7. Miara, zbiory mierzalne oraz funkcje mierzalne.

Funkcję rzeczywistą μ nieujemną określoną na ciele zbiorów S będziemy nazywali *miarą,* gdy dla dowolnego ciągu $A_0, A_1, \ldots$ zbiorów rozłącznych należących do S takich, że suma $A_0 \cup A_1 \cup \ldots$ należy do S zachodzi równość

$$\mu(A_0) + \mu(A_1) + \ldots = \mu(A_0 \cup A_1 \cup \ldots).$$

O funkcji μ spełniającej warunek jak wyżej będziemy mówili, że jest *przeliczalnie addytywna;* zaś gdy prawie wszystkie zbiory A_n są puste - *addytywna.* Zbiór pusty i suma $\cup S$ należą do ciała S - jest to natychmiastowy wniosek z definicji ciała zbiorów przytoczny na początku wykładu 3 - a więc $\mu(\emptyset) + \mu(\cup S) = \mu(\cup S)$: stąd $\mu(\emptyset) = 0$.

W tym wykładzie podstawową miarą będzie miara produktowa na zbiorze Cantora 2^ω : jest to miara na ciele domknięto-otwartych podzbiorów zbioru Cantora określona następującą procedurą. Wśród domknięto-otwartych podzbiorów zbioru Cantora wyróżniamy zbiory *bazowe* - czyli zbiory postaci $\{X \in 2^\omega : z \subseteq X \subseteq \omega \setminus y\}$, gdzie z oraz y są skończonymi podzbiorami liczb naturalnych takimi, że $z \cup y = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, i kładziemy

$$\mu(\{X \in 2^\omega : z \subseteq X \subseteq \omega \setminus y\}) = \frac{1}{2^{|z|}2^{|y|}} = \frac{1}{2^n} :$$

między innymi zachodzi $\mu(2^\omega) = 1$. Dowolny zbiór domknięto-otwarty $U \subseteq 2^\omega$ jest sumą skończonej ilości rozłącznych zbiorów bazowych. Można je dobrać tak, aby suma mniejszej ilości takich zbiorów nie była zbiorem bazowym: gwarantuje to indukcja ze względu na ilość liczb należących do sumy $z \cup y$. Mianowicie spośród wszystkich zbiorów bazowych, dla których $n = |z \cup y|$ bierzemy wszystkie możliwe podzbiory zbioru U nie zawierające się w zbiorach wybranych wcześniej: w taki sposób wybierzemy ciąg rozłącznych zbiorów bazowych dających w sumie U. Zbiór U jest zwarty, a więc taki ciąg musi być skończony - oznaczamy jego elementy przez $A_0, A_1, \ldots, A_k$ i kładziemy

$$\mu(U) = \mu(A_0) + \mu(A_1) + \ldots + \mu(A_k).$$

Tym sposobem określiliśmy miarę - będziemy ją nazywali *miarą produktową,* na ciele wszystkich domknięto-otwatrych podzbiorów zbioru Cantora. Odnotujmy, że do ciała zbiorów domknięto-otwartych nie należy zbiór, który byłby sumą nieskończonego ciągu rozłącznych zbiorów domknięto-otwartych: wynika to ze zwartości zbioru Cantora. Miara μ określona na tym ciele jest jedyną miarą, o której zakładamy, iż jest określona na ciele zbiorów: pozostałe miary będą określane na σ-ciele.

Miarę produktową rozszerzymy na znacznie większe ciało zbiorów, które jest σ-ciałem zawierającym zbiory borelowskie. Dowolny otwarty podzbiór $U \subseteq 2^\omega$

jest sumą przeliczalnej ilości rozłącznych zbiorów bazowych. Przyjmijmy, że ciąg $A_0, A_1, \ldots$ składa się z rozłącznych podzbiorów bazowych dobranych indukcyjnie tak, jak wcześniej dobieraliśmy przy założeniu, iż U jest zbiorem domknięto-otwartym: stosowne warunki indukcyjne wyznaczają zbiory $A_0, A_1, \ldots$ jednoznacznie. Wtedy kładziemy

$$\mu(A_0) + \mu(A_1) + \ldots = \mu(U)$$

- i sprawdzamy, że gdy zbiory $U_0, U_1, \ldots$ są otwarte, to

$$\mu(U_0) + \mu(U_1) + \ldots \geqslant \mu(U_0 \cup U_1 \cup \ldots);$$

zaś gdy zbiór otwarty V jest zawarty w zbiorze otwartym U, to $\mu(V) \leqslant \mu(U)$.

