6. Twierdzenie Rosenthla.

Rodzinę S złożoną z nieskończonych podzbiorów liczb naturalnych będziemy nazywali *zbiorem Ramsey'a,* gdy istnieje nieskończony podzbiór liczb naturalnych V taki, że zbiór wszystkich nieskończonych podzbiorów zbioru V jest zawarty w S lub jest rozłączny z S inaczej: $[V]^\omega \subseteq S$ lub $[V]^\omega \cap S = \emptyset$, gdzie $[X]^\omega$ oznacza rodzinę wszystkich nieskończonych i przeliczalnych podzbiorów zawartych w X.

Jeśli M jest nieskończonym podzbiorem liczb naturalnych oraz x jest skończonym i niepusty podzbiorem liczb naturalnych, to rodzinę wszystkich nieskończonych podzbiorów sumy $M \cup x$, które po przekrojeniu ze zbiorem $\{0, 1, \ldots, \sup x\}$ są równe x będziemy oznaczali przez $(x, M)^\omega$ innymi słowy:

$$(x, M)^\omega = \{V \in [M \cup x]^\omega : V \cap \{0, 1, \ldots, \sup x\} = x\};$$

zaś $(\emptyset, M)^\omega$ będzie oznaczało rodzinę wszystkich nieskończonych podzbiorów zbioru M inaczej: $[M]^\omega = (\emptyset, M)^\omega$.

Przyjmijmy, że S jest rodziną nieskończonych podzbiorów liczb naturalnych: tzn. $S \subseteq [\omega]^\omega$. Będziemy mówili, że nieskończony podzbiór liczb naturalnych M *akceptuje* zbiór skończony x, gdy rodzina $(x, M)^\omega$ jest zawarta w S : czyli $(x, M)^\omega \subseteq S$. Gdy nie istnieje podzbiór nieskończony $N \subseteq M$ taki, że rodzina $(x, N)^\omega$ jest zawarta w S (czyli: dla każdego $N \in [M]^\omega$ zachodzi $(x, N)^\omega \setminus S \neq \emptyset$), to będziemy mówili, że zbiór M *odrzuca* zbiór x.

Lemat 6.1 (F. Galvin, K. Prikry): *Dla dowolnej rodziny nieskończonych podzbiorów liczb naturalnych istnieje nieskończony podzbiór liczb naturalnych, który odrzuca lub akceptuje dowolny swój podzbiór skończony.*

Dowód. Niech S będzie rodziną nieskończonych podzbiorów liczb naturalnych. Przyjmujemy $Y_0 = \omega_0$ oraz $x_0 = 0$. Załóżmy, że określiliśmy zbiory nieskończone $Y_0, Y_1, \ldots, Y_n$ oraz ciąg rosnący $x_0, x_1, \ldots, x_n$ różnych liczb naturalnych tak, aby

$$\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset Y_n \subseteq Y_{n-1} \subseteq \ldots \subseteq Y_0.$$

Wszystkie podzbiory zbioru $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ zawierające liczbę x_n oznaczamy przez $f_1, f_2, \ldots, f_{2^n}$ - kładziemy $Y_n = Y_n^0$, a następnie zakładamy, że określiśmy zbiory nieskończone $Y_n^0, Y_n^1, \ldots, Y_n^k$ tak, aby

$$\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset Y_n^k \subseteq Y_n^{k-1} \subseteq \ldots \subseteq Y_n^0.$$

Jeśli istnieje podzbiór nieskończony $X \subseteq Y_n^k$ taki, że

$$\emptyset \neq (f_{k+1}, X)^\omega \subseteq S,$$

to sumę $X \cup \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ oznaczamy Y_n^{k+1}; w przeciwnym przypadku kładziemy $Y_n^{k+1} = Y_n^k$. Na koniec kładziemy $Y_{n+1} = Y_n^{2^n}$ oraz dobieramy liczbę $x_{n+1} \in Y_{n+1}$ większą od x_n.

