

FUNKCJE BORELOWSKIE

Rodzinę F podzbiorów zbioru X (tzn. $\cup F \subseteq X$) będziemy nazywali *ciałem* gdy spełnione są warunki:

- (1) *Jeśli zbiór $Y \in F$, to dopełnienie $X \setminus Y$ też należy do rodziny F .*
- (2) *Jeśli $S \subseteq F$ jest skończoną podrodziną, to suma $\cup S = \cup\{Y : Y \in S\}$ także należy do rodziny F .*

Gdy w (2) weźmiemy rodzinę pustą jako S , to wnioskujemy, że zbiór pusty oraz zbiór $X = \cup F$ (wobec (1)) należą do ciała F .

Jeśli dodatkowo w (2) dopuścimy podrodziny przeliczalne w miejsce rodzin skończonych, to ciało F będziemy nazywali σ -ciałem.

Jeśli f jest funkcją rzeczywistą oraz dla dowolnego zbioru otwartego w sensie *topologii naturalnej*, tj. topologii na zbiorze liczb rzeczywistych generowanej przez przedziały otwarte o końcach wymiernych, jego przeciwobraz przez funkcję f należy do rodziny F , to będziemy mówili, że funkcja f jest F -mierzalna. Innymi słowy: funkcja jest F -mierzalna jeśli przeciwobraz zbioru domkniętego należy do rodziny dopełnień zbiorów należących do rodziny F . Gdy F jest rodziną taką, że do F należy suma dowolnej przeliczalnej podrodziny zawartej w F , to mówimy, że F jest *zamknięta na sumy przeliczalne*.

Lemat 1.

Jeśli F jest rodziną zamkniętą na sumy przeliczalne, to granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji rzeczywistych F -mierzalnych jest funkcją F -mierzalną.

Dowód. Ustalmy ciąg $f_0, f_1, \dots$ funkcji F -mierzalnych jednostajnie zbieżny do funkcji f . Dowolny jego podciąg jest jednostajnie zbieżny, a więc bez straty ogólności zakładamy, lub wybieramy stosowny podciąg, że dla dowolnego punktu x zachodzi nierówność

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{n}.$$

Bierzemy domknięty w sensie topologii naturalnej podzbiór D . Oznaczamy przez A_n zbiór wszystkich liczb rzeczywistych odległych od D o nie więcej niż $\frac{1}{n}$. Liczba $f(x)$ należy do D gdy zawsze liczba $f_n(x)$ należy do A_n . Skoro $A_1 \cap A_2 \cap \dots = D$, to mamy

$$f^{-1}(D) = \cap \{f_n^{-1}(A_n) : n = 0, 1, \dots\}.$$

Zbiory A_n są domknięte, czyli z prawej strony mamy przekrój przeliczalnej ilości dopełnień elementów należących do rodziny F , a więc jest to dopełnienie elementu z rodziny F . $\square$

Jeśli X jest przestrzenią topologiczną, to elementy najmniejszego σ -ciała zawierającego jej podzbiory otwarte będziemy nazywali *zbiorami borelowskimi*. Będziemy mówili, że zbiór jest *typu F_σ* gdy jest sumą przeliczalnej ilości zbiorów

domkniętych oraz jest *typu* G_δ gdy jest przekrojem przeliczalnej ilości zbiorów otwartych.

Przestrzeń topologiczną będziemy nazywali *doskonałą* gdy dowolny jej podzbiór otwarty jest zbiorem typu F_σ innymi słowy: dowolny jej podzbiór domknięty jest zbiorem typu G_δ .

Będziemy mówili, że zbiory domknięte są *typu* G_0 oraz zbiory otwarte są *typu* F_0 . Jeśli α jest przeliczalną liczbą porządkową, to będziemy mówili, że zbiór borelowski jest *typu* F_α gdy jest sumą przeliczalnej ilości zbiorów typów G_β , gdzie $\beta \in \alpha$. Zbiór borelowski jest *typu* G_α gdy jest dopełnieniem zbioru typu F_α innymi słowy: jest przekrojem przeliczalnej ilości zbiorów typów F_β , gdzie $\beta \in \alpha$. Zbiory typu F_σ to zbiory typu F_1 ; zaś zbiory typu G_1 to zbiory typu G_δ . O zbiorze jednocześnie typu F_α oraz typu G_α będziemy mówili, że jest *typu* Δ_α .

Lemat 2.

Niech α będzie przeliczalną liczbą porządkową.

(a) *Przekrój skończonej ilości oraz suma przeliczalnej ilości zbiorów typu F_α to zbiory typu F_α .*

(b) *Suma skończonej ilości oraz przekrój przeliczalnej ilości zbiorów typu G_α to zbiory typu G_α .*

(c) *Zbiory typu Δ_α tworzą ciało.*

(d) *Gdy $\beta \in \alpha$, to dla dowolnej przestrzeni doskonałej podzbiory typu G_β oraz F_β są typu Δ_α .*

Dowód. Warunek (c) natychmiast wynika z warunków (a) oraz (b). Warunek (a) jest tłumaczeniem przez prawa de Morgana warunku (b). Zbiory typu G_0 to zbiory domknięte, a więc dla nich warunek (b) jest prawdziwy. Dla dowolnych zbiorów H_n^k prawdziwa jest równość

$$\cap\{\cap\{H_n^k : k \in X\} : n \in Y\} = \cap\{H_n^k : (k, n) \in X \times Y\}.$$

Podstawmy za X oraz Y zbiory przeliczalne oraz za zbiory H_n^k zbiory typów F_β , gdzie $\beta \in \alpha$. Wtedy produkt kartezjański $X \times Y$ jest przeliczalny. Wobec powyższej równości, przekrój przeliczalnej ilości zbiorów typu G_α jest zbiorem typu G_α .

Dla dowolnych zbiorów A_k oraz B_n zachodzi równość

$$\cap\{A_k : k \in Y\} \cup \cap\{B_n : n \in X\} = \cap\{A_k \cup B_n : (k, n) \in Y \times X\}.$$

Stosujemy ją dla dowodu, że suma skończonej ilości zbiorów typu G_α jest zbiorem typu G_α . Wystarczy to wykazać dla sumy dwóch zbiorów. Podstawiamy za X oraz Y zbiory przeliczalne zaś za zbiory A_k oraz B_n zbiory typów F_β , gdzie $\beta \in \alpha$.