Podzbiór $M \subseteq 2^\omega$ będziemy nazywali *mierzalnym,* gdy dla dowolnej liczby rzeczywistej $\epsilon > 0$ istnieją podzbiory domknięte $F \subseteq M$, oraz $G \subseteq 2^\omega \setminus M$ takie, że $\mu(2^\omega \setminus (F \cup G)) < \epsilon$.

Lemat 7.1: *Rodzina wszystkich zbiorów mierzalnych jest ciałem zbiorów.*

Dowód. Jeśli X oraz Y są zbiorami mierzalnymi, to dla dowolnie ustalonych liczb rzeczywistych dodatnich δ oraz τ dobieramy zbiory domknięte $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$, $C \subseteq (2^\omega \setminus X)$ oraz $D \subseteq (2^\omega \setminus Y)$ tak, aby

$$\mu(2^\omega \setminus (A \cup C)) < \delta \text{ oraz } \mu(2^\omega \setminus (B \cup D)) < \tau :$$

jest to możliwe z mocy definicji zbioru mierzalnego. Wtedy suma $A \cup B \subseteq X \cup Y$ oraz przekrój $C \cap D \subseteq 2^\omega \setminus (X \cup Y)$ są zbiorami domkniętymi. Skoro zawsze $A \cup B \cup (C \cap D) \supseteq (A \cup C) \cap (B \cup D)$, to

$$\mu(2^\omega \setminus (A \cup B \cup (C \cap D))) \leqslant \mu(2^\omega \setminus ((A \cup C) \cap (B \cup D))) =$$

$$= \mu((2^\omega \setminus (A \cup C)) \cup (2^\omega \setminus (B \cup D))) \leqslant \mu(2^\omega \setminus (A \cup C)) + \mu(2^\omega \setminus (B \cup D)) < \delta + \tau.$$

Jeśli przyjmniemy $\delta + \tau < \epsilon$ - to wnioskujemy, iż suma dwu zbiorów mierzalnych jest zbiorem mierzalnym: to wystarcza dla dowodu indukcyjnego, że tak samo jest dla sumy skończonej ilości zbiorów mierzalnych.

Definicja zbioru mierzalnego jest taka, że mierzalność zbioru jest równoważna mierzalności jego dopełnienia: to wystarcza dla zakończenia dowodu □

Dla dowolnego podzbioru $X \subseteq 2^\omega$ kładziemy

$$\mu(X) = \inf\{\mu(U) : X \subseteq U \text{ oraz } U \text{ jest zbiorem otwartym}\}.$$

Otrzymana funkcja jest rozszerzeniem miary μ na rodzinę wszystkich podzbiorów zbioru Cantora. Nie ma powodów aby twierdzić, że takie rozszerzenie jest miarą - chociaż pokażemy, że po obcięciu do σ-ciała zbiorów mierzalnych jest miarą.

Lemat 7.2: *Jeśli* $A_0 \cup A_1 \cup \ldots = X$, *to* $\mu(A_0) + \mu(A_1) + \ldots \geqslant \mu(X)$.

Dowód. Ustalamy liczbę rzeczywistą $\epsilon > 0$, a następnie dla każdej liczby naturalnej n dobieramy zbiór otwarty $U_n \supseteq A_n$ tak, aby

$$\mu(U_n) < \mu(A_n) + \frac{\epsilon}{2^{n+1}}.$$

Skoro suma $U_0 \cup U_1 \cup \ldots$ jest zbiorem otwartym zawierającym zbiór X, to

$$\mu(X) \leqslant \mu(U_0 \cup U_1 \cup \ldots) \leqslant \mu(U_0) + \mu(U_1) + \ldots < \mu(A_0) + \mu(A_1) + \ldots + \epsilon.$$

To wystarcza dla zakończenia dowodu: liczba rzeczywista $\epsilon > 0$ była dobrana dowolnie $\square$

Lemat 7.3: *Jeśli podzbiór* $F \subseteq 2^\omega$ *jest domknięty oraz zbiór* $G \supseteq F$ *jest otwarty, to* $\mu(F) + \mu(G \setminus F) = \mu(G)$.

