkie pary liczb naturalnych. Gdy $(n,k) = s_i$, to przyjmujemy $A_{n,k} = D_i$ oraz kładziemy

$$C_{n,k} = A_{n,k} \setminus \cup\{D_m : m < i\} = D_i \setminus \cup\{D_m : m < i\}.$$

W końcu kładziemy

$$C_{n,0} \cup C_{n,1} \ldots = B_n.$$

Skoro zbiory $C_{n,0}, C_{n,1}, \ldots$ są rozłączne, to zbiory B_n są rozłączne. Zawierania $C_{n,0} \subseteq A_{n,0}, C_{n,1} \subseteq A_{n,1}, \ldots$ pociągają $B_n \subseteq A_n$. Zaś oczywistym jest, z powodu określenia zbioru $C_{n,k}$, że $A_0 \cup A_1 \cup \ldots = B_0 \cup B_1 \cup \ldots$ ■

Twierdzenie 7.2 (K. Kuratowski, Cz. Ryll-Nardzewski). *Jeśli L jest rodziną wszystkich sum przeliczalnych podrodzin ciała S oraz F jest L-mierzalną funkcją wielowartościową przyjmującą jako wartości domknięte podzbiory liczb rzeczywistych, to istnieje selektor funkcji wielowartościowej F, który jest funkcją L-mierzalną.*

Dowód. Przyjmijmy, dla potrzeb tego dowodu, że odległość większa od jedynki jest odległością równą jedynce. Ustawiamy w ciąg $r_0, r_1, \ldots$ wszystkie liczby wymierne.

Selektor funkcji wielowartościowej F określimy jako granicę jednostajną ciągu $f_0, f_1, \ldots$ funkcji L-mierzalnych określonych na sumie $\cup L$ przyjmujących wartości wymierne oraz takich, że dla dowolnej liczby naturalnej n oraz dowolnego punktu $x \in \cup L$ zachodzą nierówności

$$\inf\{|f_n(x) - z| : z \in F(x)\} < \frac{1}{2^n}$$

oraz

$$|f_n(x) - f_{n-1}(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Załóżmy, że funkcja f_{n-1} została określona. Dla dowolnej liczby naturalnej i rozważamy zbiory

$$C_i = \{x \in \cup L : F(x) \cap \{z : |z - r_i| < \frac{1}{2^n}\} \neq \varnothing\},$$

oraz

$$D_i = \{x \in \cup L : f_{n-1}(x) \in \{z : |z - r_i| < \frac{1}{2^{n-1}}\}\}.$$

Następnie połóżmy $A_i = C_i \cap D_i$.

Skoro funkcja wielowartościowa F jest L-mierzalna, to zbiory $C_0, C_1, \ldots$ należą do L. Na podstawie założenia indukcyjnego funkcja

f_{n-1} jest L-mierzalna, a więc zbiory $D_0, D_1, \ldots$ należą do rodzimy L. Dla dowolnych zbiorów G_k oraz H_n zachodzi równość

$$\cup\{G_k : k \in X\} \cap \cup\{H_n : n \in Y\} = \cup\{G_k \cap H_n : (k,n) \in X \times Y\}.$$

Podstawiamy za $G_0, G_1, \ldots$ zbiory należące do ciała S oraz dające w sumie C_i. Zaś za $H_0, H_1, \ldots$ zbiory należące do ciała S dające w sumie D_i. Skoro rodzina S jest ciałem, to, wobec powyższej równości, zbiory $A_0, A_1, \ldots$ należą do rodziny L.

Gdy $x \in \cup L$, to korzystamy z założenia indukcyjnego i wybieramy punkt $y \in F(x)$ odległy od liczby $f_{n-1}(x)$ o mniej niż $\dfrac{1}{2^{n-1}}$. Dobieramy liczbę wymierną r_i odległą od y o mniej niż $\dfrac{1}{2^n}$ taką, że

$$|r_i - y| + |y - f_{n-1}(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Wtedy punkt x nałeży do zbioru C_i; bo do zbioru $F(x)$ należy punkt y odległy od r_i o mniej niż $\dfrac{1}{2^n}$. Punkt x należy także do zbioru D_i; gdyż liczby $f_{n-1}(x)$ oraz y są odległe o mniej niż $\dfrac{1}{2^{n-1}}$. Mamy stąd $A_0 \cup A_1 \cup \ldots = \cup L$.

Korzystamy z poprzedniego lematu i dobieramy rozłączne zbiory $B_0, B_1, \ldots$ należące do rodziny L w taki sposób, aby dla dowolnej liczby naturalnej k zachodziło $B_k \subseteq A_k$ oraz $B_0 \cup B_1 \cup \ldots = \cup L$. W końcu dla $x \in B_i$ kładziemy $f_n(x) = r_i$.