Zbiór $N = \{x_0, x_1, \ldots\}$ - określony przez powyższą indukcję, akceptuje bądź odrzuca dowolny swój podzbiór skończony i niepusty. Aby się o tym przekonać bierzemy podzbiór niepusty i skończony $x \subset N$. Wtedy istnieje liczba naturalna n taka, że $\sup x = x_n$ oraz $x = f_{k+1}$. Skoro $N \subseteq Y_n^{k+1}$, to otrzymujemy

$$(x, N)^\omega \subseteq (x, Y_n^{k+1})^\omega = (f_{k+1}, Y_n^{k+1})^\omega.$$

Z określenia rodziny $(f_{k+1}, Y_n^{k+1})^\omega$ wiemy, że jest ona zawarta w S lub dla dowolnego podzbioru nieskończonego $V \subseteq Y_n^k$ rodzina $(f_{k+1}, V)^\omega$ nie jest zawarta w S : gdy jest prawdziwa pierwsza część tej alternatywy, to zbiór N akceptuje x; gdy druga część alternatywy jest prawdziwa, to N odrzuca x.

Gdy dla nieskończenie wielu liczb $x \in N$ zbiór $\{x\}$ jest akceptowany przez N, to oznaczamy przez M zbiór takich liczb: wtedy dla dowolnej liczby $x \in M$ zachodzi $(\{x\}, M)^\omega \subseteq (\{x\}, N)^\omega \subseteq S$. Skoro

$$(\emptyset, M)^\omega = \cup\{(\{x\}, M)^\omega : x \in M\},$$

to M akceptuje zbiór pusty: równocześnie akceptuje dowolny swój podzbiór skończony.

Gdy dla nieskończenie wielu liczb $x \in N$ zbiór $\{x\}$ jest odrzucany przez N, to oznaczamy przez M zbiór takich liczb: wtedy M odrzuca zbiór pusty. Skoro $M \subseteq N$, to M akceptuje bądź odrzuca dowolny swój podzbiór skończony $\square$

Lemat 6.2 (F. Galvin, K. Prikry): *Niech S będzie rodziną nieskończonych podzbiorów liczb naturalnych oraz M zbiorem nieskończonym akceptującym bądź odrzucającym dowolny swój podzbiór skończony. Jeśli $x \subset M$ jest podzbiorem skończonym odrzucanym przez M, to dla prawie wszystkich liczb $t \in M$ zbiór M odrzuca sumę $x \cup \{t\}$.*

Dowód. Przypuśćmy - dla dowodu niewprost, że $t_0, t_1, \ldots$ jest rosnącym ciągiem złożonym z liczb należących do M, z których każda ogranicza zbiór x z góry takim, że zawsze zachodzi

$$(x \cup \{t_n\}, M)^\omega \subseteq S.$$

Mamy wtedy $(x, x \cup \{t_0, t_1, \ldots\})^\omega \subseteq S$; bo gdy

$$N \in (x, x \cup \{t_0, t_1, \ldots\})^\omega$$

oraz $t_n = \min N \setminus x$, to $N \in (x \cup \{t_n\}, M)^\omega \subseteq S$: czyli zbiór M nie odrzuca zbioru x - mamy sprzeczność kończącą dowód $\square$

Lemat 6.3 (F.Galvin, K. Prikry): *Niech S będzie rodziną nieskończonych podzbiorów liczb naturalnych oraz M zbiorem nieskończonym akceptującym bądź odrzucającym dowolny swój podzbiór skończony. Jeśli M odrzuca zbiór pusty, to istnieje podzbiór nieskończony $N \subseteq M$ taki, że N odrzuca dowolny swój podzbiór skończony.*

Dowód. Indukcyjnie określamy ciąg rosnący $t_0, t_1, \ldots$ różnych liczb naturalnych należących do M: zerowy krok indukcji jest taki sam jak n-ty. Załóżmy, że określiliśmy zbiór $\{t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}\} \subset M$ tak, aby zbiór M odrzucał dowolny podzbiór zbioru $\{t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}\}$. Niech $t_n \in M$ będzie liczbą naturalną taką, że dla dowolnego podzbioru

$$x \subseteq \{t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}\}$$

zbiór M odrzuca sumę $x \cup \{t_n\}$. Liczba taka istnieje na podstawie poprzedniego lematu. Kładziemy $N = \{t_0, t_1, \ldots\}$. Skoro $N \subseteq M$, to N odrzuca zbiór pusty. Gdy $x \subset N$ jest zbiorem skończonym i niepustym, to istnieje liczba naturalna n taka, że $\sup x = t_n$. Skoro zbiór M odrzuca sumę $x \cup \{t_n\} = x$, to podzbiór $N \subseteq M$ odrzuca ją także $\square$