Dowód. Gdy A oraz B są rozłącznymi zbiorami domkniętymi, to - wobec normalności topologii produktowej na zbiorze Cantora, liczba $\mu(A \cup B)$ jest równa infimum sum $\mu(W) + \mu(V)$, gdzie zbiory $W \supseteq A$ oraz $V \supseteq B$ są otwarte i rozłączne. Wtedy mamy

$$\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) :$$

-to pozwala indukcyjnie udowodnić addytywność funkcji μ po obcięciu do dowolnej skończonej rodziny złożonej ze zbiorów domkniętych.

Ustalamy liczbę rzeczywistą $\epsilon > 0$, a następnie zbiór otwarty $G \setminus F$ przedstawiamy w postaci sumy rozłącznych zbiorów $X_0, X_1, \ldots$, które są domknięto-otwarte. Skoro - z mocy definicji

$$\mu(X_0) + \mu(X_1) + \ldots = \mu(G \setminus F) < 1,$$

to dobieramy liczbę naturalną n tak, aby

$$\mu(X_{n+1}) + \mu(X_{n+2}) + \ldots < \epsilon.$$

Wtedy suma $\mu(F) + \mu(G \setminus F)$ jest nie większa niż

$$\mu(F) + \mu(X_0 \cup X_1 \cup \ldots \cup X_n) + \epsilon = \mu(F \cup X_0 \cup X_1 \cup \ldots \cup X_n) + \epsilon \leqslant \mu(G) + \epsilon :$$

w powyższym wzorze równość wynika z addytywności μ po obcięciu do rodziny złożonej ze skończonej ilości rozłącznych zbiorów domkniętych. Wobec dowolności wyboru liczby rzeczywistej $\epsilon > 0$ otrzymujemy

$$\mu(F) + \mu(G \setminus F) \leqslant \mu(G).$$

To kończy dowód: nierówność przeciwna została wykazana w lemacie 7.2 $\square$

Lemat 7.4: *Podzbiór $X \subseteq 2^\omega$ jest mierzalny, gdy dla dowolnej liczby rzeczywistej $\epsilon > 0$ istnieje domknięty podzbiór $F \subseteq X$ taki, że $\mu(F) + \epsilon \geqslant \mu(X)$.*

Dowód. Gdy X jest zbiorem mierzalnym, to dobieramy podzbiory domknięte $F \subseteq X$ oraz $G \subseteq (2^\omega \setminus X)$ tak, aby $\mu(2^\omega \setminus (F \cup G)) < \epsilon$ - z mocy lematu 7.3 zachodzi

$$\mu(F) + \mu(2^\omega \setminus (F \cup G)) = \mu(2^\omega \setminus G).$$

To pociąga $\mu(F) + \epsilon > \mu(2^\omega \setminus G) \geqslant \mu(X)$: czyli $\mu(F) + \epsilon \geqslant \mu(X)$.

Dla dowodu w drugą stronę ustalamy liczbę rzeczywistą $\epsilon > 0$ - i dobieramy podzbiór domknięty $F \subseteq X$ oraz zbiór otwarty $U \supseteq X$ tak, aby

$$\mu(U) - \frac{\epsilon}{2} \leqslant \mu(X) \leqslant \mu(F) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Skoro $F \subseteq U$, to $2^\omega \setminus (F \cup (2^\omega \setminus U)) = U \setminus F$ - to oraz lemat 7.3 implikują

$$\mu(U \setminus F) = \mu(U) - \mu(F) \leqslant \epsilon :$$

równość jest wnioskiem z lematu 7.3; zaś nierówność wynika wprost z określenia zbiorów U oraz F. Zbiory F oraz $2^\omega \setminus U$ są takie, jakich potrzeba dla sprawdzenia mierzalności zbioru X z mocy definicji: co wystarcza dla zakończenia dowodu $\square$

Twierdzenie 7.5: *Rodzina wszystkich zbiorów mierzalnych jest $\sigma-$ciałem oraz funkcja μ obcięta do tej rodziny jest miarą.*

