8. Całka.

W literaturze znanych jest kilka podejść do problemu całkowalności funkcji rzeczywistej: oparte są one zwykle o ideę geometryczną, iż całka z nieujemnej funkcji rzeczywistej jest miarą obszaru między osią x-ów a wykresem funkcji; problem całkowalności funkcji rzeczywistej to problem obliczenia miary takiego obszaru. W tym wykładzie omówimy tzw. całkę Lebesgue'a. Nie będziemy omawiali całkowalności dowolnej funkcji rzeczywistej; pozostaniemy przy uwadze, że jeśli f jest funkcją rzeczywistą, to całkowalność funkcji f jest równoważna całkowalności funkcji: $x \to \max\{f(x), 0)\}$ oraz funkcji: $x \to \max\{-f(x), 0\}$ innymi słowy: będziemy badali całkowalność funkcji rzeczywistych nieujemnych.

Niech μ będzie miarą określoną na σ-ciele S oraz f funkcją rzeczywistą nieujemną S-mierzalną określoną na zbiorze $E \in S$: dla potrzeb całki Lebesgue'a nie będzie istotne czy miara μ jest skończona - dopuszczamy możliwość $\mu(\cup S) = +\infty$. Przyporządkujmy funkcji f liczbę - o ile istnieje,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{n}\mu(f^{-1}([\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}))) = \int_E f d\mu.$$

Gdy liczba $\int_E f d\mu$ istnieje - $\int_E f d\mu < +\infty$, to będziemy mówili, że funkcja f jest *μ-całkowalna* na zbiorze E : granica w definicji całki ma sens dla dowolnej funkcji rzeczywistej S-mierzalnej, chociaż czasami może być to granica zbieżna do nieskończoności.

Nieujemne liczby wymierne w definicji całki Lebesgue'a: ułamki $\frac{k}{n}$ oraz $\frac{k+1}{n}$, można zastąpić nieograniczonymi oraz rosnącymi ciągami $s_{n,0}, s_{n,1}, \dots$ złożonymi z nieujemnych liczb rzeczywistych takimi, że

$$\lim_{m\to\infty} \sup\{s_{m,n+1} - s_{m,n} : n \in \omega\} = 0.$$

Gdy położymy

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} s_{m,n}\mu(f^{-1}([s_{m,n}, s_{m,n+1}))) = \int_E f d\mu,$$

to otrzymamy oryginalną definicję podaną przez H. Lebesgue'a: innowacja polega na tym, że rozważamy podziały zbioru wartości funkcji, zamiast jak we wcześniej wprowadzonej przez A. Cauchy całce - zwyczajowo nazywanej całką Riemanna, podziały dziedziny funkcji.

Możliwe jest także inne zmodyfikowanie definicji całki Riemanna. Mianowicie zastąpienie podziałów dziedziny na przedziały rozbiciami złożonymi ze zbiorów należących do S : wtedy liczba $\int_E f d\mu$ byłaby określana jako supremum liczb

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu(E_n) \inf\{f(x) : x \in E_n\},$$

gdzie supremum jest brane po wszystkich przeliczalnych *rozbiciach mierzalnych* zbioru E, tzn. przedstawieniach zbioru E w postaci przeliczalnej sumy rozłącznych zbiorów $E_0, E_1, \ldots$ należących do S. Taka definicja całki jest równoważna definicji Lebesgue'a i różni się od definicji całki Riemanna: korzysta z podziału dziedziny funkcji na przeliczalną ilość rozłącznych podzbiorów należących do S. Przypomnijmy, że całkę Riemmana dla funkcji rzeczywistej wprowadza się tak samo z tym, że rozważa się jedynie rozbicia $E_0, E_1, \ldots, E_n$ złożone ze skończonej ilości przedziałów rozłącznych: gdy supremum odpowiednich sum jest równe infinium podobnych sum powstałych przez zamianę symbolu inf na znak sup, to funkcja jest *całkowalna w sensie Riemanna.*