Na podstawie założenia indukcyjnego z prawej strony powyższej równości mamy przekrój przeliczalnej ilości zbiorów typów F_β , gdzie $\beta \in \alpha$. To wystarcza dla zakończenia dowodu warunku (b).

Przestrzeń jest doskonała. To oznacza, że dowolny jej podzbiór typu F_0 , tj. otwarty, jest typu $F_1 = F_\sigma$ oraz dowolny jej podzbiór typu G_0 , tj. domknięty, jest typu $G_1 = G_\delta$. Rozważmy liczbę porządkową $\beta \in \alpha$. Jeśli H jest zbiorem typu G_β , to jest zbiorem typu F_α jako suma rodziny jednoelementowej $\{H\}$. Zaś gdy E jest zbiorem typu F_β , to suma potrzebna dla jego określenia jako zbioru typu F_β jest dobra dla określenia go jako zbioru typu F_α . Czyli dowolny zbiór typu F_β oraz jego dopełnienie są zbiorami typu F_α , a więc także zbiorami typów G_α . To wystarcza dla zakończenia dowodu (d) oraz całego lematu. $\square$

Będziemy mówili, że funkcja rzeczywista jest *klasy* α gdy przeciwobraz dowolnego zbioru otwartego jest typu F_α . Innymi słowy: funkcja rzeczywista jest klasy α gdy przeciwobraz dowolnego zbioru domkniętego jest typu G_α . Odnotujmy, że funkcje klasy 0 to funkcje ciągłe. Funkcje klasy α , gdzie α jest przeliczalną liczbą porządkową będziemy nazywali *funkcjami borelowskimi*.

Twierdzenie 3.

Granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji klasy α jest funkcją klasy α .

Dowód. Zbiory typu F_α , na podstawie lematu 2 (a), tworzą rodzinę zamkniętą na przeliczalne sumy. Korzystamy z lematu 1, który wystarcza dla zakończenia dowodu. $\square$

Twierdzenie 4 (F. Hausdorff).

Granica punktowo zbieżnego ciągu funkcji klasy α jest funkcją klasy $\alpha + 1$.

Dowód. Ustalmy ciąg funkcji $f_0, f_1, \dots$ klasy α punktowo zbieżny do funkcji f . Bierzemy zbiór domknięty D . Przez B_n oznaczamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych odległych od D o mniej niż $\frac{1}{n}$.

Liczba rzeczywista $f(x)$ należy do D gdy dla dowolnej liczby naturalnej n prawie wszystkie liczby $f_n(x), f_{n+1}(x), \dots$ należą do B_n . Mamy stąd równość

$$f^{-1}(D) = \cap \{ \cup \{ f_{n+k}^{-1}(B_n) : k = 0, 1, \dots \} : n = 0, 1, \dots \}.$$

Zbiory $B_0, B_1, \dots$ są otwarte, a więc zbiory $f_{n+k}^{-1}(B_n)$ są typu F_α . Stąd sumy

$$\cup \{ f_{n+k}^{-1}(B_n) : k = 0, 1, \dots \}$$

są typu F_α . Czyli zbiór $f^{-1}(D)$ jest typu $G_{\alpha+1}$. To wystarcza dla zakończenia dowodu. $\square$

Będziemy mówili, że funkcja rzeczywista jest *funkcją prostą* gdy zbiór jej wartości jest skończony.

Lemat 5.

Funkcja prosta jest klasy α gdy przeciwobrazy punktów są typu Δ_α .

Dowód. Skoro punkty przeciwdziedziny są domknięto-otwarte, to dla funkcji prostej klasy α przeciwobrazy punktów, są zbiorami typu F_α oraz zbiorami typu G_α . Czyli zbiorami typu Δ_α . $\square$

Twierdzenia 4 nie daje się poprawić dla liczby porządkowej granicznej α , tzn. może istnieć ciąg funkcji klas mniejszych niż α punktowo zbieżny do funkcji klasy $\alpha + 1$. Przykładowo weźmy zbiór H , który jest zbiorem typu F_α oraz nie jest zbiorem typu G_α . O istnieniu takiego zbioru, będziemy mówili w następnym rozdziale. Korzystamy z lematu 2 (d) i przedstawiamy H jako sumę zbiorów $A_0, A_1, \dots$, które są zbiorami typów Δ_β , gdzie $\beta \in \alpha$. Możemy założyć, że $A_0 \subseteq A_1 \subseteq \dots$ na podstawie lematu 2 (b). Funkcje charakterystyczne zbiorów $A_0, A_1, \dots$ są punktowo zbieżne do funkcji charakterystycznej zbioru H . Ta ostatnia funkcja na podstawie lematu 5 jest klasy $\alpha + 1$ oraz nie jest klasy α . Skoro α jest liczbą porządkową graniczną, to funkcje charakterystyczne zbiorów $A_0, A_1, \dots$ są klas β , gdyż zbiory $A_0, A_1, \dots$ są klas Δ_β , gdzie $\beta \in \alpha$.

Lemat 6 (W. Sierpiński).

Niech $\alpha > 0$ będzie przeliczalną liczbą porządkową oraz założymy, że rozważane zbiory są podzbiorami przestrzeni doskonałej.

(a) *Dowolny zbiór typu F_α , można przedstawić jako przeliczalną sumę rozłącznych zbiorów typu Δ_α .*

(b) *Dla dowolnych dwu rozłącznych zbiorów typu G_α , istnieje zbiór typu Δ_α zawierający jeden z nich oraz rozłączny z drugim.*

Dowód. Ustalmy zbiór X typu F_α . Korzystamy z lematu 2 (d) i przedstawiamy go jako sumę zbiorów $A_0, A_1, \dots$, które są typu Δ_α . Kładziemy $E_0 = A_0$ oraz

$$E_n = A_n \setminus (A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}).$$

Zbiory $E_0, E_1, \dots$ są typu Δ_α , na podstawie lematu 2 (c). Są one rozłączne i dają w sumie X . To uzasadnia punkt (a).