Dowód. Ustalamy liczbę rzeczywistą $\epsilon > 0$ oraz ciąg $A_0, A_1, \ldots$ rozłącznych zbiorów mierzalnych. Dla dowolnej liczby naturalnej n dobieramy podzbiór domknięty $G_n \subseteq A_n$ oraz zbiór otwarty $U_n \supseteq A_n$ tak, aby

$$\mu(U_n \setminus G_n) < \frac{\epsilon}{2^{n+2}}.$$

Zbiory $G_0, G_1, \ldots$ są rozłączne i domknięte. Dla dowolnej liczby naturalnej k zachodzi - z mocy rozumowania takiego jak w początkowym fragmencie dowodu lematu 7.3,

$$\mu(G_0) + \mu(G_1) + \ldots + \mu(G_k) = \mu(G_0 \cup G_1 \cup \ldots \cup G_k) \leqslant 1.$$

To pozwala ustalić liczbę naturalną m tak, aby

$$\mu(G_{m+1}) + \mu(G_{m+2}) + \ldots < \frac{\epsilon}{2}.$$

Wtedy

$$U_0 \cup U_1 \cup \ldots \supseteq A_0 \cup A_1 \cup \ldots \supseteq G_0 \cup G_1 \cup \ldots \cup G_m.$$

Suma z lewej strony jest zbiorem otwartym; zaś - z prawej strony zbiorem domkniętym oraz

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu(U_n) \geqslant \mu(U_0 \cup U_1 \cup \ldots) \geqslant \mu(G_0 \cup G_1 \cup \ldots \cup G_m) = \sum_{k=0}^{m} \mu(G_k).$$

Na podstawie lematu 7.3 - stosowanego do kolejnych par składników, mamy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu(U_n) - \sum_{k=0}^{m} \mu(G_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(U_k \setminus G_k) + \sum_{k=m+1}^{\infty} \mu(G_k) \leqslant \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Zbiór domknięty $G_0 \cup G_1 \cup \ldots \cup G_m$ jest taki, jakiego potrzeba - wobec lematu 7.4, dla sprawdzenia, iż suma $A_0 \cup A_1 \cup \ldots$ jest zbiorem mierzalnym. Mamy także

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu(U_n) \geqslant \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) \geqslant \mu(A_0 \cup A_1 \cup \ldots) \geqslant \sum_{n=0}^{m} \mu(G_n),$$

gdzie skrajne liczby różnią się o ϵ. Wobec dowolności doboru liczby rzeczywistej $\epsilon > 0$ wnioskujemy, że $\sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) = \mu(A_0 \cup A_1 \cup \ldots)$: funkcja μ obcięta do $\sigma-$ciała wszystkich zbiorów mierzalnych jest miarą $\square$

Zbiór mierzalny będziemy nazywali zbiorem *miary zero,* gdy miara μ na tym zbiorze równa się zero: dowolny podzbiór zbioru miary zero jest także zbiorem miary zero.

Twierdzenie 7.6: *Podzbiór zbioru Cantora jest mierzalny, gdy można go przedstawić w formie sumy podzbioru typu F_σ oraz zbioru miary zero.*

Dowód. Gdy $X \subseteq 2^\omega$ jest zbiorem mierzalnym, to dla dowolnej liczby naturalnej n dobieramy zbiór domknięty $F_n \subseteq X$ oraz zbiór otwarty $G_n \supseteq X$ tak, aby

$$\mu(G_n \setminus F_n) < \frac{1}{n}.$$

Następnie kładziemy $F_0 \cup F_1 \cup \ldots = E$ oraz $Y = X \setminus E$. Zbiór E jest typu F_σ oraz zawsze zachodzi $Y \subseteq G_n \setminus F_n$. Skoro $\mu(Y) \leqslant \mu(G_n \setminus F_n) \leqslant \frac{1}{n}$, to wobec dowolności doboru liczby naturalnej n wnioskujemy, że $\mu(Y) = 0$. Zachodzi $X = E \cup Y$: co wystarcza dla zakończenia dowodu $\square$

Rodzinę zbiorów będziemy nazywali *ideałem,* gdy jest zamknięta na sumy podrodzin skończonych oraz dla dowolnego zbioru z tej rodziny wszystkie jego podzbiory należą do tej rodziny. Jeśli ideał jest zamknięty na sumy podrodzin przeliczalnych, to będziemy go nazywali *σ-ideałem.*