Jeśli $E_0, E_1, \ldots$ i $F_0, F_1, \ldots$ są przeliczalnymi rozbiciami mierzalnymi zbioru E, to będziemy mówili, iż rozbicie $F_0, F_1, \ldots$ jest *drobniejsze* od rozbicia $E_0, E_1, \ldots$, gdy dla dowolnej liczby naturalnej n istnieje liczba naturalna k taka, że $F_n \subseteq E_k$. Wykorzystanie przeliczalnej addytywności miary oraz faktu, że sumy przybliżające całki ulegają zwiększeniu przy zamianie rozbicia na drobniejsze wystarcza dla faktów: *Obie definicje całki Lebesgue'a są równoważne. Jeśli funkcja jest całkowalna w sensie Riemanna, to jest całkowalna w sensie Lebesgue'a; a wtedy obie całki z takiej funkcji są równe.*

Twierdzenie 8.1: *Jeśli μ jest miarą na σ-ciele S oraz nieujemne S-mierzalne funkcje rzeczywiste f i g są określone na zbiorze $E \in S$, to*

a): *Jeśli c jest liczbą rzeczywistą, to $\int_E cf d\mu = c \int_E f d\mu$.*

b): $\int_E f d\mu + \int_E g d\mu = \int_E (f+g) d\mu$.

c): *Jeśli dla dowolnego $x \in E$ zachodzi $g(x) \leqslant f(x)$, to $\int_E g d\mu \leqslant \int_E f d\mu$.*

d): *Jeśli ciąg $E_0, E_1, \ldots$ jest przeliczalnym rozbiciem mierzalnym zbioru E, to*

$$\int_E f d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{E_n} f d\mu.$$

Dowód. Wszystkie warunki wynikają prosto z definicji całki Lebesgue'a: sprawdzenie tego pozostawiamy czytelnikowi □

Lemat 8.2 (H. Lebesgue): *Jeśli μ jest miarą określoną na σ-ciele S oraz $f_0, f_1, \ldots$ ciągiem S-mierzalnych nieujemnych funkcji rzeczywistych określonych na zbiorze $E \in S$ takich, że dla dowolnego punktu $x \in E$ ciąg liczb $f_0(x), f_1(x), \ldots$ jest niemalejący, to*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n d\mu.$$

Dowód. Oznaczamy przez f granicę punktową ciągu $f_0, f_1, \ldots$: dopuszczamy $f(x) = +\infty$. Dla dowolnej liczby naturalnej n oraz dowolnego punktu $x \in E$ mamy $f_n(x) \leqslant f(x)$, to oraz definicja całki implikują nierówność

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \leqslant \int_E f d\mu :$$

przyjmujemy umowę, że gdy $\mu(\{x \in E : f(x) = +\infty\}) > 0$, to $\int_E f d\mu = +\infty$.

Załóżmy, że dla dowolnego punktu $x \in E$ wartość $f(x)$ jest liczbą rzeczywistą. Ustalamy liczbę rzeczywistą $\epsilon < 1$ - i kładziemy

$$E_n = \{x \in E : f_n(x) \geqslant \epsilon f(x)\} :$$

zbiory $E_0, E_1, \ldots$ należą do S, tworzą one ciąg rosnący, ich suma jest równa zbiorowi E oraz zachodzi

$$\int_E f_n d\mu \geqslant \int_{E_n} f_n d\mu \geqslant \int_{E_n} \epsilon f d\mu = \epsilon \int_{E_n} f d\mu.$$

Wobec dowolności doboru liczby $\epsilon < 1$ wnioskujemy, że

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \geqslant \int_{E_0} f d\mu + \int_{E_1 \setminus E_0} f d\mu + \int_{E_2 \setminus E_1} f d\mu + \ldots = \int_E f d\mu :$$

zachodzi nierówność $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \geqslant \int_E f d\mu$.

