9. Różniczkowanie.

Jeśli f jest funkcją rzeczywistą, to granice

$$D^+f(x) = \limsup_{t\to x^+} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}, \qquad D^-f(x) = \limsup_{t\to x^-} \frac{f(t)-f(x)}{t-x},$$

$$D_+f(x) = \liminf_{t\to x^+} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} \qquad \text{oraz} \qquad D_-f(x) = \liminf_{t\to x^-} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}$$

będziemy nazywali *pochodnymi Diniego: prawostronną górną, lewostronną górną, prawostronną dolną* oraz *lewostronną dolną.*

Twierdzenie 9.1 (W. Sierpiński, W. Young): *Dla dowolnej funkcji rzeczywistej f zbiory*

$$\{x : D^+f(x) < D_-f(x)\} \text{ oraz } \{x : D^-f(x) < D_+f(x)\}$$

są co najwyżej przeliczalne.

Dowód. Dla dowolnej liczby wymiernej q kładziemy

$$E_q = \{x : D^+f(x) < q < D_-f(x)\}.$$

Jeśli punkt $y \in E_q$, to w punkcie y prawostronna górna pochodna Diniego jest mniejsza niż q; zaś lewostronna dolna większa niż q : dobieramy dwie liczby wymierne $a > y$ oraz $b < y$ tak, aby dla dowolnych liczb $s \in [y, a)$ oraz $t \in (b, y]$ zachodziły nierówności

$$f(s) - f(y) - q(s-y) < 0 \qquad \text{oraz} \qquad f(t) - f(y) - q(t-y) < 0$$

- pierwsza nierówność wynika z $D^+f(y) < q$; zaś $D_-f(y) > q$ oraz $t - y < 0$ implikują drugą. To oznacza, że funkcja: $x \to f(x) - qx$ ma silne maksimum: w pozostałych punktach przedziału (b, a) przyjmuje wartości mniejsze. Przedziałów o końcach wymiernych jest przeliczalnie wiele, a więc zbiór E_q jest przeliczalny. To wystarcza dla dowodu przeliczalności zbioru $\{x : D^+f(x) < D_-f(x)\}$: zbiór ten jest sumą zbiorów postaci E_q, gdzie q przebiega liczby wymierne; zbiór ten jest to sumą przeliczalnej ilości zbiorów przeliczalnych.

Uzasadnienie przeliczalności zbioru $\{x : D^-f(x) < D_+f(x)\}$ jest analogiczne: sprowadza się do zamiany znaku $<$ na symbol $>$ $\square$

Oznaczamy przez λ miarę zewnętrzną Lebesgue'a - w tym wykładzie jedyną używaną miarą będzie miara Lebesgue'a: przypominamy

$$\lambda(X) = \inf\{\lambda(U) : X \subseteq U \text{ oraz zbiór } U \text{ jest otwarty}\}.$$

Dla badania różniczkowalności funkcji rzeczywistej f określonej na zbiorze liczb rzeczywistych - lub przedziale - czasami lepiej posługiwać się stowarzyszoną z nią funkcją przedziału określoną wzorem

$$\mathtt{f}([a,b]) = f(b) - f(a).$$

Przyjmijmy umowę, że ciąg przedziałów $I_0, I_1, \ldots$ jest zbieżny do punktu x, gdy x należy do prawie wszystkich przedziałów I_n oraz ciąg średnic $\lambda(I_0), \lambda(I_1), \ldots$ jest zbieżny do zera: funkcja f jest ciągła w punkcie x wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{I\to x} \mathtt{f}(I) = 0$.

Będziemy mówili, że rodzina przedziałów domkniętych U *pokrywa - w sensie Vitaliego,* zbiór X, gdy dla dowolnej liczby rzeczywistej $\epsilon > 0$ istnieje podrodzina $V \subseteq U$ złożona z przedziałów o średnicy mniejszej od ϵ zawierająca X w swojej sumie.