Dotychczas mnieliśmy do czynienia z σ-ideałem NR zbiorów: w wykładzie 6. Naturalnymi przykładami σ-ideałow są: ideał podzbiorów przeliczalnych, ideał zbiorów I kategorii lub ideał zbiorów miary zero. Dla σ-ideałów prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 7.7. *Jeśli I jest σ-ideałem złożonym z podzbiorów przestrzeni topologicznej X, to dla dowolnej funkcji rzeczywistej mierzalnej względem rodziny zbiorów postaci $(Y \setminus G) \cup H$, gdzie Y przebiega podzbiory otwarte przestrzeni X zaś zbiory G oraz H należą do I, istnieje podzbiór $Z \in I$ taki, że funkcja f obcięta do dopełnienia $X \setminus Z$ jest ciągła.*

Dowód. Ustawiamy w ciąg $U_0, U_1, \ldots$ wszystkie otwarte przedziały o końcach wymiernych. Dla dowolnej liczby naturalnej n mamy

$$f^{-1}(U_n) = (Y_n \setminus G_n) \cup H_n,$$

gdzie podzbiór $Y_n \subseteq X$ jest otwarty; zaś zbiory G_n oraz H_n należą do σ-ideału I. Kładziemy

$$G_0 \cup G_1 \cup \ldots \cup H_0 \cup H_1 \cup \ldots = Z$$

- i sprawdzamy, że zbiór Z jest taki, jakiego potrzebujemy $\square$

Rodziny wszystkich zbiorów mierzalnych nie można przedstawić w formie takiej, jak w założeniach twierdzenie 7.7 - o ile rozważymy topologię produktową i σ-ideał zbiorów miary zero. Dla opisania stosownego kontrprzykładu ustawiamy w ciąg $U_0, U_1, \ldots$ wszystkie podzbiory bazowe dla topologii produktowej. Bierzemy ciąg $s_0, s_1, \ldots$ złożonych z dodatnich liczb rzeczywistych, których suma jest mniejsza od połowy liczby $\mu(U_0)$. Ustawiamy w ciąg $V_0, V_1, \ldots$ wszystkie podzbiory bazowe dla topologii produktowej zawarte w U_0. Dla dowolnej liczby naturalnej k dobieramy otwarty podzbiór $F_k \subseteq V_k$ tak, aby liczba $\mu(F_k)$ była mniejsza niż s_k. Wtedy różnica $U_0 \setminus (F_0 \cup F_1 \cup \ldots)$ jest miary większej niż połowa liczby $\mu(U_0)$ oraz jest zbiorem nigdziegęstym. Wybieramy dwa rozłączne podzbiory G_0 oraz H_0 - oba domknięte, miary dodatniej oraz zawarte w różnicy $U_0 \setminus (F_0 \cup F_1 \cup \ldots)$: jest to możliwe wobec lematu 7.4, właściwości metrycznych zbioru Cantora oraz faktu, że podzbiory skończone są miary zero. Jeśli założymy, że określiśmy rozłączne i nigdziegęste zbiory $G_0, G_1, \ldots, G_n$ oraz $H_0, H_1, \ldots, H_n$, to powtarzamy powyższe rozumowanie biorąc zamiast U_0 różnicę

$$U_n \setminus (G_0 \cup G_1 \cup \ldots \cup G_n \cup H_0 \cup H_1 \cup \ldots \cup H_n).$$

Funkcja charakterystyczna sumy $H_0 \cup H_1 \cup \ldots$ jest zapowiedzianym kontrprzykładem. Jest ona mierzalna oraz przeciwobrazy 0 i 1 przecinają dowolny niepusty podzbiór otwarty w topologii produktowej: każdy na zbiorze miary dodatniej.

O funkcji rzeczywistej, dla której przeciwobraz dowolnego zbioru otwartego jest zbiorem mierzalnym będziemy mówili, że jest $\mu - mierzalna$. Kontrprzykład opisany powyżej nie pozwala traktować dowolnej funkcji μ-mierzalnej jak funkcję, która po usunięciu zbioru miary zero zostaje funkcją ciągłą. Jednakże topologię produktową na zbiorze Cantora można powiększyć - dodając zbiorów otwartych, do tzw. *topologii gęstościowej*, która nie ma wady wynikającej z właściwości kontrprzykładu: w topologii gęstościowej zbiory postaci $(Y \setminus M) \cup N$ - gdzie Y jest zbiorem otwartym; zaś N oraz M zbiorami miary zero - to zbiory mierzalne.