Topologię na zbiorze wszystkich nieskończonych podzbiorów liczb naturalnych - zbiór ten będziemy oznaczali $[\omega]^\omega$, generowaną przez zbiory postaci

$$< x, V >= \{X \in [\omega]^\omega : x \subset X \subseteq V\},$$

gdzie V jest nieskończonym podzbiorem liczb naturalnych oraz x jest skończonym podzbiorem liczb naturalnych będziemy nazywali *topologią Ellentucka*. Zauważmy, że gdy $x = \emptyset$ lub $\{0, 1, \ldots, \sup x\} \cap V = x$, to $(x, V)^\omega =< x, V >$. Zawsze zachodzi $(x, V)^\omega \subseteq< x, V \cup x >$ oraz $< \emptyset, V >= (\emptyset, V)^\omega = [V]^\omega$. Zbiory generujące topologię Ellentucka tworzą bazę zbiorów otwartych: jest to rodzina zamknięta na przekroje skończone. Elementy tej bazy są domknięto-otwarte w topologii Ellentucka. Zbiory otwarte w topologii dziedzicznej z topologii produktowej są otwarte w topologii Ellentucka: topologia dziedziczona z topologii produktowej jest generowana przez zbiory postaci $< x, V \setminus y >$, gdzie x oraz y są rozłącznymi zbiorami skończonymi.

Lemat 6.4 (C. St. J. A. Nash-Williams): *Dowolny podzbiór otwarty w topologii Ellentucka jest zbiorem Ramsey'a.*

Dowód. Przypuśćmy - dla dowodu niewprost, że zbiór S jest otwarty w topologii Ellentucka oraz nie jest zbiorem Ramsey'a. Wobec lematu 6.1 istnieje nieskończony podzbiór liczb naturalnych M akceptujący bądź odrzucający dowolny swój podzbiór skończony. Zbiór S nie jest zbiorem Ramsey'a, a więc M odrzuca zbiór pusty i wobec lematu 6.3 istnieje podzbiór nieskończony $N \subseteq M$ odrzucający dowolny swój podzbiór skończony. Przekrój $S \cap (\emptyset, N)^\omega$ jest niepusty: bo założyliśmy, iż S nie jest zbiorem Ramsey'a, oraz jest otwarty w topologii Ellentucka. Istnieje więc zbiór skończony x oraz nieskończony podzbiór liczb naturalnych V taki, że

$$< x, V \cup x > \subseteq S \cap (\emptyset, N)^\omega.$$

Skoro

$$(x, V)^\omega \subseteq < x, V \cup x > \subseteq (\emptyset, N)^\omega,$$

to N nie odrzuca podzbioru skończonego $x \subset N$: mamy sprzeczność kończącą dowód $\square$

Nieskończony ciąg par

$$(A_{0,0}, A_{0,1}), (A_{1,0}, A_{1,1}), \ldots, (A_{n,0}, A_{n,1}), \ldots$$

podzbiorów zbioru X będziemy nazywali *niezależnym,* gdy dla dowolnej liczby naturalnej n zbiory $A_{n,0}$ oraz $A_{n,1}$ są rozłączne oraz dla dowolnego ciągu zer i jedynek $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ przekrój zbiorów $A_{0,\varepsilon_0}, A_{1,\varepsilon_1}, \ldots, A_{n,\varepsilon_n}$ jest niepusty: wobec dowolności wyboru n jest nieskończony.

Przykładem ciągu par niezależnych jest ciąg par podzbiorów zbioru Cantora, gdzie n-ta para to przeciwobrazy zera i jedynki przy rzutowaniu na n-tą oś: wtedy $A_{n,0} = \{(x_0, x_1, \ldots) \in 2^\omega : x_n = 0\}$; zaś $A_{n,1} = \{(x_0, x_1, \ldots) \in 2^\omega : x_n = 1\}$.

Ciąg par

$$(A_{0,0}, A_{0,1}), (A_{1,0}, A_{1,1}), \ldots, (A_{n,0}, A_{n,1}), \ldots$$

podzbiorów zbioru X będziemy nazywali *zbieżnym,* gdy dla dowolnej liczby naturalnej n zbiory $A_{n,0}$ oraz $A_{n,1}$ są rozłączne oraz dowolny punkt należący do X należy do skończonej ilości zbiorów $A_{n,0}$ (- z drugim indeksem 0) lub do skończonej ilości zbiorów $A_{n,1}$ (- z drugim indeksem 1).