Gdy $A = \{x \in E : f(x) = +\infty\}$ oraz $\mu(A) > 0$, to ustalamy liczbę rzeczywistą $\delta > 0$ - i kładziemy

$$F_n = \cap\{\{x \in E : f_m(x) \geqslant \delta\} : m > n\} :$$

ciąg $F_0, F_1, \ldots$ składa się ze zbiorów należących do S, jest rosnący, zawiera w swojej sumie zbiór A oraz zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \geqslant \lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu \geqslant \delta \lim_{n\to\infty} \mu(F_n) \geqslant \delta\mu(A).$$

Z dowolności doboru liczby rzeczywistej $\delta > 0$ oraz nierówności $\mu(A) > 0$ wnioskujemy, iż $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = +\infty$: zachodzi równość $\int_E f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$, bo zgodnie z umową $\int_E f d\mu = +\infty$ $\square$

Lemat 8.3 (P. Fatou): *Jeśli μ jest miarą określoną na σ-ciele S oraz $f_0, f_1, \ldots$ jest ciągiem S-mierzalnych nieujemnych funkcji rzeczywistych określonych na zbiorze E należącym do S, to*

$$\liminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \geqslant \int_E \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu.$$

Dowód. Kładziemy $g_n(x) = \inf\{f_m(x) : n \leqslant m\}$: tym sposobem określiliśmy ciąg $g_0, g_1, \ldots$ złożony z funkcji S-mierzalnych takich, że dla dowolnego punktu $x \in E$ ciąg liczb $g_0(x), g_1(x), \ldots$ jest niemalejący. Z warunku określającego ciąg $g_0, g_1, \ldots$ otrzymyjemy $\liminf_{n\to\infty} f_n = \lim g_n$. Zawsze zachodzi $g_n(x) \leqslant f_n(x)$ - co wraz z twierdzeniem 8.2 implikuje

$$\int_E \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu = \int_E \lim_{n\to\infty} g_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E g_n d\mu = \liminf_{n\to\infty} \int_E g_n d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$$

innymi słowy: otrzymujemy tezę $\square$

Twierdzenie 8.4 (H. Lebesgue): *Niech μ będzie miarą określoną na σ-ciele S; zaś g funkcją μ-całkowalną na zbiorze $E \in S$. Jeśli $f_0, f_1, \ldots$ jest ciągiem S-mierzalnych nieujemnych funkcji rzeczywistych określonych na zbiorze E takich, że dla dowolnego punktu $x \in E$ zawsze zachodzi $f_n(x) \leqslant g(x)$, to*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n d\mu.$$

Dowód. Dla dowolnej liczby naturalnej n nieujemne funkcje rzeczywiste $g + f_n$ oraz $g - f_n$ są S-mierzalne. Wobec lematu Fatou całka

$$\int_E (g+f) d\mu = \int_E g d\mu + \int_E f d\mu = \int_E \lim_{n\to\infty} (g + f_n) d\mu$$

jest nie większa od

$$\liminf_{n\to\infty} \int_E (g + f_n) d\mu = \int_E g d\mu + \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu.$$

Zaś całka

$$\int_E (g-f) d\mu = \int_E g d\mu - \int_E f d\mu = \int_E \lim_{n\to\infty} (g - f_n) d\mu$$

jest nie większa od

$$\liminf_{n\to\infty} \int_E (g - f_n) d\mu = \int_E g d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu.$$

Skoro $\int_E g d\mu$ jest liczbą rzeczywistą, to otrzymujemy

$$\limsup_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \leqslant \int_E f d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu.$$

To wystarcza dla zakończenia dowodu $\square$

Twierdzenie 8.5 (O bezwzględnej ciągłości całki): *Jeśli μ jest miarą określoną na σ-ciele S; zaś nieujemna funkcja rzeczywista f jest μ-całlkowalna na zbiorze $E \in S$, to $\lim_{\mu(A)\to 0} \int_A f d\mu = 0$.*

Dowód. Dla dowolnej liczby naturalnej n kładziemy

$$E_n = \{x \in E : f(x) \geqslant n\} :$$

ciąg zbiorów mierzalnych $E_0, E_1, \dots$ jest nierosnący oraz zachodzi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{E_n \setminus E_{n+1}} f d\mu = \int_E f d\mu.$$