Twierdzenie 7.8 (N. Łuzin): *Funkcja rzeczywista f określona na zbiorze Cantora jest μ-mierzalna, gdy dla dowolnej liczby rzeczywistej $\epsilon > 0$ istnieje zbiór otwarty E taki, że $\mu(E) < \epsilon$ oraz obcięcie funkcji f do różnicy $2^\omega \setminus E$ jest funkcją ciągłą.*

Dowód. Ustawiamy w ciąg $U_0, U_1, \ldots$ wszystkie przedziały otwarte o końcach wymiernych. Dla dowolnej liczby naturalnej n dobieramy zbiór domknięty $F_n \subseteq f^{-1}(U_n)$ oraz zbiór otwarty $G_n \supseteq f^{-1}(U_n)$ tak, aby

$$\mu(G_n \setminus F_n) < \frac{\epsilon}{2^{n+1}}.$$

Kładziemy $(G_0 \setminus F_0) \cup (G_1 \setminus F_1) \cup \ldots = E$: zbiór E jest otwarty, $\mu(E) < \epsilon$ i jeśli h jest obcięciem funkcji f do różnicy $2^\omega \setminus E$, to

$$h^{-1}(U_n) = f^{-1}(U_n) \setminus E = F_n \setminus E = G_n \setminus E.$$

Dla dowolnej liczby naturalnej n przeciwobraz $h^{-1}(U_n)$ jest domknięto-otwartym podzbiorem w topologii dziedziczonej przez $2^\omega \setminus E$ - czyli przez dziedzinę funkcji h, a więc funkcja h jest ciągła na tym zbiorze: funkcja f po obcięciu do $2^\omega \setminus E$ jest funkcją ciągłą.

Dla dowodu w drugą stronę - załóżmy, że ciąg $E_0, E_1, \ldots$ składa się ze zbiorów otwartych takich, że dla dowolnej liczby naturalnej n obcięcie funkcji f do zbioru $2^\omega \setminus E_n$ jest funkcją ciągłą oraz $\mu(E_n) < \frac{1}{n+1}$. Zbiór $2^\omega \setminus E_n$ jest zwarty i jeśli U jest zbiorem otwartym, to zbiór

$$f^{-1}(U) \cap (2^\omega \setminus E_n) = f^{-1}(U) \setminus E_n$$

- jako zbiór otwarty w $2^\omega \setminus E_n$, jest zbiorem typu F_σ. Gdy $E_0 \cap E_1 \cap \ldots = E$, to

$$f^{-1}(U) \setminus E = \cup\{f^{-1}(U) \setminus E_n : n \in \omega\}.$$

Przeciwobraz $f^{-1}(U)$ jest mierzalny, gdyż jest sumą zbioru typu F_σ (jest sumą zbiorów $f^{-1}(U) \setminus E_n$, a więc na podstawie lematu 3.2(a) jest zbiorem typu F_σ) oraz podzbioru zawartego w E: a więc zbioru miary zero. To wystarcza dla zakończenia dowodu $\square$

Gdy S jest σ-ciałem oraz $f_0, f_1, \ldots$ jest ciągiem funkcji rzeczywistych punktowo zbieżnym do funkcji f, to f jest funkcją S-mierzalną: można to uzasadnić tak samo jak twierdzenie 3.4. Jeśli funkcja: $x \to g(x)$ jest ciągła; zaś funkcja: $x \to f(x)$ jest S-mierzalną, to złożenie: $x \to g(f(x))$ jest funkcją S-mierzalną: wynika to z zawsze prawdziwego wzoru

$$(gf)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)).$$

To pociąga, że funkcja: $x \to f^2(x)$ oraz funkcja: $x \to |f(x)|$ są S-mierzalne. Jeśli $r_0, r_1, \ldots$ jest ciągiem wszystkich liczb wymiernych, to zbiór $\{x : f(x)+g(x) < a\}$ jest równy sumie