Ustalmy dwa rozłączne zbiory typu G_α . Ich dopełnienia przedstawiamy w postaci sum $C_0 \cup C_1 \cup \dots$ oraz $B_0 \cup B_1 \cup \dots$ tak, aby zbiory $C_0, C_1, \dots, B_0, B_1, \dots$ były typów G_β , gdzie $\beta \in \alpha$. Kładziemy $H_0 = C_0$ oraz $F_0 = B_0 \setminus C_0$. Następnie przyjmujemy indukcyjnie, że

$$H_n = C_n \setminus (B_0 \cup B_1 \cup \dots \cup B_{n-1} \cup C_0 \cup C_1 \cup \dots \cup C_{n-1});$$

$$F_n = B_n \setminus (C_0 \cup C_1 \cup \dots \cup C_n \cup B_0 \cup B_1 \cup \dots \cup B_{n-1}).$$

Zbiory $H_0, H_1, \dots, F_0, F_1, \dots$ są rozłączne. Na podstawie lematu 2 (d) są typu Δ_α . Ich sumy $H_0 \cup H_1 \cup \dots$ oraz $F_0 \cup F_1 \cup \dots$ są rozłączne oraz na podstawie

lematu 2 (a) są typu F_α . Dają one w sumie całą przestrzeń, czyli są zbiorami typu Δ_α . Suma $H_0 \cup H_1 \cup \dots$ jest taka jakiej potrzebujemy dla zakończenia dowodu punktu (b). $\square$

Lemat 7.

Jeśli $\alpha > 1$ jest przeliczalną liczbą porządkową, to dowolna funkcja prosta klasy α określona na przestrzeni doskonałej jest granicą punktowo zbieżnego ciągu funkcji prostych klas β , gdzie $\beta \in \alpha$. Gdy $\alpha = \gamma + 1$ oraz γ jest liczbą porządkową graniczną, to dodatkowo $\beta \in \gamma$.

Dowód. Ustalamy funkcję prostą f klasy α określoną na przestrzeni doskonałej. Oznaczamy przez $y_0, y_1, \dots, y_n$ wszystkie punkty przeciwdziedziny funkcji f . Na podstawie lematu 5, przeciwobrazy

$$f^{-1}(y_0), f^{-1}(y_1), \dots, f^{-1}(y_n)$$

są zbiorami typu Δ_α . Czyli zbiorami typu F_α .

Gdy $0 \leq i \leq n$, to przedstawiamy zbiór $f^{-1}(y_i)$ jako sumę rosnących zbiorów $H_0^i \subseteq H_1^i \subseteq \dots$, które są zbiorami typów G_β , gdzie $\beta \in \alpha$. Skoro $\alpha > 1$ możemy założyć $\beta > 0$. Dla dowolnej liczby naturalnej k zbiory $H_k^0, H_k^1, \dots, H_k^n$ są rozłączne oraz są zbiorami typów G_β . Korzystamy z lematu 6 (b). Dobieramy rozłączne zbiory $K_k^0, K_k^1, \dots, K_k^n$ typów Δ_β takie, że dla dowolnej liczby naturalnych i zachodzi zawieranie $H_k^i \subseteq K_k^i$.

Dla dowolnej liczby naturalnej k połóżmy

$$g_k(x) = \begin{cases} y_i, & \text{dla } x \in K_k^i; \\ y_0, & \text{dla pozostałych } x. \end{cases}$$

Funkcja g_k jest funkcją prostą klasy β , gdyż przeciwobrazy punktów przez tę funkcję należą do ciała generowanego przez zbiory $K_k^1, K_k^2, \dots, K_k^n$; zaś elementy tego ciała są zbiorami typów Δ_β na podstawie lematu 2 (c).

Aby uzasadnić zbieżność punktową ciągu funkcji $g_0, g_1, \dots$ bierzemy punkt x . Wtedy $f(x) = y_i$ oraz istnieje liczba naturalna k taka, że $x \in H_k^i$. Skoro $x \in H_k^i$ oraz $H_0^i \subseteq H_1^i \subseteq \dots$, to dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq k$ zachodzi $f(x) = y_i = g_n(x)$. To wystarczy dla zbieżności punktowej.

Gdy $\alpha = \gamma + 1$ oraz γ jest liczbą porządkową graniczną, to zbiory postaci H_k^i są typu G_γ . Każdy z nich jest sumą przeliczalnej ilości zbiorów typów Δ_β , gdzie $\beta \in \gamma$, na podstawie lematu 2 (d). Każdy ze zbiorów H_k^i przedstawiamy jako przeliczalną sumę zbiorów typu Δ_β . To wystarczy dla zakończenia dowodu, bo suma przeliczalnej ilości rodzin przeliczalnych jest przeliczalną sumą elementów tych rodzin. Tak więc zamiast zbiorów H_s^p bierzemy skończone sumy zbiorów, które sumują zbiory H_s^p oraz są typów Δ_β . Dalej zbiory K_s^p dobieramy podobnie jak wyżej. $\square$

Lemat 8.

Dowolna ograniczona funkcja rzeczywista klasy $\alpha > 0$ określona na przestrzeni doskonalej jest granicą jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji prostych klasy α .

Dowód. Ustalamy ograniczoną funkcję rzeczywistą f klasy α . Bierzymy liczbę $\epsilon > 0$ i wybieramy zbiór skończony $\{y_0, y_1, \dots, y_n\}$ zawarty w przeciwdziedzinie funkcji f tak, aby dowolny punkt przeciwoobrazu funkcji f był odległy od tego zbioru o mniej niż $\frac{\epsilon}{2}$.

Dla dowolnej liczby naturalnej k rozważamy zbiory

$$X_k = \{x : |f(x) - y_k| \leq \frac{\epsilon}{2}\} \quad \text{oraz} \quad Y_k = \{x : |f(x) - y_k| \geq \epsilon\}.$$

Są to rozłączne przeciwoobrazy zbiorów domkniętych, a więc zbiory typu G_α . Korzystamy z lematu 6 (b) i wybieramy zbiór E_k typu Δ_α zawierający X_k oraz rozłączny z Y_k .

Kładziemy $H_0 = E_0$ oraz $H_n = E_n \setminus (E_0 \cup E_1 \cup \dots \cup E_{n-1})$. Jeśli punkt x należy do zbioru H_k , to kładziemy $g(x) = y_k$. Tym sposobem określiliśmy funkcję g przyjmującą wartości $y_0, y_1, \dots, y_n$. Jest ona funkcją prostą klasy α na podstawie lematu 5, gdyż przeciwoobrazy punktów są zbiorami $H_0, H_1, \dots, H_n$. Czyli zbiorami typu Δ_α . Dla dowolnego punktu x zachodzi nierówność

$$|f(x) - g(x)| < \epsilon.$$

To wystarcza dla zakończenia dowodu. □

Twierdzenie 9 (S. Banach).