Lemat 9.2 (G. Vitali): *Jeśli rodzina przedziałów domkniętych pokrywa w sensie Vitaliego zbiór ograniczony X, to z tej rodziny można wybrać ciąg $I_0, I_1, \ldots$ przedziałów rozłącznych tak, aby różnica $X \setminus (I_0 \cup I_1 \cup \ldots)$ była miary zero.*

Dowód (S. Banach). Ustalamy rodzinę V pokrywającą - w sensie Vitaliego, zbiór X oraz złożoną z przedziałów domkniętych taką, że suma $\cup V$ jest ograniczona: zbiór X jest ograniczony i gdy rozważymy przedziały przecinające X oraz o średnicy mniejszej niż 1, to suma takich przedziałów będzie zbiorem ograniczonym; zaś gdy dodatkowo będą to przedziały z ustalonej rodziny pokrywającej - w sensie Vitaliego, zbiór X, to otrzymamy rodzinę o takiej samej właściwości. Wybieramy przedział $I_0 \in V$, a następnie zakładamy, że określiliśmy rozłączne przedziały $I_0, I_1, \ldots, I_n$ należące do V. Gdy $X \subseteq I_0 \cup I_1 \cup \ldots \cup I_n$, to przerywamy indukcję. Gdy tak nie jest, to kładziemy

$$m_n = \sup\{\lambda(I) : I \subseteq \cup V \setminus (I_0 \cup I_1 \cup \ldots \cup I_n)\}$$

- sprawdzamy, że $m_n > 0$ oraz dobieramy przedział $I_{n+1} \in V$ tak, aby

$$2\lambda(I_{n+1}) > m_n \qquad \text{oraz} \qquad I_{n+1} \subseteq \cup V \setminus (I_0 \cup I_1 \cup \ldots \cup I_n).$$

Wystarczy pokazać, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $\epsilon > 0$ istnieje liczba naturalna n taka, że

$$\lambda(X \setminus (I_0 \cup I_1 \cup \ldots \cup I_n)) < \epsilon.$$

Dla dowolnej liczby naturalnej k dobieramy przedział J_k o takim samym środku jak przedział I_k oraz o średnicy 5 razy większej od średnicy przedziału I_k. Skoro $\lambda(\cup V)$ jest liczbą rzeczywistą, to szeregi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda(I_n) \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(J_n)$$

są zbieżne. Dla zakończenia dowodu wystarczy pokazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi zawieranie

$$X \setminus (I_0 \cup I_1 \cup \ldots) \subseteq \cup\{J_k : k \geqslant n\} :$$

bo $\lim_{n\to\infty} \lambda(\cup\{J_k : k \geqslant n\}) = 0$ - co wynika ze zbieżności szeregu o składnikach $\lambda(J_k)$. Ustalamy liczbę naturalną n oraz bierzemy punkt $y \in X$, nienależący do sumy zbiorów I_n. Skoro zawsze suma $I_0 \cup I_1 \cup \ldots \cup I_n$ jest zbiorem domkniętym, to dobieramy przedział $I \in V$ rozłączny z tą sumą oraz zawierający punkt y. Następnie ustalamy liczbę m_k taką, że przedział I przecina I_k oraz jest rozłączny z przedziałami $I_0, \ldots, I_{k-1}$. Wtedy mamy $I \subseteq J_k$: bo średnica przedziału I jest nie większa od m_k. Przedział ten przecina I_k oraz podwojona średnica przedziału I_k jest większa od m_k : musi być $k > n$ - co wystarcza dla zakończenia dowodu $\square$

O funkcji rzeczywistej f określonej na przedziale (a, b) będziemy mówili, że jest *różniczkowalna* w punkcie x, gdy granica

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{I\to x} \frac{\mathtt{f}(I)}{\lambda(I)}$$

istnieje oraz jest skończona: granicę tę będziemy oznaczali przez $f'(x)$. Będziemy mówili, że funkcja jest *różniczkowalna* na zbiorze D, gdy jest różniczkowalna w każdym punkcie zbioru D.

Twierdzenie 9.3 (H. Lebesgue): *Rosnąca funkcja rzeczywista f określona na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych - lub przedziale - jest różniczkowalna poza zbiorem miary zero; dodatkowo dla dowolnego przedziału $[a, b]$ zawartego w dziedzinie funkcji f zachodzi $\int_{[a,b]} f' d\lambda \leqslant f(b) - f(a)$.*

Dowód. Dobieramy - dla dowodu niewprost, dwie liczby wymierne r oraz s tak, aby zbiór

$$E = \{x : \limsup_{I\to x} \frac{\mathtt{f}(I)}{\lambda(I)} > r > s > \liminf_{I\to x} \frac{\mathtt{f}(I)}{\lambda(I)}\}$$

miał miarę zewnętrzną Lebesgue'a dodatnią, a następnie ustalamy liczbę rzeczywistą $\epsilon > 0$ oraz dobieramy zbiór otwarty G tak, aby $E \subseteq G$ oraz $\lambda(G) < \lambda(E) + \epsilon$.