Skoro $\int_E f d\mu$ jest liczbą, to powyższy szereg jest zbieżny: dla dowolnej liczby rzeczywistej $\epsilon > 0$ dobieramy liczbę naturalną n tak, aby $2\int_{E_n} f d\mu < \epsilon$. Gdy podzbiór $A \subseteq E$ należy do S oraz $2n\mu(A) < \epsilon$, to

$$\int_A f d\mu \leqslant n\mu(A) + \int_{A \cap E_n} f d\mu \leqslant \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \leqslant \epsilon :$$

co wystarcza dla zakończenia dowodu $\square$

Będziemy mówili, że funkcja rzeczywista f określona na przedziale $[a, b]$ jest *absolutnie ciągła* na tym przedziale, gdy dla dowolnej liczby rzeczywistej $\epsilon > 0$ istnieje liczba rzeczywista $\delta > 0$ taka, że jeśli przedziały $(c_0, d_0), (c_1, d_1), \dots$ są rozłączne, zawarte w $[a, b]$ oraz $d_0 - c_0 + d_1 - c_1 + \dots + d_n - c_n + \dots < \delta$, to

$$\sum_{i=0}^{\infty} |f(d_i) - f(c_i)| < \epsilon.$$

Funkcje stałe - z powodów oczywistych, są absolutnie ciągłe. Jeśli przyjmniemy $d_1 = c_1, d_2 = c_2, \dots d_n = c_n, \dots$, to widzimy, iż funkcja absolutnie ciągła jest ciągła - dokładniej: jest jednostajnie ciągła. Nietrudno sprawdzić - zostawiamy to czytelnikowi, że suma oraz iloczyn dwu funkcji absolutnie ciągłych jest funkcją absolutnie ciągła.

Twierdzenie 8.6: *Funkcja absolutnie ciągła przeprowadza zbiory miary zero na zbiory miary zero.*

Dowód. Ustalamy funkcję rzeczywistą f absolutnie ciągłą na przedziale $[a, b]$, podzbiór miary zero $X \subset [a, b]$, liczbę rzeczywistą $\epsilon > 0$ - i dobieramy liczbę rzeczywistą $\delta > 0$ taką, jakiej istnienie wynika z definicji absolutnej ciągłości funkcji f na przedziale $[a, b]$. Następnie dobieramy ciąg rozłącznych przedziałów $(c_0, d_0), (c_1, d_1), \dots$ zawartych w $[a, b]$ oraz zawierających w swojej sumie X takich, że $d_0 - c_0 + d_1 - c_1 + \dots < \delta$: dobór takiego ciągu przedziałów jest możliwy bo X jest zbiorem miary zero. Z absolutnej ciągłości funkcji f mamy

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sup f((c_i, d_i)) - \inf f((c_i, d_i)) < \epsilon :$$

korzystając z definicji absolutnej ciągłości zastępujemy końce przedziału (c_n, d_n) punktami, w których funkcja f przymuje extrema na przedziale $[c_n, d_n]$. Skoro

$$f(X) \subset \cup\{(\inf f((c_n, d_n)), \sup f((c_n, d_n))) : n \in \omega\},$$

to wobec dowolności doboru liczby rzeczywistej $\epsilon > 0$ obraz $f(X)$ jest miary zero: to wystarcza dla zakończenia dowodu, gdyż zbiór $X \subset [a, b]$ był dowolnym podzbiorem miary zero $\square$

Twierdzenie 8.7: *Niech μ będzie miarą określoną na σ-ciele S złożonym z podzbiorów liczb rzeczywistych taką, że wszystkie przedziały należą do S oraz miara μ dowolnego przedziału jest niewiększa niż jego długość. Jeśli nieujemna funkcja rzeczywista f jest μ-całkowalna na przedziale $[a, b]$, to funkcja określona wzorem*

$$F(x) = \int_{[a,x]} f d\mu$$

jest niemalejąca oraz absolutnie ciągła na przedziale $[a, b]$.