Niech $\alpha > 1$ będzie przeliczalną liczbą porządkową. Wtedy dowolna funkcja rzeczywista klasy α określona na przestrzeni doskonalej jest granicą punktowo zbieżnego ciągu funkcji prostych klasy mniejszej niż α .

Dodatkowo, gdy $\alpha = \gamma + 1$ oraz γ jest graniczną liczbą porządkową, to funkcje ciągu punktowo zbieżnego można dobrać tak, aby były typów mniejszych niż γ

Dowód. Ustalamy ograniczoną funkcję rzeczywistą f klasy α . Założenie ograniczoności nie szkodzi ogólności, gdyż zbiór wszystkich liczb rzeczywistych jest homeomorficzny z przedziałem $(0, 1)$ oraz zbieżność punktowa ma charakter topologiczny. Korzystamy z lematu 8 i wybieramy ciąg $f_0, f_1, \dots$ funkcji prostych klasy α tak, aby dla dowolnego punktu x zachodziła nierówność

$$|f_n(x) - f_{n+1}(x)| < \frac{1}{2^n}.$$

Nierówność taką otrzymujemy gdy wybierzemy ciąg funkcji prostych $f_0, f_1, \dots$ tak, aby dla dowolnego punktu x zachodziła nierówność

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Skoro $\alpha > 1$, to korzystamy z lematu 7. Dla dowolnej liczby naturalnej n dobieramy ciąg funkcji prostych $f_{n,0}, f_{n,1}, \dots$ klas β punktowo zbieżny do funkcji f_n , gdzie $\beta \in \alpha$.

Określamy ciągi funkcji prostych $h_{m,0}, h_{m,1}, \dots$ klas β , gdzie $\beta \in \alpha$, następująco. Dla liczby naturalnej $m = 0$ kładziemy

$$f_{0,k}(x) = h_{0,k}(x).$$

Jeśli założymy, że określiliśmy liczbę $h_{m,k}(x)$, to kładziemy

$$h_{m+1,k}(x) = \begin{cases} f_{m+1,k}(x), & \text{gdy } |f_{m+1,k}(x) - h_{m,k}(x)| < \frac{1}{2^m}; \\ h_{m,k}(x), & \text{dla pozostałych } x. \end{cases}$$

Przeciwobrazy punktów przez funkcję $h_{m+1,n}$ należą do ciała generowanego przez przeciwobrazy punktów przez funkcje $h_{m,n}$ oraz $f_{m+1,n} - h_{m,n}$. Jeśli założymy, że funkcje $f_{m+1,n}$ oraz $h_{m,n}$ są funkcjami prostymi klasy β , wtedy to ciało składa się ze zbiorów typów Δ_β , gdyż różnica dwu funkcji prostych klasy β jest funkcją prostą tej samej klasy. To wystarcza dla dowodu indukcyjnego, że wszystkie funkcje $h_{p,s}$ są klas β , gdzie $\beta \in \alpha$.

Dla dowolnego punktu x rozważmy nierówność

$$|h_{m+1,n}(x) - f_{m+1}(x)| \leq |h_{m+1,n}(x) - f_{m+1,n}(x)| + |f_{m+1,n}(x) - f_{m+1}(x)|.$$

Jeśli założymy, że ciąg liczb $h_{m,0}(x), h_{m,1}(x), \dots$ jest zbieżny do liczby $f_m(x)$, to istnieje liczba naturalna k taka, że dla dowolnej liczby naturalnej $n > k$ zachodzi nierówność

$$|h_{m,n}(x) - f_{m+1,n}(x)| < \frac{1}{2^m}, \quad \text{bo} \quad |f_m(x) - f_{m+1}(x)| < \frac{1}{2^m}.$$

Czyli

$$h_{m+1,n}(x) = f_{m+1,n}(x).$$

Co pociąga zbieżność ciągu liczb $h_{m+1,0}(x), h_{m+1,1}(x), \dots$ do liczby $f_{m+1}(x)$. Innymi słowy dla dowolnej liczby naturalnej m ciąg funkcji $h_{m,0}, h_{m,1}, \dots$ jest punktowo zbieżny do funkcji f_m .

Pokażemy, że dla dowolnego punktu x zachodzi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_{n,n}(x) = f(x).$$

Ustalamy punkt x oraz liczbę rzeczywistą $\epsilon > 0$. Dobieramy liczbę naturalną m tak, aby

$$\frac{1}{2^m} < \frac{\epsilon}{6} \quad \text{oraz} \quad |f_m(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Następnie wybieramy liczbę naturalną $n > m$ tak, aby

$$|h_{m,n}(x) - f_m(x)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Skoro $0 < m < n$, to liczba $|h_{n,n}(x) - f(x)|$ jest nie większa od sumy

$$|h_{n,n}(x) - h_{n-1,n}(x)| + \dots + |h_{m+1,n}(x) - h_{m,n}(x)| + |h_{m,n}(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)|.$$

Dwa ostatnie składniki tej sumy są mniejsze od $\frac{\epsilon}{3}$ każdy. Suma pozostałych składników jest mniejsza od

$$\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-2}} + \dots + \frac{1}{2^m} < \frac{\epsilon}{3},$$

gdyż dla dowolnej liczby naturalnej k zachodzi nierówność

$$|h_{k,n}(x) - h_{k+1,n}(x)| < \frac{1}{2^k}.$$

Cała suma jest mniejsza od ϵ . To wystarcza dla zakończenia dowodu zbieżności punktowej ciągu $h_{0,0}, h_{1,1}, \dots$ do funkcji f .

Gdy $\alpha = \gamma + 1$ oraz γ jest graniczną liczbą porządkową, to na podstawie lematu 7 możemy przyjąć, że wszystkie funkcje $h_{p,s}$ są klas β , gdzie $\beta \in \gamma$. $\square$

Nie potrafimy udowodnić wersji twierdzenia 9 dla liczby porządkowej $\alpha = 1$. Dla tego brakuje faktu, że dowolna funkcja prosta klasy 1 jest granicą ciągu punktowo zbieżnego funkcji ciągłych.