Rozważmy rodzinę - o której zakładamy, iż składa się wyłącznie z przedziałów domkniętych,

$$V = \{I : I \subseteq G \text{ oraz } \mathtt{f}(I) < s\lambda(I)\}.$$

Skoro - dla dowolnego punktu $x \in E$, zachodzi $\liminf_{I\to x} \frac{\mathtt{f}(I)}{\lambda(I)} < s$, to rodzina V jest pokryciem - w sensie Vitaliego, zbioru E : dobieramy ciąg rozłącznych przedziałów $I_0, I_1, \ldots$ należących do V tak, aby $\lambda(E \setminus (I_0 \cup I_1 \cup \ldots)) = 0$.

Rozważmy rodzinę - o której zakładamy, iż składa się wyłącznie z przedziałów domkniętych,

$$U = \cup\{\{J : J \subseteq I_n \text{ oraz } \mathtt{f}(J) > r\lambda(J)\} : n \in \omega_0\}.$$

Skoro dla dowolnego punktu $x \in E$ zachodzi $\limsup_{I\to x} \frac{\mathtt{f}(I)}{\lambda(I)} > r$, to U jest pokryciem - w sensie Vitaliego, przekroju zbioru E z sumą wnętrz przedziałów $I_0, I_1, \ldots$: dobieramy należące do U oraz rozłączne przedziały $J_{m,n} \subseteq I_m$ tak, aby

$$\lambda(E \setminus \cup\{J_{m,n} : m \in \omega_0 \text{ oraz } n \in \omega_0\}) = 0.$$

Liczby r oraz s są dodatnie - bo funkcja f jest rosnąca, a więc mamy

$$r(\lambda(G) - \epsilon) \leqslant r \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \lambda(J_{m,n}) < \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \mathtt{f}(J_{m,n}) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=0}^{\infty} \mathtt{f}(I_m) < s \sum_{m=0}^{\infty} \lambda(I_m) \leqslant s\lambda(G).$$

Skoro $\epsilon > 0$ było dobrane dowolnie oraz $r > s$, to musiałoby być $\lambda(G) = 0$: funkcja f jest różniczkowalna poza zbiorem miary zero.

Ustalamy przedział $[a, b]$ tak, aby jego końce były punktami ciągłości funkcji f : funkcja f jest rosnąca, a więc co najwyżej w przeliczalnej ilości punktów jest nieciągła. Dla dowolnego punktu $x \in (a, b)$ liczba $n(f(x + \frac{1}{n}) - f(x))$ jest nieujemna oraz $\lim_{n\to\infty} n(f(x+\frac{1}{n}) - f(x)) = f'(x)$ poza zbiorem miary zero - na podstawie z lematu Fatou, ciągłości funkcji f w punktach a i b oraz addytywności całki otrzymujemy

$$\int_{[a,b]} f' d\lambda \leqslant \liminf_{n\to+\infty} n(\int_{[a,b]} f(x+\frac{1}{n}) - f(x) d\lambda = \lim_{n\to+\infty} n(\int_{[b,b+\frac{1}{n}]} f d\lambda - \int_{[a,a+\frac{1}{n}]} f d\lambda)$$

$$= \lim_{n\to\infty} f(b + \frac{1}{n}) - \lim_{n\to+\infty} f(a + \frac{1}{n}) = f(b) - f(a).$$

Dla zakończenia dowodu wystarcza uwaga, że liczba $\int_{[a,b]} f' d\lambda$ zależy jedynie od wartości funkcji f w przedziale (a, b), a więc funkcję f można zmieniać poza przedziałem (a, b): być może przy tym zwiększyć $f(a)$ oraz zmiejszyć $f(b)$, i otrzymać rosnącą funkcję, dla której punkty a oraz b są punktami ciągłości $\square$