Jeśli L jest podzbiorem liczb naturalnych, to przez $L(0), L(1), \ldots$ będziemy oznaczali ciąg rosnący (silnie) wszystkich liczb należących do L.

Lemat 6.5 (J. Farahat): *Jeśli ciąg par*

$$(A_{0,0}, A_{0,1}), (A_{1,0}, A_{1,1}), \ldots, (A_{n,0}, A_{n,1}), \ldots$$

podzbiorów zbioru X nie zawiera podciągu zbieżnego, to zawiera podciąg niezależny.

Dowód. Rozważmy rodzinę S nieskończonych podzbiorów liczb naturalnych złożoną ze zbiorów postaci L takich, że dla dowolnej liczby naturalnej k przekrój zbiorów

$$A_{L(0),0}, A_{L(2),0}, \ldots, A_{L(2k),0}, A_{L(1),1}, A_{L(3),1}, \ldots, A_{L(2k+1),1}$$

jest niepusty. Rodzina S jest domknięta w topologii Ellentucka; równocześnie jest domknięta w topologii na $[\omega]^\omega$ dziedziczonej z topologii produktowej. Jest tak, bo gdy nieskończony podzbiór liczb naturalnych L nie należy do S, to istnieje liczba naturalna k taka, że przekrój

$$A_{L(0),0} \cap A_{L(2),0} \cap \ldots \cap A_{L(2k),0} \cap A_{L(1),1} \cap A_{L(3),1} \cap \ldots \cap A_{L(2k+1),1}$$

jest pusty: żaden element zbioru otwartego $(\{L(0), L(1), \ldots, L(2k+1)\}, \omega)^\omega$ - do którego należy L, nie należy do S.

Korzystamy z lematu 6.4 i dobieramy nieskończony podzbiór liczb naturalnych T taki, że

$$[T]^\omega \subseteq S \text{ lub } [T]^\omega \cap S = \emptyset.$$

Nie może być $[T]^\omega \cap S = \emptyset$. Aby się o tym przekonać bierzemy punkt x należący do nieskończenie wielu zbiorów $A_{n,0}$ - gdzie $n \in N \subseteq T$, oraz należący do nieskończenie wielu zbiorów $A_{k,1}$ - gdzie $k \in M \subseteq T$: taki punkt istnieje wobec braku podciągu zbieżnego w ciągu takim, jak w założeniach lematu. Następnie wybieramy podzbiór nieskończony $P \subseteq N \cup M$ tak, aby

$$\{P(2n) : n \in \omega\} \subseteq N \quad \text{oraz} \quad \{P(2n+1) : n \in \omega\} \subseteq M.$$

Wtedy $x \in A_{L(0),0} \cap A_{L(2),0} \cap \ldots \cap A_{L(2k),0} \cap A_{L(1),1} \cap A_{L(3),1} \cap \ldots \cap A_{L(2k+1),1}$, co pociąga $P \in S$ i skoro $P \subseteq T$, to przekrój $S \cap [T]^\omega$ jest niepusty.

Skoro $[T]^\omega \cap S \neq \emptyset$, to $[T]^\omega \subseteq S$, a wtedy ciąg

$$T(2), T(4), \ldots, T(2n), \ldots$$

wyznacza ciąg niezależny jakiego potrzebujemy. Dla uzasadnienia tego potrzeba pokazać, że jeśli $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ jest ciągiem zer i jedynek, to przekrój zbiorów

$$A_{T(2),\varepsilon_1}, A_{T(4),\varepsilon_2}, \ldots, A_{T(2n),\varepsilon_n}$$

jest niepusty. Aby się o tym przekonać dobieramy podzbiór nieskończony $N \subseteq T$ taki, że $\{T(2), T(4), \ldots, T(2n)\} \subseteq N$ oraz - gdy $\varepsilon_k = 0$, to $T(2k) = N(2s)$; zaś gdy $\varepsilon_k = 1$, to zachodzi $T(2k) = N(2s+1)$. Wtedy z niepustości przekroju potwierdzającego należenie $T \in S$ wynika, że przekrój jak wyżej potrzeba jest niepusty $\square$