Twierdzenie 9 pozostanie prawdziwe gdy zamiast funkcji rzeczywistych rozważymy funkcje idące w przestrzeń metryczną ośrodkową. Wiadomo, że dowolną przestrzeń metryczną ośrodkową można zanurzyć w kostkę Hilberta, która jest przestrzenią metryczną zwartą. Dowód lematu 8 pracuje dla funkcji idących w kostkę Hilberta. Podobnie jest z dowodami lematu 7 oraz twierdzenia 9. Z książki K. Kuratowskiego "Topology" tom I można wnosić, że twierdzenie 9 jest autorstwa F. Hausdorffa lub H. Lebesgue'a zaś jego wersja dla przestrzeni metrycznej ośrodkowej S. Banacha. Dowody podane przez F. Hausdorffa oraz H. Lebesgue'a w sposób istotny wykorzystują uporządkowanie zbioru liczb rzeczywistych. S. Banach ogłosił w 17 tomie Fundamenta Mathematicae dowód, który z niewielkimi zmianami przypomina dowód z książki K. Kuratowskiego "Topology" tom I oraz nasz dowód. Te dowody nie korzystają z uporządkowania zbioru liczb rzeczywistych. Istotne jest aby przeciwdziedzina spełniała twierdzenie o ϵ -sieci; tj. warunek mówiący, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $\epsilon > 0$ istnieje podzbiór skończony taki, że dowolny punkt przestrzeni jest odległy od niego o mniej niż ϵ .

Będziemy oznaczali przez ω zbiór wszystkich liczb naturalnych. Zaś zbiór wszystkich podzbiorów liczb naturalnych przez 2^ω . Najmniejszą topologię na zbiorze 2^ω , w której zbiory

$$\{A \in 2^\omega : x \subseteq A \subseteq \omega \setminus y\},$$

gdzie x oraz y są zbiorami skończonymi, są otwarte będziemy nazywali *topologią produktową*. Przestrzeń 2^ω z topologią produktową będziemy nazywali *zbiorem Cantora*.

Zbiór Cantora jest przestrzenią zwartą homeomorficzną z podzbiorem liczb rzeczywistych postaci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x_n}{3^n},$$

gdzie $x_0, x_1, \dots$ to ciąg zer i jedynek. Zbiory $\{A \in 2^\omega : x \subseteq A \subseteq \omega \setminus y\}$, gdzie x oraz y są zbiorami skończonymi, są domknięto-otwarte oraz tworzą bazę topologii. Innymi słowy zbiory typu Δ_0 tworzą bazę topologii produktowej.

Dla zbioru Cantora prawdziwe są wersje lematu 6 oraz lematu 8 przy założeniu $\alpha = 0$. Prawdziwe są także wersje lematu 7 oraz twierdzenia 9 przy założeniu $\alpha = 1$. Dowody przebiegają tak samo. Korzystamy z faktu, iż dowolny podzbiór otwarty zbioru Cantora jest sumą przeliczalnej ilości zbiorów domknięto-otwartych.

Lemat 10.

Niech α będzie liczbą porządkową przeliczalną niegraniczną. Jeśli f oraz g są funkcjami rzeczywistymi klasy α określonymi na zbiorze Cantora oraz h jest funkcją rzeczywistą ciągłą określoną na zbiorze liczb rzeczywistych, to funkcje $f + g, f - g, fg, |f|, h(f), \max(f, g)$ oraz $\min(f, g)$ są funkcjami klasy α .

Dowód. Jest tak dla $\alpha = 0$, bo wtedy f oraz g są funkcjami ciągłymi i teza jest oczywista.

Jeśli założymy, że f oraz g są funkcjami rzeczywistymi klasy $\beta + 1$, to korzystamy z twierdzenia 9 i dobieramy ciągi funkcji prostych

$$f_0, f_1, \dots \quad \text{oraz} \quad g_0, g_1, \dots$$

klasy β lub klas $\gamma \in \beta$, gdy β jest liczbą graniczną, zbieżne do funkcji f oraz g , kolejno. Wtedy

$$f(x) + g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x) + g_n(x)),$$

$$f(x) - g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x) - g_n(x)),$$

$$f(x)g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)g_n(x),$$

$$h(g(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(g_n(x)).$$

Z prawych stron mamy granice funkcji klasy β lub klas $\gamma \in \beta$, gdy β jest liczbą graniczną. Korzystamy z twierdzenia 4 wnioskując, że funkcje z lewych stron są klasy $\beta + 1$. Gdy położymy $h(x) = |x|$, to wnioskujemy, że $|f|$ jest klasy $\beta + 1$. Zachodzi

$$\max\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x) + g(x)}{2} + \frac{|f(x) - g(x)|}{2}$$

oraz

$$\min\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x) + g(x)}{2} - \frac{|f(x) - g(x)|}{2}.$$

co pociąga, że funkcje $\max(f, g)$ oraz $\min(f, g)$ są klasy $\beta + 1$. To wystarczy. $\square$

Lemat 11.

Niech α będzie liczbą porządkową przeliczalną niegraniczną. Jeśli funkcje borelowskie $f_0(x), f_1(x), \dots$ są klasy α , to funkcje będące granicami

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \text{oraz} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

są klasy $\alpha + 2$.

Dowód. Dla dowolnego punktu x zachodzą równości

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \max\{f_n(x), f_{n+1}(x), \dots, f_{n+k}(x)\}$$

oraz

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \min\{f_n(x), f_{n+1}(x), \dots, f_{n+k}(x)\}$$

Funkcje

$$\max(f_n, f_{n+1}, \dots, f_{n+k}) \quad \text{oraz} \quad \min(f_n, f_{n+1}, \dots, f_{n+k})$$

są klasy α na podstawie poprzedniego lematu. Na podstawie twierdzenia 4, stosowanego dwukrotnie, granice z prawej strony dają funkcje klasy $\alpha + 2$. $\square$

Twierdzenie 12 (H. Lebesgue).