$$\cup\{\{x : f(x) < a - r_n\} : n \in \omega\} \cup \cup\{\{x : g(x) < r_n\} : n \in \omega\}$$

oraz zachodzi podobna równość, gdy wszędzie znak $<$ zamienimy na symbol $>$. Te dwie równości pozwalają wnioskować, że funkcja: $x \to f(x) + g(x)$ jest S-mierzalna. Podobnie postępujemy aby uzasadnić, że dla dowolnej liczby rzeczywistej c funkcja: $x \to cf(x)$ jest S-mierzalna. Skoro funkcja: $x \to -f(x)$ jest S-mierzalna, to różnica: $x \to f(x) - g(x)$ jest funkcją S-mierzalną. W końcu równość

$$4fg = (f+g)^2 - (f-g)^2$$

pociąga S-mierzalność iloczynu: $x \to f(x)g(x)$, funkcji: $x \to \min(f(x), g(x))$ oraz funkcji: $x \to \max(f(x), g(x))$. To samo dotyczy granic punktowych

$$\limsup_{n\to\infty} f_n \ \text{ oraz } \ \liminf_{n\to\infty} f_n :$$

co można to uzasadnić podobnie jak zrobiliśmy to w wykładzie 4, uzasadniając lemat 4.2.

Twierdzenie 7.9 (D. F. Jegorow): *Jeśli ciąg $f_0, f_1, \ldots$ funkcji rzeczywistych μ-mierzalnych określonych na zbiorze mierzalnym E jest punktowo zbieżny, to dla dowolnej liczby rzeczywistej $\epsilon > 0$ istnieje otwarty podzbiór $F \subseteq E$ taki, że $\mu(F) < \epsilon$ oraz ciąg obcięć funkcji $f_0, f_1, \ldots$ do zbioru $E \setminus F$ jest jednostajnie zbieżny.*

Dowód. Dla dowolnych dwu liczb naturalnych n oraz k kładziemy

$$E_{n,k} = \cup\{\{x \in E : |f_m(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{k}\} : n \leqslant m\} :$$

zachodzi $E_{n+1,k} \subseteq E_{n,k}$ oraz $E_{0,k} \cap E_{1,k} \cap \ldots = \emptyset$. Dowolny zbiór $E_{n,k}$ jest mierzalny, gdyż funkcja : $x \to |f_m(x) - f(x)|$ jest μ-mierzalna. Dla dowolnej liczby naturalnej k dobieramy liczbę naturalną n_k tak, aby

$$\mu(E_{n_k,k}) < \frac{\epsilon}{2^{k+1}}.$$

Wtedy suma $\cup\{E_{n_k,k} : k \in \omega_0\} = F$ jest miary μ mniejszej niż połowa ϵ; zaś zawieranie

$$E \setminus F \subseteq E \setminus E_{n_k,k}$$

- pociąga dla dowolnego punktu $x \in E \setminus F$ oraz liczby naturalnej $i > n_k$ nierówność

$$|f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{k}.$$

To wystarcza dla jednostajnej zbieżności ciągu obcięć funkcji $f_0, f_1, \ldots$ do zbioru $E \setminus F$. Korzystamy z lematu 7.4 i dobieramy stosowny domknięty podzbiór zbioru $E \setminus F$ - tj. zbiór różniący się miarą μ o $\frac{\epsilon}{2}$ od zbioru $E \setminus F$: jest to zbiór taki jakiego potrzeba dla zakończenia dowodu $\square$

Rozważmy funkcję $D : 2^\omega \to [0,1]$ określoną wzorem

$$D(X) = \sum_{n \in X} \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Funkcja ta obcięta do rodziny wszystkich nieskończonych podzbiorów liczb naturalnych $[\omega]^\omega$ jest różnowartościowa oraz gdy $x \cup y = \{0, 1, \ldots, k\}$, to

$$D(< x, \omega \setminus y >) = (\sum_{n \in x} \frac{1}{2^{n+1}}, \sum_{n \in \omega \setminus y} \frac{1}{2^{n+1}}] :$$

funkcja D obcięta do rodziny nieskończonych podzbiorów liczb naturalnych o nieskończonych dopełnieniach jest homeomorfizmem. To wystarcza aby twierdzenia formułowane z dokładnością do zbioru I kategorii - a nawet zbioru przeliczalnego, na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych oraz na zbiorze Cantora były takie same.