Dowód. Wobec punktu b) w twierdzeniu 8.1 funkcja F jest niemalejąca. Ustalamy liczbę rzeczywistą $\epsilon > 0$ oraz dla dowolnej liczby naturalnej k kładziemy

$$E_k = \{x \in [a, b] : f(x) > k\}.$$

Funkcja f jest μ-całkowalna, a więc ciąg $E_0, E_1, \ldots$ składa się ze zbiorów należących do S, jest malejący oraz daje w przekroju zbiór miary μ zero. Skoro ciąg liczb $\mu(E_0), \mu(E_1), \ldots$ jest zbieżny do zera, to - zgodnie z twierdzeniem 8.5 zachodzi $\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f d\mu = 0$: dobieramy liczbę naturalną k tak, aby $2 \int_{E_k} f d\mu < \epsilon$ - i kładziemy $\delta 2k = \epsilon$. Jeśli $(c_0, d_0), (c_1, d_1), \ldots$ jest ciągiem rozłącznych przedziałów takim, że $d_0 - c_0 + d_1 - c_1 + \ldots + d_n - c_n + \ldots < \delta$, to

$$\sum_{n=0}^{\infty} F(d_n) - F(c_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{(c_n,d_n)} f d\mu.$$

Zachodzi także

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{(c_n,d_n)} f d\mu \leqslant \int_{E_k} f d\mu + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{(c_n,d_n)\setminus E_k} f d\mu \leqslant \frac{\epsilon}{2} + k \sum_{n=0}^{\infty} d_n - c_n \leqslant \epsilon :$$

co, wobec dowolności doboru liczby rzeczywistej $\epsilon > 0$, wystarcza dla zakończenia dowodu $\square$

Miara Lebesgue'a spełnia założenia o mierze μ z twierdzenia 8.7: to samo można powiedzieć o dowolnym rozszerzeniu miary Lebesgue'a. Sposobem na rozszerzenie miary Lebesgue'a jest rozważenie miary produktowej μ na zbiorze Cantora oraz zbioru Bernsteina: jeśli zbiór U oraz jego dopełnienie przecina każdy nieprzeliczalny podzbiór domknięty, to U jest *zbiorem Bernsteina.* Taki zbiór U nie należy do σ-ciała zbiorów mierzalnych; to samo dotyczy przekrojów $U \cap A$ oraz różnicy $A \setminus U$, o ile zbiór A jest mierzalny oraz $\mu(A) > 0$. Gdy rozważymy najmniejsze σ-ciało zawierające zbiory mierzalne oraz zbiór Bernsteina U - są to zbiory postaci $A \cup (B \setminus U) \cup (C \cap U)$, gdzie zbiory A, B oraz C są mierzalne - to funkcję μ rozszerzamy do miary na tym σ-ciele kładąc

$$\mu(A \cup (B \setminus U) \cup (C \cap U)) = \mu(A) + \mu(C \setminus A) :$$

rozszerzenie sprowadza się do tego, aby dostać $\mu(2^\omega \setminus U) = 0$. Tak rozszerzona funkcja μ pozostaje nadal miarą. Jest tak, bo gdy zbiory postaci $A_n \cup (B_n \setminus U) \cup (C_n \cap U)$ są parami rozłączne - przy czym zbiory A_n, B_n oraz C_n są mierzalne, to dla $n \neq m$ zachodzi $\mu(A_n \cap C_m) = 0$. Gdyby $\mu(A_n \cap C_m) > 0$, to przekrój $A_n \cap C_m$ zawierałby domknięty podzbiór miary dodatniej: byłby to podzbiór przecinający także U, a więc zbiory $A_n \cup (B_n \setminus U) \cup (C_n \cap U)$ oraz $A_m \cup (B_m \setminus U) \cup (C_m \cap U)$ nie byłyby rozłączne. Skoro dla $n \neq m$ zachodzi $\mu(A_n \cap C_m) = 0$ oraz zbiór B_m nie wpływa na wartość $\mu((A_n \cup (B \setminus U) \cup (C_m \cap U))$, to addytywność powyższego rozszerzenia μ natychmiastowo wynika z addytywności miary μ obciętej do rodziny wszystkich zbiorów mierzalnych.