Dla dowolnej liczby porządkowej przeliczalnej α istnieje funkcja borelowska $F_\alpha(x, y)$ określona na produkcie zbiorów Cantora $2^\omega \times 2^\omega$ taka, że jeśli f jest funkcją rzeczywistą klasy α określoną na zbiorze Cantora, to istnieje punkt $y \in 2^\omega$ taki, że dla dowolnego punktu x zachodzi

$$f(x) = F_\alpha(x, y).$$

Dowód. Przedstawiamy zbiór wszystkich liczb naturalnych w postaci sumy zbiorów $A_0, A_1, \dots$ nieskończonych i rozłącznych. Dla dowolnej liczby naturalnej n oraz dowolnego punktu $x \in 2^\omega$ położmy

$$g_n(x) = x|_{A_n}.$$

Tak określona funkcja g_n jest funkcją ciągłą. Czyli funkcja przyporządkowująca parze (x, y) parę $(x, g_n(y))$ jest funkcją ciągłą.

Założmy, że dla $\beta \in \alpha$ funkcje borelowskie $F_\beta(x, y)$ są określone. Wybieramy niemalejący ciąg $\beta_0, \beta_1, \dots$ liczb porządkowych tak, aby α było najmniejszą liczbą

porządkową większą od wszystkich liczb porządkowych β_n . Przyjmujemy, że funkcja F_{β_n} jest określona na zbiorze $2^\omega \times 2^{A_n}$. Jest to możliwe gdy przestrzenie 2^{A_n} oraz 2^ω z topologią produktową są homeomorficzne (do tego potrzeba aby zbiór A_n był równoliczny ze zbiorem ω - co założyliśmy). Następnie kładziemy

$$F_\alpha(x, y) = \limsup_{n \rightarrow \infty} F_{\beta_n}(x, g_n(y)).$$

Dowolna funkcja $F_{\beta_n}(x, g_n(y))$ jest funkcją borelowską jako złożenie funkcji ciągłej i funkcji borelowskiej. Czyli F_α jest funkcją borelowską na podstawie poprzedniego lematu.

Bierzemy funkcję rzeczywistą f klasy $\alpha > 0$ określoną na zbiorze Cantora. Korzystamy z twierdzenia 9. Dobieramy ciąg $f_0, f_1, \dots$ funkcji prostych tak, aby dla dowolnej liczby naturalnej n funkcja f_n była klasy $\beta_n \in \alpha$ oraz dla dowolnego punktu x zachodziła równość

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

Dla dowolnej liczby naturalnej n istnieje punkt y_n taki, że

$$f_n(x) = F_{\beta_n}(x, y_n).$$

Niech $y \in 2^\omega$ będzie punktem takim, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi $g_n(y) = y_n$. Skoro zbiory $A_0, A_1, \dots$ są rozłączne, to taki dobór jest możliwy. Mamy

$$\begin{aligned} F_\alpha(x, y) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} F_{\beta_n}(x, g_n(y)) = \limsup_{n \rightarrow \infty} F_{\beta_n}(x, y_n) = \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x). \end{aligned}$$

Powyższe wystarcza dla dowodu indukcyjnego o ile określimy pierwszy krok w indukcji, tj. funkcję $F_0(x, y)$. Aby to zrobić ustawiamy w ciąg $P_0(x), P_1(x), \dots$ wszystkie funkcje proste klasy 0 określone na zbiorze Cantora i przyjmujące wartości wymierne. Wybieramy ciąg różnych punktów $y_0, y_1, \dots$ należących do 2^ω .

Oznaczamy przez $E_n(x, y)$ funkcję charakterystyczną zbioru $2^\omega \times \{y_n\}$. Następnie kładziemy

$$F_{-1}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) E_n(x, y).$$

Skoro $E_n(x, y)$ jest funkcją charakterystyczną zbioru domkniętego, to jest funkcją klasy 1. Czyli funkcja F_{-1} jest granicą punktowo zbieżnego ciągu funkcji klasy 1. Na podstawie twierdzenia 4 jest funkcją klasy 2. Funkcję $F_0(x, y)$ określamy jak wyżej funkcję $F_\alpha(x, y)$, przyjmując $-1 = \beta_n$. $\square$

Twierdzenie 13. (H. Lebesgue).

Dla dowolnej przeliczalnej liczby porządkowej α istnieje funkcja borelowska określona na zbiorze Cantora, która nie jest funkcją klasy α .

Dowód. Korzystamy z poprzedniego twierdzenia i zakładamy, dla dowodu niewprost, że istnieje funkcja dwu zmiennych F taka, że dla dowolnej funkcji borelowskiej f istnieje punkt t taki, że dla dowolnego punktu $x \in 2^\omega$ zachodzi

$$f(x) = F(x, t).$$

Rozważmy funkcję

$$f(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nF(x, t)}{1 + nF(x, t)}.$$

Jest to funkcja borelowska przyjmująca wartości 0 lub 1. Dowolną funkcję borelowską przyjmującą wartości 0 lub 1 można przedstawić w formie $f(x, t)$. Między innymi funkcję $1 - f(x, x)$. Wtedy mamy

$$1 - f(x, x) = f(x, t).$$

Co po podstawieniu t za x daje

$$f(t, t) = \frac{1}{2},$$

a więc sprzeczność. □

Pod koniec XIX i początkiem XX wieku kilku matematyków zajmowało się problemami związanymi z klasyfikacją funkcji borelowskich. Byli to, między innymi: R. Baire, E. Borel, H. Lebesgue oraz W. H. Young. Późniejsi autorzy używali ich nazwisk dla nadawania nazw różnym pojęciom. Tradycyjnie granica punktowa ciągu funkcji ciągłych jest nazywana *funkcją 1 klasy Baire'a*. Wcześniej odnotowaliśmy, że funkcja rzeczywistych określonych na zbiorze Cantora jest 1 klasy Baire'a gdy jest klasy 1. Obecnie rozszerzymy to na inne przestrzenie.

Będziemy mówili, że przestrzeń topologiczną jest *normalna* gdy dowolna funkcja rzeczywista prosta ciągła określona na podzbiorze domkniętym tej przestrzeni ma rozszerzenie do funkcji rzeczywistej ciągłej określonej na całej przestrzeni. Przestrzeń normalną, która jest również przestrzenią doskonałą będziemy nazywali *doskonale normalną*. Odnotujmy, że dowolna przestrzeń metryzowalna jest doskonale normalna. Fakt ten bywa czasami przedstawiany jako twierdzenie H. Tietze.

Lemat 14.