Twierdzenie 9.4 (N. Łuzin): *Jeśli funkcja rzeczywista f jest różniczkowalna na zbiorze D, to przeprowadza ona podzbiory zbioru D miary zero na podzbiory miary zero; zaś gdy $f'(x) = 0$ - dla $x \in D$, to miara obrazu zbioru D przez funkcję f wynosi zero.*

Dowód. Ustalamy liczbę rzeczywistą $M > 0$ oraz podzbiór

$$E \subseteq \{x \in D : f'(x) < M\}.$$

Dla dowolnej liczby rzeczywistej $\epsilon > 0$ dobieramy ciąg $I_0, I_1 \ldots$ przedziałów otwartych zawierających w swojej sumie zbiór E tak, aby

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda(I_n) < \lambda(E) + \frac{\epsilon}{M}$$

oraz zawsze zachodziło

$$\sup\{f(x) : x \in I_n\} - \inf\{f(x) : x \in I_n\} < M\lambda(I_n) :$$

dobór przedziałów I_n jest możliwy, bo funkcja f jest różniczkowalna na zbiorze E. Otrzymujemy

$$\lambda(f(E)) \leqslant M \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(I_n) \leqslant M(\lambda(E) + \frac{\epsilon}{M}) :$$

bo zawsze obraz przedziału I_n przez funkcję f jest zawarty w zbiorze o mierze $M\lambda(I_n)$. Skoro liczbę $\epsilon > 0$ można dobrać dowolnie, to otrzymaliśmy

$$\lambda(f(E)) \leqslant M\lambda(E) :$$

ta nierówność zastosowana przy założeniu $\lambda(E) = 0$ lub dla dowolnie małej liczby $M > 0$ wystarcza dla zakończenia dowodu $\square$

Przypominamy, że o funkcji rzeczywistej f mówimy, że jest *o wahaniu skończonym* w przedziale $[a, b]$ gdy istnieje liczba rzeczywista M taka, że dla dowolnego ciągu $I_0, I_1, \ldots$ przedziałów zawartych w $[a, b]$ oraz przecinających się na zbiorach co najwyżej jednopunktowych zachodzi

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\mathtt{f}(I_n)| < M.$$

Powyższa definicja jest powtórzeniem definicji z wykładu 1: w literaturze funkcja absolutnie ciągła bywa nazywana funkcją *bezwzględnie ciągłą*. Rozważając definicję absolutnej ciągłości dla $\epsilon = 1$ widzimy, iż dowolna funkcja absolutnie ciągła na przedziale jest funkcją o wahaniu skończonym w tym samym przedziale.

Twierdzenie 9.5: *Jeśli funkcja rzeczywista f jest λ-całkowalna na przedziale $[a, b]$, to dla dowolnego punktu $x \in [a, b]$ zachodzi*

$$(\int_{[a,x]} f d\lambda)' = f(x)$$

poza zbiorem miary zero.

Dowód. Przyjmijmy oznaczenie $F(x) = \int_{[a,x]} f d\lambda$. Funkcja F jest absolutnie ciągła na podstawie twierdzenia 8.7, a więc jest funkcją o wahaniu skończonym w tym przedziale. Skoro dowolna funkcja o wahaniu skończonym jest sumą dwu funkcji rosnących: na podstawie twierdzenia Jordana, to wobec twierdzenia 9.3 funkcja F jest różniczkowalna poza zbiorem miary zero. Ustalamy liczbę rzeczywistą $\epsilon > 0$ i - na podstawie twierdzenia o bezwzględnej ciągłości całki, dobieramy liczbę $\delta > 0$ tak, aby dla dowolnego zbioru mierzalnego X nierówność $\lambda(X) < \delta$ pociągała nierówność $\int_X |f| d\lambda < \epsilon$.

Przypuśćmy - dla dowodu niewprost, że istnieją liczby wymierne p oraz q takie, że zbiór

$$E = \{x : F'(x) > q > p > f(x)\}$$

ma miarę dodatnią: E jest zbiorem mierzalnym, bo funkcja: $x \to F'(x)$ jest pierwszej klasy Baire na zbiorze różniącym się o zbiór miary zero od przedziału $[a, b]$. Dobieramy zbiór otwarty G tak, aby $E \subseteq G$ oraz $\lambda(G) < \delta + \lambda(E)$.