Nie wiemy czy możliwe jest rozszerzenie miary produktowej μ na zbiorze Cantora do miary określonej na wszystkich podzbiorach zbioru Cantora; to samo dotyczy zaprzeczenia powyższego zdania. W literaturze znanych jest wiele konsekwencji obu powyższych hipotez: chociaż jedna jest zaprzeczeniem drugiej, to o konsekwencjach każdej z nich nie udało się stwierdzić, iż mogą być sprzeczne z tradycyjnie przyjmowanym układem aksjomatów teorii mnogości ZFC. Wiadomo, że aksjomaty ZFC plus hipoteza continuum - także inne hipotezy o liczbach kardynalnych, wykluczają istnienie rozszerzenia miary produktowej na rodzinę wszystkich podzbiorów zbioru Cantora. Wynika to z twierdzenia S. Ulama mówiącego: *Miara określona na rodzinie wszystkich podzbiorów najmniejszej nieprzeliczalnej liczby kardynalnej jest tożsamościowo równa zeru, o ile podzbiory skończone mają miarę zero.* Z drugiej strony, gdy nie założymy aksjomatu wyboru, to nie mamy środków aby zdefiniować podzbiór zbioru Cantora, który nie byłby zbiorem mierzalnym: R. Solovay skonstruował model dla aksjomatów teorii mnogości bez aksjomatu wyboru, w którym wszystkie podzbiory liczb rzeczywistych są mierzalne.

Powyżej odnotowaliśmy, że konstrukcja zbioru Bernsteina daje zbiór niemierzalny: podzbiór zbioru Cantora, który nie jest zbiorem mierzalnym będziemy nazywali *zbiorem niemierzalnym.* Konstrukcja ta wykorzystuje możliwość ustawienia wszystkich nieprzeliczalnych zbiorów domkniętych w ciąg pozaskończony $\{K_\alpha : \alpha < c\}$, gdzie c oznacza najmniejszą liczbą kardynalną równoliczną ze zbiorem Cantora. Gdy dopuścimy do rozważań taki ciąg pozaskończony, to kolejno dobieramy dwa różne punkty p_α oraz q_α należące do różnicy

$$K_\alpha \setminus (\{p_\beta : \beta < \alpha\} \cup \{q_\beta : \beta < \alpha\})$$

- i sprawdzamy, że zbiór $\{p_\alpha : \alpha < c\}$ jest zbiorem Bernsteina, który wobec lematu 7.4 jest zbiorem niemierzalnym.

Inna konstrukcja zbioru niemierzalnego wykorzystuje możliwość ustawienia punktów zbioru Cantora w ciąg pozaskończony $\{x_\alpha : \alpha < c\}$ taki, że jeśli liczba porządkowa β jest mniejsza niż c, to zbiór $\{x_\alpha : \alpha < \beta\}$ jest miary zero: wtedy podzbiór

$$\{(x_\alpha, x_\beta) : \alpha < \beta\} \subset 2^\omega \times 2^\omega$$

jest - na podstawie twierdzenia Fubuniego, zbiorem niemierzalnym. Opiszemy jeszcze jedną konstrukcję zbioru niemierzalnego pochodzącą od W. Sierpińskiego. Dla potrzeb tej konstrukcji - w kolejnym lemacie A jest rodziną nieskończonych podzbiorów liczb naturalnych; zaś μ miarą zewnętrzną na zbiorze Cantora zdefiniowaną wzorem

$$\mu(X) = \inf\{\mu(U) : X \subseteq U \text{ oraz } U \text{ jest otwarty}\} :$$

rozróżnianie kiedy μ jest rozszerzeniem miary do miary na większym σ-ciele, a kiedy miarą zewnętrzną pozostawiamy czytelnikowi.