Dowolna funkcja rzeczywista prosta klasy 1 określona na przestrzeni doskonale normalnej jest granicą punktowo zbieżnego ciągu funkcji ciągłych.

Dowód. Ustalamy funkcję rzeczywistą f prostą klasy 1. Dla punktu x przeciwbraz $f^{-1}(x)$ przedstawiamy w formie sumy przeliczalnej ilości zbiorów domkniętych. Tak otrzymane zbiory domknięte ustawiamy w ciąg. Oznaczamy przez

D_n sumę pierwszych n zbiorów tego ciągu. Następnie korzystamy z normalności przestrzeni i dobieramy funkcję ciągłą f_n będącą rozszerzeniem obciążenia $f|_{D_n}$. Ciąg funkcji ciągłych $f_0, f_1, \dots$ jest takim jakiego potrzebujemy. $\square$

Następne twierdzenie pochodzi od H. Lebesgue'a. Przytoczony dowód pracuje dla funkcji o wartościach w przestrzeni metrycznej ośrodkowej i jest wzorowany na dowodzie twierdzenia 9. Taki sposób dowodzenia pochodzi od S. Banacha i jest przedstawiony w książce K. Kuratowskiego "Topology".

Twierdzenie 15. (H. Lebesgue).

Dowolna funkcja rzeczywista klasy 1 określona na przestrzeni doskonale normalnej jest granicą punktowo zbieżnego ciągu funkcji ciągłych.

Dowód. Ustalamy ograniczoną funkcję rzeczywistą f klasy 1. Założenie ograniczoności nie szkodzi ogólności, gdyż zbiór wszystkich liczb rzeczywistych jest homeomorficzny z przedziałem $(0, 1)$ oraz zbieżność punktowa ma charakter topologiczny. Korzystamy z lematu 8 i wybieramy ciąg $f_0, f_1, \dots$ funkcji prostych klasy 1 tak, aby funkcja f_0 była stale równa zero oraz dla dowolnego punktu x i dla dowolnej liczby naturalnej $n > 1$ zachodziła nierówność

$$|f_n(x) - f_{n-1}(x)| < \frac{1}{2^n}.$$

Dla dowolnej liczby naturalnej n różnica $f_n - f_{n-1}$ jest funkcją prostą klasy 1. Korzystamy z lematu 14 i dobieramy ciąg $f_{n,0}, f_{n,1}, \dots$ funkcji ciągłych punktowo zbieżny do funkcji $f_n - f_{n-1}$, przy czym zakładamy, że dla dowolnego punktu x zachodzi $|f_{n,k}(x)| \leq \frac{1}{2^n}$. Dalej kładziemy

$$h_{m,n}(x) = - \sum_{i=0}^m f_{i,n}(x).$$

Ciągi funkcji ciągłych $h_{m,0}, h_{m,1}, \dots$ jest punktowo zbieżny do funkcji f_m oraz dla dowolnego punktu x i dla prawie wszystkich n zachodzi

$$|h_{m+1,n}(x) - h_{m,n}(x)| \leq \frac{1}{2^m}.$$

Dalej podobnie jak w dowodzie twierdzenia 9 wnioskujemy, że ciąg $h_{0,0}, h_{1,1}, \dots$ jest ciągiem funkcji punktowo zbieżnym do funkcji f . $\square$

Przypuśćmy, że funkcja rzeczywista f jest określona na przestrzeni topologicznej. Dla punktu x należącego do domknięcia dziedziny funkcji f niech $\omega(x)$ oznacza kres dolny średnic zbiorów $f(G)$, gdzie G przebiega otwarte otoczenia punktu x . Funkcję ω będziemy nazywali *oscylacją funkcji f* .

Lemat 16.

(a) Jeśli $\varepsilon > 0$ jest liczbą rzeczywistą, to zbiór punktów dla których oscylacja funkcji rzeczywistej jest nie mniejsza od ε jest domknięty.

(b) Zbiór punktów, w których funkcja rzeczywista jest ciągła jest równy podzbiorowi dziedziny składającemu się z punktów, dla których oscylacja funkcji jest równa zero.

Dowód. Ustalamy funkcję rzeczywistą f określoną na przestrzeni topologicznej oraz liczbę rzeczywistą $\varepsilon > 0$. Bierzemy zbiór X złożony z punktów, dla których oscylacja ω funkcji f jest nie mniejsza od ε . Gdy punkt x należy do domknięcia zbioru X , to dowolne otoczenie otwarte G punktu x zawiera punkt z dziedziny funkcji f należący do X , a więc jest otwartym otoczeniem takiego punktu. Stąd średnica zbioru $f(G)$ jest większa od ε . To pociąga $\omega(x) \geq \varepsilon$ i wystarcza dla uzasadnienia (a).

Gdy x jest punktem ciągłości funkcji f , to wewnątrz przeciwobrazu dowolnego zbioru otwartego zawierającego liczbę $f(x)$ zawiera punkt x . To wystarcza dla równości $\omega(x) = 0$

Gdy $\omega(x) = 0$, to dla dowolnej liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór otwarty G taki, że $x \in G$ oraz średnica obrazu $f(G)$ jest mniejsza od ε . Skoro $f(x) \in f(G)$, to $f(G)$ jest zawarte w kuli otwartej o promieniu ε oraz środku $f(x)$. To wystarcza dla uzasadnienia (b). $\square$

Twierdzenie 17 (R. Baire).

Zbiór punktów nieciągłości funkcji 1 klasy Baire'a określonej na przestrzeni topologicznej jest sumą przeliczalnej ilości zbiorów domkniętych o pustych wnętrzach.

Dowód. Ustalamy funkcję f rzeczywistą 1 klasy Baire'a określoną na przestrzeni topologicznej. Korzystamy z poprzedniego lematu i dla dowolnej liczby naturalnej n bierzemy zbiór domknięty

$$E_n = \{x : \omega(x) \geq \frac{1}{n}\}.$$

Zbiór punktów nieciągłości funkcji f jest równy sumie $E_0 \cup E_1 \cup \dots$, a więc na podstawie poprzedniego lematu jest zbiorem typu F_σ . Pozostało wykazać, że dowolny zbiór E_n jest sumą przeliczalnej ilości zbiorów domkniętych o pustych wnętrzach.