Twierdzenie 6.6 (H. P. Rosenthal): *Jeśli $f_0, f_1, \ldots$ jest ciągiem funkcji rzeczywistych określonych na tym samym zbiorze, to ciąg ten zawiera podciąg* *punktowo zbieżny lub istnieją liczba rzeczywista r, liczba rzeczywista dodatnia s oraz nieskończony podzbiór liczb naturalnych L takie, że ciąg par zbiorów*

$$\{(f_n^{-1}((-\infty, r)), f_n^{-1}((r+s, +\infty)))\},$$

gdzie $n \in L$, jest niezależny.

Dowód. Załóżmy, że ciąg $f_0, f_1, \ldots$ funkcji rzeczywistych określonych na zbiorze X nie zawiera podciągu punktowo zbieżnego. Aby uzasadnić twierdzenie - wobec poprzedniego lematu, wystarczy pokazać, że istnieją liczba rzeczywista r, liczba rzeczywista dodatnia s oraz nieskończony podzbiór liczb naturalnych L takie, że ciąg par zbiorów

$$\{(f_n^{-1}((-\infty, r)), f_n^{-1}((r+s, +\infty)))\},$$

gdzie $n \in L$, nie zawiera podciągu zbieżnego. Przypuśćmy - dla dowodu niewprost, że tak nie jest. Wtedy ustawiamy w ciąg $(r_0, s_0), (r_1, s_1), \ldots$ wszystkie pary liczb wymiernych, dla których liczby $s_0, s_1, \ldots$ są dodatnie. Następnie indukcyjnie dobieramy ciąg nieskończonych podzbiorów liczb naturalnych $L_0, L_1, \ldots$ tak, aby $L_0 \supseteq L_1, \supseteq \ldots$ oraz dla dowolnej liczby naturalnej k ciąg par zbiorów

$$\{(f_n^{-1}((-\infty, r_k)), f_n^{-1}((r_k+s_k, +\infty)))\},$$

gdzie $n \in L_k$, był zbieżny.

Korzystamy z lematu 1.1 i dobieramy nieskończony podzbiór liczb naturalnych L w zbiorach $L_0, L_1, \ldots$ prawie zawarty. Dla dowolnego punktu x rozważamy dwa podzbiory liczb rzeczywistych:

$$A = \{y : f_n(x) \leqslant y \text{ dla skończenie wielu } n \in L\}$$

oraz

$$B = \{y : f_n(x) \geqslant y \text{ dla skończenie wielu } n \in L\}.$$

Gdy $A = \emptyset$, to $\lim_{n\in L} f_n(x) = +\infty$; zaś gdy $B = \emptyset$, to $\lim_{n\in L} f_n(x) = -\infty$. W pozostałych przypadkach zachodzi $\sup A = \inf B$. Jest tak, bo zawsze zachodzi $\sup A \leqslant \inf B$, i gdyby $\sup A < \inf B$, to istniałyby liczby wymierne r_k oraz s_k takie, że $\sup A < r_k < r_k + s_k < \inf B$. A wtedy dla nieskończenie wielu $n \in L$ zachodziłoby $f_n(x) < r_k$: bo $\sup A < r_k$, oraz dla nieskończenie wielu $n \in L$ zachodziłoby $r_k + s_k < f_n(x)$: bo $r_k + s_k < \inf A$. Jest to niemożliwe, bo z prawie zawierania L przez L_k wynika zbieżności ciągu par zbiorów

$$\{(f_n^{-1}((-\infty, r_k)), f_n^{-1}((r_k+s_k, +\infty)))\},$$

gdzie $n \in L$; zaś taka zbieżność implikuje, że powyżej nie można dwukrotnie użyć określenia: dla nieskończenie wielu $n \in L$. Równość $\sup A = \inf B$ pociąga

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sup A$: wobec dowolności wyboru punktu x to wystarcza dla zakończenia dowodu $\square$

Rodzinę S nieskończonych podzbiorów liczb naturalnych będziemy nazywali *CR-zbiorem,* gdy dla dowolnego nieskończonego podzbioru liczb naturalnych V oraz dowolnego skończonego podzbioru liczb naturalnych x istnieje podzbiór nieskończony $M \subseteq V$ taki, że

$$< x, M \cup x > \subseteq S \qquad \text{lub} \qquad < x, M \cup x > \cap S = \emptyset.$$

Jeśli w definicji CR-zbioru przyjmniemy za zbiór x zbiór pusty, zaś za zbiór V zbiór wszystkich liczb naturalnych - to widzimy, że dowolny CR-zbiór jest zbiorem Ramsey'a.