Funkcję D wykorzystamy dla wprowadzenia tzw. miary Lebesgue'a na skończonym produkcie kartezjańskim zbioru liczb rzeczywistych. Bierzemy rozłączne podzbiory nieskończone liczb naturalnych $A_0, A_1, \ldots, A_k$ dające w sumie zbiór wszystkich liczb naturalnych. Dla dowolnej liczby naturalnej $n < k$ niech f_n będzie funkcją różnowartościową określoną na A_n oraz przyjmującą jako wartości wszystkie liczby naturalne; zaś $F_n : 2^{A_n} \to 2^\omega$ niech będzie funkcją określoną wzorem

$$F_n(\{x_0, x_1, \ldots\}) = D(\{f_n(x_0), f_n(x_1), \ldots\}).$$

W końcu dla dowolnego punktu $X \in 2^\omega$ kładziemy

$$L(X) = F_0(A_0 \cap X) \times F_1(A_1 \cap X) \times \ldots \times F_k(A_k \cap X) :$$

funkcja L po obcięciu do zbioru o mierze 1 jest homeomorfizmem; jest homeomorfizmem określonym na podzbiorze zbioru Cantora złożonym z wszystkich podzbiorów $X \in 2^\omega$ takich, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \leqslant k$ zbiory $X \cap A_n$ oraz $A_n \setminus X$ są nieskończone - dopełnienie tej rodziny, które oznaczamy przez Q, jest miary μ zero. Podzbiór Y zawarty w $k+1$ krotnym produkcie kartezjańskim odcinka $[0,1]$ będziemy nazywali *mierzalnym,* gdy przeciwobraz $L^{-1}([0,1] \cap Y)$ jest mierzalny. Wtedy przyjmujemy

$$\lambda(Y) = \mu(L^{-1}([0,1] \cap Y)) :$$

mamy $\lambda(L(Q)) = 0$. Miarę λ rozszerzamy na $k+1$-krotny produkt kartezjański zbioru liczb rzeczywistych - tzn. na $k+1$-wymiarową przestrzeń euklidesową - wpierw na dowolny $k+1$-krotny produkt kartezjański odcinków z końcami będącymi liczbami całkowitymi o różnicy 1: robimy to tak samo jak dla produktu kartezjańskiego odcinka $[0,1]$. W końcu przyjmujemy, że miara λ zbioru Y jest równa sumie wszystkich miar przekrojów zbioru Y z $k+1$-krotnymi produktami kartezjańskimi odcinków o końcach będących liczbami całkowitymi o różnicy 1. Tak rozszerzona funkcja λ nie jest funkcją rzeczywistą, bo miara λ całej przestrzeni euklidesowej jest równa nieskończoności. Jednakże zakładając, iż dowolna liczba rzeczywista dodana do nieskończoności daje nieskończoność, poszerzamy definicję miary dopuszając zbiory o mierze równej $+\infty$. Tak określone miary zwyczajowo nazywane są miarami Lebesgue'a: miara λ określona na k-wymiarowej przestrzeni euklidesowej to k-wymiarowa *miara Lebesgue'a.* Konsekwencją możliwości określenia miary Lebesgue'a w sposób opisany powyżej jest: *dowolne twierdzenie formułowane z dokładnością do zbiorów miary zero na zbiorze Cantora jest równoważne stosownemu twierdzeniu formułowanemu z taką samą dokładnością dla n-wymiarowej miary Lebesgue'a.*

Odnotujmy, że podobną sytuację jak powyżej dla miary Lebesgue'a mamy względem kategorii. Mianowicie zbiór $L(Q)$ - gdzie Q jest zbiorem określonym powyżej, jest I kategorii w topologii produktowej na $k+1$-krotnym produkcie odcinka $[0,1]$: jest sumą przeliczalnej ilości hiperpowierzchni przekrojonych z tym produktem. Konsekwencją tego jest: *dowolne twierdzenie formułowane z dokładnością do zbiorów I kategorii na zbiorze Cantora jest równoważne stosownemu twierdzeniu formułowanemu z taką samą dokładnością dla skończonego produktu kartezjańskiego zbioru wszystkich liczb rzeczywistych.*