Bierzemy ciąg $f_0, f_1, \dots$ funkcji ciągłych punktowo zbieżny do funkcji f . Dla dowolnej liczby naturalnej k kładziemy

$$H_k = \{x : |f_m(x) - f_k(x)| \leq \frac{1}{3n} \quad \text{oraz} \quad m > k\}.$$

Skoro funkcje $f_0, f_1, \dots$ są ciągłe, to zbiory $H_0, H_1, \dots$ są domknięte. Zbieżność punktowa ciągu $f_0, f_1, \dots$ pociąga, że suma zbiorów $H_0, H_1, \dots$ jest dziedziną

funkcji f . Wystarczy gdy dla dowolnej liczby naturalnej k pokażemy, że wewnątrz zbioru H_k jest rozłączne ze zbiorem E_n .

Przypuśćmy, że punkt x należy do wnętrza zbioru H_k . Korzystamy z ciągłości funkcji f_k i dobieramy otwarte otoczenie G punktu x zawarte w H_k tak, aby średnica obrazu $f_k(G)$ była mniejsza od $\frac{1}{4n}$. Dla dowolnych punktów y oraz z zachodzi nierówność

$$|f(y) - f(z)| \leq |f(y) - f_k(y)| + |f_k(y) - f_k(z)| + |f_k(z) - f(z)|.$$

Gdy punkty y oraz z należą do G , to z prawej strony tej nierówności pierwszy i trzeci składnik są niewiększe od $\frac{1}{3n}$, bo punkty y oraz z należą do H_k . Zaś drugi składnik jest mniejszy od $\frac{1}{4n}$ z założenia. Czyli suma jest mniejsza od $\frac{11}{12n}$. To pociąga, że $\omega(x) < \frac{1}{n}$. Co oznacza, że x nie należy do E_n . To wystarcza dla zakończenia dowodu. $\square$

Podany wyżej dowód pochodzi od K. Kuratowskiego. Jego zaletą jest to, że pracuje dla funkcji o wartościach w dowolnej przestrzeni metrycznej. Gdy jest to przestrzeń metryczna nieośrodkowa, to wtedy funkcje klasy 1 oraz funkcje 1 klasy Baire'a, chodzi tu o klasy funkcji definiowane podobnie jak dla funkcji rzeczywistych, nie pokrywają się. W książce K. Kuratowskiego "Topology" tom 1 podany jest inny dowód twierdzenia 4, który pracuje dla funkcji o wartościach w przestrzeni z bazą przeliczalną.

Twierdzenie 18. (R. Baire).

Jeśli funkcja rzeczywista f klasy 1 jest określona na przestrzeni metrycznej zupełnej, to zbiór punktów ciągłości f jest zbiorem gęstym typu G_δ oraz dla dowolnego podzbioru domkniętego D zawartego w dziedzinie funkcji f obcięcie $f|_D$ ma gęsty w D zbiór punktów ciągłości.

Dowód. Ustalamy przestrzeń metryczną X zupełną oraz funkcję rzeczywistą f klasy 1 określoną na X . Skoro przestrzeń metryczna jest normalna, to funkcja f jest 1 klasy Baire'a na podstawie twierdzenia 15. Korzystamy z poprzedniego twierdzenia i otrzymujemy, że zbiór punktów ciągłości funkcji f jest typu G_δ oraz jego dopełnienie jest 1 kategorii. Na podstawie twierdzenia Baire'a, tj. faktu mówiącego, że w przestrzeni metryzowalnej w sposób zupełny przekrój przeliczalnej ilości zbiorów otwartych i gęstych jest zbiorem gęstym, wnioskujemy, iż zbiór punktów ciągłości funkcji f jest zbiorem gęstym typu G_δ . Drugą część tezy otrzymujemy podobnie jak pierwszą z tym, że korzystamy z faktu, iż domknięty podzbiór przestrzeni metrycznej zupełnej jest metryzowalny w sposób zupełny. $\square$

Fakt użyty dla uzasadnienia drugiej części powyższego dowodu znany jest jako

twierdzenie P. S. Aleksandrowa. W rzeczywistości P. S. Aleksandrow pokazał, że dowolny podzbiór typu G_δ zawarty w przestrzeni metrycznej zupełnej można wyposażyć w metrykę równoważną, w której jest przestrzenią metryczną zupełną.

Lemat 19.

Jeśli x jest punktem ciągłości funkcji f oraz x należy do domknięcia przeciwobrazu $f^{-1}(Y)$, to $f(x)$ należy do domknięcia zbioru Y .

Dowód. Przypuśćmy, dla dowodu niewprost, że punkt $f(x)$ nie należy do domknięcia zbioru Y . Wtedy przeciwobraz dopełnienia domknięcia zbioru Y , a więc przeciwobraz otwartego otoczenia punktu $f(x)$, nie zawiera punktu x . Mamy sprzeczność, która wystarcza dla zakończenia dowodu. $\square$

Twierdzenie 20. (R. Baire).

Jeśli funkcja rzeczywista określona na przestrzeni topologicznej przy obcięciu do dowolnego podzbioru domkniętego ma punkt ciągłości, to jest klasy 1.

Dowód. Ustalamy funkcję rzeczywistą f o własnościach jak w założeniach oraz domknięty podzbiór liczb rzeczywistych F . Wystarczy pokazać, że przeciwobraz $f^{-1}(F)$ jest zbiorem typu G_δ . Przedstawiamy dopełnienie zbioru F w postaci sumy zbiorów $F_0, F_1, \dots$ domkniętych. Pokażemy, że dopełnienie przeciwobrazu $f^{-1}(F)$ jest sumą domknięć zbiorów $f^{-1}(F_0), f^{-1}(F_1), \dots$, a więc jest zbiorem typu F_σ . Dla tego wystarcza pokazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n domknięcia przeciwobrazów $f^{-1}(F)$ oraz $f^{-1}(F_n)$ są rozłączne. Oznaczamy przez X przekrój tych domknięć. Przypuśćmy, dla dowodu niewprost, że punkt x jest punktem ciągłości obcięcia $f|_X$. Na podstawie poprzedniego lematu liczba $f(x)$ należy do zbioru F oraz do zbioru F_n ; co jest niemożliwe. Skoro dopełnienie zbioru $f^{-1}(F)$ jest sumą domknięć zbiorów $f^{-1}(F_0), f^{-1}(F_1), \dots$, to jest typu G_δ . $\square$