Lemat 8.8 (Prawo zero-jedynkowe): *Jeśli dla dowolnego skończonego zbioru liczb naturalnych x zachodzi*

$$\mu(A \cap (x,\omega)^\omega) = \mu((x,\omega)^\omega)\mu(A),$$

to liczba $\mu(A)$ jest równa zero lub jeden.

Dowód. Przy rozszerzeniu miary produktowej μ do miary zewnętrznej wystarczy rozpatrywać sumy rozłącznych zbiorów postaci $(x,\omega)^\omega$ - gdzie x jest skończonym podzbiorem liczb naturalnych - zamiast wszystkich zbiorów otwartych, z miar których brane jest infinium: to prowadzi do równości $\mu(A) = \mu(A)\mu(A)$, z której wnioskujemy $\mu(A) = 0$ lub $\mu(A) = 1$ □

Rodzinę U nieskończonych podzbiorów liczb naturalnych będziemy nazywali *filtrem,* gdy zawiera wszystkie podzbiory liczb naturalnych różniące się od ω_0 o podzbiór skończony innymi słowy: wszystkie dopełnienia zbiorów skończonych, gdy jest zamknięta na przekroje skończonych podrodzin oraz gdy jest zamknięta na dołączanie nadzbiorów innymi słowy: gdy $X \in U$ oraz $X \subseteq Y$ implikują $Y \in U$. Filtr maksymalny - ze względu na inkluzję, będziemy nazywali *ultrafiltrem.* Filtr, który nie jest miary μ zero będziemy nazywali *filtrem niemierzalnym*

Twierdzenie 8.9 (W. Sierpiński): *Dowolny ultrafiltr lub filtr niemierzalny U jest zbiorem niemierzalnym takim, że $\mu(U) = 1 = \mu(2^\omega \setminus U)$.*

Dowód. Jeśli U jest filtrem, to prawo zero-jedynkowe stosuje się do U. Aby się o tym przekonać rozpatrzmy zbiór $(x, \omega)^\omega$, gdzie x jest skończonym podzbiorem liczb naturalnych, oraz funkcję: $X \to X \setminus \sup x$, przy czym przyjmujemy $\sup \emptyset = -1$. Funkcja ta jest jednokładnością w sensie zwykłej metryki na odcinku $[0, 1]$ - gdy utożsamimy podzbiór $X \subseteq \omega$ z liczbą $D(X)$ określoną w poprzednim wykładzie. Jej obcięcie do filtru U przeprowadza przekrój $U \cap (x, \omega)^\omega$ na zbiór U zachowując miarę μ proporcjonalnie zgodnie ze skalą jednokładności, czyli

$$\mu(U \cap (x, \omega)^\omega) = \mu((x, \omega)^\omega)\mu(U) :$$

z lematu 8.8 wnioskujemy, że $\mu(U) = 1$ lub $\mu(U) = 0$. Dla dokończenia dowodu skorzystamy z oczywistego faktu, iż *dla ultrafiltru U oraz dowolnego podzbioru $X \subseteq \omega$ zbiór X należy do U lub jego dopełnienie należy do U.* Określamy zachowującą miarę transformację: $X \to \omega \setminus X$: funkcja ta przeprowadza dowolny ultrafiltr na jego dopełnienie. To wystarcza aby twierdzić, że $\mu(U) = 1$ oraz $\mu(2^\omega \setminus U) = 1$: gdyby $\mu(U) = 0$, to także byłoby $\mu(2^\omega \setminus U) = 0$ i otrzymalibyśmy $\mu(2^\omega) \leqslant \mu(U) + \mu(2^\omega \setminus U) = 0$ - co jest niemożliwe. Niemierzalność ultrafiltru U wynika z równości $\mu(U) = 1 = \mu(2^\omega \setminus U)$ □

Przyjmijmy oznaczenia $K = 2^\omega$ oraz $L = \prod_{n=1}^{\infty} K^{q_n}$. Jeśli $x \in L$, to $x = (x_n^j)$ - gdzie $n \in \omega$ oraz $0 \leqslant j \leqslant q_n$.