Gdy punkt $x \in E$, to istnieje liczba rzeczywista $t > 0$ taka, że nierówności

$$0 < h < t$$

implikują nierówność $F(x + h) - F(x) > qh$, a więc przedziały $[x, x + h]$ zawarte w G oraz takie, że $F(x + h) - F(x) > qh$ pokrywają - w sensie Vitaliego, zbiór E : wybieramy ciąg rozłącznych przedziałów $I_0, I_1, \ldots$ spośród nich tak, aby

$$\lambda(E \setminus (I_0 \cup I_1 \cup \ldots)) = 0.$$

Zawsze zachodzi - dla $I_n = [x, x + h]$,

$$\int_{I_n} f d\lambda = F(x + h) - F(x) \geqslant q\lambda(I_n),$$

co pociąga

$$\epsilon + \int_E f d\lambda \geqslant \int_G f d\lambda \geqslant \sum_{n=0}^{\infty} \int_{I_n} f d\lambda = q \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(I_n) \geqslant q\lambda(E).$$

Dla dowolnego punktu $x \in E$ mamy $p > f(x)$: co pociąga

$$q\lambda(E) \leqslant \int_E f d\lambda + \epsilon \leqslant p\lambda(E) + \epsilon.$$

Skoro liczba $\epsilon > 0$ może być dowolna, to wnioskujemy $\lambda(E) = 0$: w przeciwnym przypadku byłoby $q \leqslant p$.

Gdy zbiór $\{x : F'(x) < f(x)\}$ jest miary dodatniej, to dowód przebiega analogicznie $\square$

Twierdzenie 9.6: *Jeśli funkcje rzeczywiste f oraz g są absolutnie ciągłe na przedziale $[a,b]$ oraz $f'(x) = g'(x)$ poza zbiorem miary zero, to różnica $f - g$ jest funkcją stałą; dodatkowo zachodzi $f(x) - f(a) = \int_{[a,x]} f' d\lambda$.*

Dowód. Dla dowolnego punktu $x \in [a,b]$ kładziemy $h(x) = f(x) - g(x)$ - i oznaczamy przez $D \subseteq [a,b]$ podzbiór punktów, w których funkcja h jest różniczkowalna; zaś przez $N \subseteq [a,b]$ podzbiór punktów, w których funkcja h nie jest różniczkowalna. Funkcja h jest absolutnie ciągła, a więc na podstawie twierdzenia 8.6 obraz $h(N)$ jest zbiorem miary zero: $\lambda(h(N)) = 0$. Skoro $h'(x)$ jest równe 0 poza zbiorem miary zero, to na podstawie twierdzenia 9. 4 zachodzi $\lambda(h(D)) = 0$, co pociąga

$$\lambda(h([a,b]) \leqslant \lambda(h(D)) + \lambda(h(N)) = 0.$$

Funkcja h jest ciągła, a więc musi być stała: przeprowadza przedziały na przedziały oraz jedynie przedziały jednopunktowe mają miarę zero.

Dla uzasadnienia dodatkowej części tezy rozważmy funkcję - gdzie g oznaczona funkcję taką samą jak w założeniach, określoną wzorem

$$g(x) = \int_{[a,x]} f' d\lambda.$$

Jest to funkcja absolutnie ciągła oraz $g'(x) = f'(x)$ poza zbiorem miary zero: na podstawie twierdzenia 9.5. Różnica $g - f$ jest funkcją stałą, a więc $g(x) - f(x) = g(a) - f(a) = -f(a)$ innymi słowy:

$$\int_{[a,x]} f' d\lambda = g(x) = f(x) - f(a)\Box$$

Lemat 9.7: *Jeśli funkcja rzeczywista f jest różniczkowalna na zbiorze mierzalnym D, to zachodzi $\lambda(f(D)) \leqslant \int_D |f'| d\lambda$.*