Lemat 6.7 (F. Galvin, K. Prikry): *Dowolny podzbiór otwarty w topologii Ellentucka jest CR-zbiorem.*

Dowód. Jeśli $< x, N > \subseteq [\omega]^\omega$, to traktujemy zbiór x jak zbiór pusty; zaś zbiór N jak zbiór wszystkich liczb naturalnych - i powtarzamy rozumowanie uzasadniające lemat 6.4 $\square$

Zbiór nigdziegęsty w topologii Ellentucka będziemy nazywali *NR-zbiorem.*

Lemat 6.8 (F. Galvin, K. Prikry): *Jeśli rodzina nieskończonych podzbiorów liczb naturalnych S jest NR-zbiorem, to dla dowolnego nieskończonego podzbioru liczb naturalnych M oraz dowolnego skończonego podzbioru liczb naturalnych x istnieje podzbiór nieskończony $N \subseteq M$ taki, że $< x, N \cup x > \cap S = \emptyset$.*

Dowód. Niech X oznacza domknięcie - w topologii Ellentucka, zbioru S : jest to zbiór domknięty i nigdziegęsty, a więc jego dopełnienie jest zbiorem otwartym i gęstym w tej topologii. Korzystamy z lematu 6.7 i dobieramy nieskończony podzbiór zbioru M taki, że

$$< x, N \cup x > \subseteq X \qquad \text{lub} \qquad < x, N \cup x > \cap X = \emptyset.$$

Nie może zachodzić $< x, N \cup x > \subseteq X$, gdyż zbiór S - a więc i zbiór X, jest nigdziegęsty w topologii Ellentucka. Zachodzi więc $< x, N \cup x > \cap X = \emptyset$: co uzasadnia tezę $\square$

Lemat 6.9 (F. Galvin, K. Prikry): *Dowolny podzbiór I kategorii w topologii Ellentucka jest NR-zbiorem.*

Dowód. Niech $S_0, S_1, \ldots$ będzie ciągiem NR-zbiorów; zaś N nieskończonym podzbiorem liczb naturalnych. Załóżmy, że określiliśmy ciąg zbiorów

$$N = N_0 \supseteq N_1 \supseteq \ldots \supseteq N_k \text{ oraz liczby naturalne } a_0, a_1, \ldots, a_k \in N_k.$$

Korzystamy z poprzedniego lematu - kolejno indukcyjnie wykorzystując go 2^{k+1} razy, i dobieramy podzbiór nieskończony $M_k \subseteq N_k$ tak, aby dla dowolnego zbioru y takiego, że $y \subseteq \{a_0, a_1, \ldots, a_k\}$ zachodziło

$$< y, M_k \cup y > \subseteq [\omega]^\omega \setminus (S_0 \cup \ldots, \cup S_k).$$

Dalej kładziemy $N_{k+1} = M_k \cup \{a_0, \ldots, a_k\}$ i wybieramy liczbę $a_{k+1} \in M_k$ różną od liczb $a_0, \ldots, a_k$. W końcu kładziemy $W = \{a_0, a_1, \ldots\}$: Skoro $W \subseteq N_{k+1}$ oraz zbiór $< \emptyset, N_{k+1} >$ jest - rozłączny ze zbiorami $S_0, \ldots, S_k$, to zbiory $S_0, S_1, \ldots$ nie przecinają zbióru $< \emptyset, W >$.

Dla zakończenia dowodu zauważmy, że dowód jak wyżej przechodzi, gdy w rodzinie $< \emptyset, N >$ za zbiór pusty podstawimy skończony podzbiór liczb naturalnych: wtedy w dowolnym podzbiorze otwartym i niepustym będzie zawarty podzbiór rozłączny ze zbiorami $S_0, S_1, \ldots$, który jest otwarty i niepusty $\square$

Będziemy mówili, że podzbiór przestrzeni topologicznej ma *własność Baire'a,* gdy można go przedstawić w postaci $(Q \setminus P) \cup R$, gdzie zbiory P oraz R są zbiorami I kategorii zaś zbiór Q jest zbiorem otwartym - podzbiory o własności Baire'a tworzą σ-ciało.