Lemat 8.10 (M. Talagrand): *Jeśli ciąg liczb naturalnych $q_0, q_1, \ldots$ jest taki, że*

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 - \frac{1}{2^{q_n}}) = \frac{1}{2},$$

to dla odwzorowania $h : L \to K$, określonego wzorem

$$h(x) = h(x_n^j) = \cup\{\cap\{x_n^j : 0 \leqslant j < q_n\} : n \in \omega\},$$

przeciwobrazy zbiorów mierzalnych są mierzalne oraz $\mu(h^{-1}(A)) = \mu(A)$ dla dowolnego zbioru mierzalnego $A \subseteq K$.

Dowód. Połóżmy

$$A_i = h^{-1}(\{y = (y_0, y_1, \ldots) \in K : y_i = 0\}).$$

Punkt $x = (x_n^j)$ należy do A_i gdy dla dowolnej liczby naturalnej n istnieje liczba naturalna j taka, że $0 \leqslant j < q_n$ oraz i-ta współrzędna x_n^j jest równa zeru. To oznacza, że

$$\mu(A_i) = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - \frac{1}{2^{q_n}}) = \frac{1}{2}.$$

Podobnie uzasadniamy tezę lematu dla zbiorów domknięto-otwartych, a następnie dla zbiorów mierzalnych: co wystarczy dla zakończenia dowodu $\square$

Twierdzenie 8.11 (M. Talagrand): *Przekrój przeliczalnej ilości filtrów niemierzalnych jest filtrem niemierzalnym.*

Dowód. Wobec twierdzenia 8.9 wystarczy rozważyć sytuację, gdy $F_0, F_1, \ldots$ jest ciągiem filtrów niemierzalnych; zaś $A \subseteq 2^\omega$ zbiorem zwartym miary μ dodatniej rozłącznym z przekrojem $F_0 \cap F_1 \cap \ldots = F$. Gdy ciąg $q_0, q_1, \ldots$ jest taki, jak w lemacie 8.10 - konstrukcję takiego ciągu pozostawiamy czytelnikowi - oraz $G = \prod_{n=0}^{\infty} F_n^{q_n}$, to $\mu(G) = 1$. Jest tak, bo $\mu(F_n) = 1$ na mocy prawa zero jedynkowego oraz rozszerzenie miary μ na produkt takich zbiorów ma wartość 1. Korzystamy z poprzedniego lematu i bierzemy punkt $x \in h^{-1}(A) \cap G$. Mamy $h(x) \in A$ oraz dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi $\cap\{x_n^j : 0 \leqslant j \leqslant n\} \in F_n$, o ile $x = (x_n^j)$, dla dowolnej liczby naturalnej n. To oznacza, że $h(x) \in F \cap A$: mamy sprzeczność wystarczającą dla zakończenia dowodu $\square$

Twierdzenie 8.12: *Miarę produktową μ na zbiorze Cantora 2^ω można rozszerzyć do miary określonej na σ-ciele zawierającym wszystkie zbiory mierzalne oraz wszystkie filtry niemierzalne.*

Dowód. Wobec twierdzenia 8. 11 najmniejszy ideał zawierający wszystkie dopełnienia filtrów niemierzalnych jest σ-ideałem takim, że dowolny zbiór z tego ideału jest zawarty w dopełnieniu pewnego filtru niemierzalnego. Oznaczmy ten ideał przez I. Miarę μ rozszerzamy na σ-ciało zbiorów postaci $(X \setminus G) \cup H$, gdzie X przebiega zbiory mierzalne; zaś zbiory G oraz H należą do I: kładziemy

$$\mu((X \setminus G) \cup H) = \mu(X)$$

- pozostawiamy czytelnikowi sprawdzenie, że to rozszerzenie miary μ jest miarą na najmniejszym σ-ciele wszystkie zbiory mierzalne oraz wszystkie filtry niemierzalneo $\square$