Przeciwobrazy punktów przez funkcję f_n należą do rodziny L oraz zbiór wartości tej funkcji jest przeliczalny. Skoro rodzina L jest zamknięta na sumy podrodzin przeliczalnych, to funkcja f_n jest L-mierzalna.

Gdy $x \in B_i \subseteq A_i$, to punkt x należy także do zbioru C_i, a więc istnieje punkt $z \in F(x)$ odległy od r_i o mniej niż $\dfrac{1}{2^n}$. Stąd

$$\inf\{|f_n(x) - z| : z \in F(x)\} = \inf\{|r_i - z| : z \in F(x)\} < \frac{1}{2^n}.$$

Punkt x należy także do zbioru D_i, a więc liczba $f_{n-1}(x)$ jest odległa od r_i o mniej niż $\frac{1}{2^{n-1}}$. To pociąga

$$|f_{n-1}(x) - f_n(x)| = |f_{n-1}(x) - r_i| < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Czyli funkcja f_n jest taka jak zapowiadaliśmy.

Ciąg funkcji $f_0, f_1, \ldots$ spełnia warunek Cauchy'ego, a więc jest jednostajnie zbieżny do funkcji f. Funkcja f jest L-mierzalna na podstawie lematu 3.1. Ta funkcja jest selektorem funkcji F, gdyż wartości funkcji wielowartościowej F są domknięte oraz dla dowolnego punktu x odległość liczby $f(x)$ od zbioru $F(x)$ jest równa zeru. To wystarcza dla zakończenia dowodu ■

Dowód powyższego twierdzenia wykorzystał jedynie ośrodkowość i zupełność zbioru liczb rzeczywistych. Jest prawdziwa jego wersja, z tym samym dowodem, dla funkcji wielowartościowej przyjmującej jako wartości podzbiory domknięte ośrodkowej przestrzeni metryzowalnej w sposób zupełny.

Jeśli X oraz Y są przestrzeniami topologicznymi, to będziemy mówili, że funkcja wielowartościowa $F : Y \to P(X)$ jest ciągła gdy dla dowolnego podzbioru domkniętego $U \subseteq X$ zbiór

$$\{x \in Y : F(x) \cap U \neq \varnothing\}$$

jest domknięty w Y. Powyższa definicja ciągłości nie jest powszechnie używana. Przyjeliśmy taką definicję dlatego aby odpowiadała odwrotności funkcji ciągłej określonej na przestrzeni zwartej Hausdorffa.

Lemat 7.3. *Jeśli X jest zwartą przestrzenią Hausdorffa, Y przestrzenią Hausdorffa oraz $f : X \to Y$ funkcją ciągłą, to funkcja wielowartościowa F określona wzorem $F(x) = f^{-1}(x)$ jest funkcją wielowartościową ciągłą.*

Dowód. Jeśli $V \subseteq X$ jest podzbiorem domkniętym, to

$$\{y \in Y : F(y) \cap V \neq \varnothing\} = \{y \in Y : f^{-1}(y) \cap V \neq \varnothing\} = f(V).$$

Zbiór V jest zwarty, gdyż przestrzeń X jest zwarta Hausdorffa. Funkcja f jest ciągła, a więc obraz tego zbioru jest zwarty. Skoro przestrzeń Y jest Hausdorffa, to przeciwobraz $f(V)$ jest domknięty. To wystarcza dla zakończenia dowodu ■

Twierdzenie 7.4. (Cz. Ryll-Nardzewski) *Jeśli X jest zwartą przestrzenią metryczną oraz Y przestrzenią metryczną, to dla dowolnej funkcji ciągłej $f : X \to Y$ istnieje funkcja g klasy 1 taka, że dla dowolnego punktu $x \in Y$ zachodzi $g(x) \in f^{-1}(x)$.*

Dowód. Korzystamy z poprzedniego lematu i twierdzenia 7.2. Jako g bierzemy selektor mierzalny względem zbiorów typu F_σ dla funkcji wielowartościowej określonej wzorem $F(x) = f^{-1}(x)$. Funkcja g jest 1 klasy Baire'a na podstawie analogicznego rozumowania jak w dowodzie twierdzenia 5.2 ■

W lemacie 7.3 istotnym założeniem było, że funkcja f jest ciągła i *domknięta*, tzn. funkcją ciągłą, która przeprowadza dowolny podzbiór domknięty na zbiór domknięty. W istocie rzeczy dowód twierdzenia 7.4 pracuje przy założeniach: X jest ośrodkową przestrzenią metryzowalną w sposób zupełny, Y jest przestrzenią topologiczną oraz f jest funkcją ciągłą i domkniętą.