Twierdzenie 6. 10 (E. Ellentuck): *Rodzina nieskończonych podzbiorów liczb naturalnych jest CR-zbiorem, gdy ma własność Baire'a w topologii Ellentucka.*

Dowód. Jeśli rodzina S nieskończonych podzbiorów liczb naturalnych jest CR-zbiorem, to - wobec definicji CR-zbioru, suma wnętrza zbioru S oraz wnętrza dopełnienia zbioru S jest otwarta i gęsta w topologii Ellentucka. Wynika z tego, że zbiór S można przedstawić jako sumę jego wnętrza oraz zbioru, który jest rozłączny ze zbiorem otwartym i gęstym - a więc z definicji jest NR-zbiorem: S ma własność Baire'a w topologii Ellentucka.

Jeśli rodzinę S nieskończonych podzbiorów liczb naturalnych można przedstawić w postaci $(Q \setminus P) \cup R$, gdzie zbiory P oraz R są I kategorii oraz zbiór Q jest otwarty, to korzystamy z poprzedniego lematu. Zmiejszamy zbiór Q o domknięcie zbioru P oraz stosownie powiększamy zbiór R tak, aby $S = Q \cup R$: zmienione zbiory oznaczamy tak samo jak przed zmianą. Zbiory Q oraz R są CR-zbiorami na podstawie lematów 6.4 oraz 6.9; zaś ich suma jest CR-zbiorem z mocy następującego rozumowania: jeśli zbiór $< x, M >$ jest niepusty, to korzystamy z definicji CR-zbioru zmniejszając dwukrotnie zbiór M do zbioru nieskończonego P tak, aby

$$< x, P \cup x > \subseteq S \text{ lub } < x, P \cup x > \cap S = \emptyset \ \square$$

Twierdzenie 6.11: *Jeśli rodzina S nieskończonych podzbiorów liczb naturalnych jest NR-zbiorem, to dla dowolnego nieskończonego podzbioru liczb natural-*

nych N istnieje podzbiór nieskończony $M \subseteq N$ taki, że dla dowolnego skończonego podzbioru liczb naturalnych x zachodzi $< \emptyset, M \cup x > \cap S = \emptyset$.

Dowód. Zauważmy wpierw, że jeśli rodzina S jest NR-zbiorem, to dla dowolnych dwu rozłącznych zbiorów skończonych x oraz y rodzina

$$S(x, y) = \{x \cup (U \setminus y) : U \in S\}$$

jest także NR-zbiorem. Jest tak, bo zawsze $< z, V > \cap S = \emptyset$ pociąga

$$< a \cup x, V \setminus y > \cap S(x, y) = \emptyset :$$

gdy $a \cap y = \emptyset$, to w niepustym zbiorze otwartym $< a, V >$ jest zawarty niepusty zbiór otwarty $< a \cup x, V \setminus y >$ rozłączny z $S(x, y)$; gdy $a \cap y \neq \emptyset$, to zbiór $S(x, y)$ jest rozłączny z rodziną $< a, V >$. Wobec dowolności wyboru zbioru $< a, V >$ oznacza to, że rodzina $S(x, y)$ jest nigdziegęsta w topologii Ellentucka: z mocy lematu 6.9 jest NR-zbiorem.

Jeśli rodzina S jest NR-zbiorem, to suma wszystkich zbiorów postaci $S(x, y)$, gdzie x oraz y przebiegają wszystkie pary rozłącznych skończonych podzbiorów liczb naturalnych, jest z mocy lematu 6.9 także NR-zbiorem: jest sumą przeliczalnej ilości NR-zbiorów. Oznaczamy tę sumę przez S^*. Z definicji NR-zbioru mamy, że w zbiorze $< \emptyset, N >$ jest zawarty zbiór $< y, M >$, który jest rozłączny z S^*. Z określenia zbioru S^* wnioskujemy, że jeżeli $S^* \cap < y, M >= \emptyset$, to dla dowolnego zbioru skończonego x zachodzi $S^* \cap < \emptyset, M \cup x >= \emptyset$: teza twierdzenia wynika z zawierania $S \subseteq S^*$ $\square$