Dowód. Ustalamy liczbę rzeczywistą $\epsilon > 0$ - i kładziemy

$$D_n = \{x \in D : n\epsilon \leqslant |f'(x)| < (n+1)\epsilon\}.$$

Mamy

$$\lambda(f(D)) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(f(D_n)) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(D_n)(n+1)\epsilon \leqslant \int_D |f'| d\lambda + \epsilon\lambda(D) :$$

pierwsza nierówność wynika z zawierania $D \subseteq D_0 \cup D_1 \cup \ldots$; druga z nierówności $|f'(x)| < (n+1)\epsilon$ zachodzącej dla $x \in D_n$; zaś ostatnia z nierówności $n\epsilon \leqslant |f'(x)|$

zachodzącej dla $x \in D_n$. Gdy $\lambda(D) < +\infty$, to wobec dowolności doboru liczby $\epsilon > 0$ mamy

$$\lambda(f(D)) \leqslant \int_D |f'| d\lambda :$$

to - wobec możliwości przedstawienia przestrzeni euklidesowej jako sumy przeliczalnej ilości zbiorów o mierze skończonej, wystarcza dla zakończenia dowodu $\square$

Twierdzenie 9.8 (H. Lebesgue): *Jeśli funkcja rzeczywista jest ciągła, o wahaniu skończonym w przedziale $[a, b]$ oraz przeprowadza podzbiory miary zero na podzbiory miary zero, to jest to funkcja absolutnie ciągła na przedziale $[a, b]$.*

Dowód. Ustalamy funkcję f o własnościach jak w założeniach - i oznaczamy przez $D \subseteq [a, b]$ podzbiór punktów, w których funkcja f jest różniczkowalna; zaś przez $N \subseteq [a, b]$ podzbiór punktów, w których funkcja f nie jest różniczkowalna. Funkcja określona wzorem

$$g(x) = \int_{[a,x]} f' d\lambda$$

jest absolutnie ciągła oraz gdy $[c, d] \subseteq [a, b]$, to zachodzi

$$|f(d) - f(c)| \leqslant \lambda(f([c, d]) \leqslant \lambda(f(D \cap [c, d])) + \lambda(f(N)).$$

Zgodnie z lematem 9.7 $\lambda(f(D \cap [c, d])) \leqslant \int_{[c,d]} |f'| d\lambda = |g(c) - g(d)|$: absolutna ciągłość funkcji g pociąga absolutną ciągłość funkcji $f \square$

Funkcję rzeczywistą f będziemy nazywali *osobliwą,* gdy jest o wahaniu skończonym oraz $f'(x) = 0$ poza zbiorem miary zero. Przykłady funkcji osobliwych konstuuje się iterując konstrukcję funkcji Cantora-Lebesgue'a. Różniczkowalność tak konstuowanych funkcji osobliwych wykazuje się przy pomocy twierdzenia Fubiniego, które przytaczamy na końcu tego wykładu.

Twierdzenie 9.9 (H. Lebesgue): *Dowolna funkcja rzeczywista o wahaniu skończonym w przedziale $[a, b]$ jest sumą funkcji absolutnie ciągłej oraz funkcji osobliwej.*

Dowód. Ustalamy funkcję rzeczywistą f o wahaniu skończonym w przedziale $[a, b]$ - i kładziemy

$$g(x) = \int_{[a,x]} f' d\lambda \qquad \text{oraz} \qquad s(x) = f(x) - g(x).$$

Mamy $f(x) = s(x) + g(x)$ oraz $s'(x) = 0$ poza zbiorem miary zero; zaś funkcja: $x \to g(x)$ jest absolutnie ciągła na podstawie twierdzenia 8.7 $\square$

Istnieją funkcje różniczkowalne na przedziale, które nie są o wahaniu skończonym w tym przedziale - a więc twierdzenie 9.9 takich funkcji nie dotyczy. Typowym przykładem jest funkcja określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{\pi}{x^2}; & \text{dla } x \in (0,1], \\ 0; & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Jest to funkcja różniczkowalna na przedziale $[0,1]$ oraz $w_{[0,1]}(f) = +\infty$: co odnotowaliśmy w wykładzie 1.

Twierdzenie 9.10 (G. Fubini): *Jeśli* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *jest szeregiem funkcyjnym, którego składniki są niemalejącymi funkcjami rzeczywisstymi, punktowo zbieżnym do funkcji rzeczywistej, to zachodzi*

$$(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x))' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$$

poza zbiorem miary zero.

Dowód. Dowód pozostawiamy czytelnikowi jako ćwiczenie w tłumaczniu dowodu ze strony 403 z książki R. Sikorskiego *Funkcje rzeczywiste* $\square$