5. Funkcje 1 klasy Baire'a.

Pod koniec XIX i początkiem XX wieku kilku matematyków zajmowało się problemami dotyczącymi klasyfikacji funkcji borelowskich: między innymi R. Baire, E. Borel, H. Lebesgue oraz W. H. Young. Późniejsi autorzy wykorzystywali nazwiska takich matematyków do nadawania nazw różnym pojęciom - przykładowo granica punktowo zbieżnego ciągu złożonego z funkcji ciągłych bywa nazywana *funkcją 1 klasy Baire'a.* W poprzednim wykładzie odnotowaliśmy, że funkcja rzeczywista określona na zbiorze Cantora jest 1 klasy Baire'a wtedy i tylko wtedy, gdy jest klasy 1. Obecnie rozszerzymy tą właściwość na szerszą klasę przestrzeni.

Będziemy mówili, że przestrzeń topologiczna jest *normalna* gdy dowolna funkcja rzeczywista, prosta, ciągła oraz określona na podzbiorze domkniętym ma rozszerzenie do funkcji rzeczywistej ciągłej określonej na całej przestrzeni. Przestrzeń normalną, która jest równocześnie przestrzenią doskonałą będziemy nazywali przestrzenią *doskonale normalną.* Odnotujmy, że dowolna przestrzeń metryzowalna jest doskonale normalna: fakt ten bywa czasami przedstawiany jako twierdzenie H. Tietze.

Lemat 5.1: *Dowolna funkcja rzeczywista prosta klasy 1 określona na przestrzeni doskonale normalnej jest granicą punktowo zbieżnego ciągu funkcji ciągłych.*

Dowód. Ustalamy funkcję rzeczywistą f klasy 1 tak, aby była to funkcja o skończonej ilości wartości, czyli funkcja prosta. Dla każdego punktu x przeciwobraz $f^{-1}(x)$ przedstawiamy w postaci sumy złożonej z przeliczalnej ilości zbiorów domkniętych i tak otrzymane zbiory domknięte ustawiamy w ciąg. Oznaczamy przez D_n sumę wszystkich n-tych wyrazów tak określonych ciągów zbiorów domkniętych. Korzystamy z normalności przestrzeni i dobieramy funkcję ciągłą f_n będącą rozszerzeniem obcięcia funkcji f do sumy $D_0, \cup D_1 \cup \ldots \cup D_n$: funkcje $f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots$ są ciągłe oraz przeciwobrazy pojedynczych punktów są zbiorami domkniętymi oraz są to funkcje proste. Ciąg tych funcji jest punktowo zbieżny do funkcji f : bo dla $x \in D_n$ zachodzi $f_n(x) = f(x)$ $\square$

Następne twierdzenie pochodzi od H. Lebesgue'a. Przytoczony dowód pracuje dla funkcji o wartościach w przestrzeni metrycznej ośrodkowej i jest wzorowany na dowodzie twierdzenia 3.9. Taki sposób dowodzenia pochodzi od S. Banacha oraz jest przedstawiony w książce K. Kuratowskiego *Topology.*

Twierdzenie 5.2 (H. Lebesgue): *Dowolna funkcja rzeczywista klasy 1 określona na przestrzeni doskonale normalnej jest granicą punktowo zbieżnego ciągu funkcji ciągłych.*

Dowód. Ustalamy funkcję rzeczywistą f klasy 1 oraz ciąg funkcji prostych $f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots$ klasy 1 tak, aby funkcja f_0 była stale równa zeru oraz zawsze zachodziła nierówność

$$|f_n(x) - f_{n-1}(x)| < 2^{-n} :$$

zakładamy stosowne ograniczenie funkcji f i dobieramy ciąg $f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots$ tak samo jak w początkowym fragmenie twierdzenia 3.9.

Dla dowolnej liczby naturalnej n różnica $f_n - f_{n-1}$ jest funkcją prostą klasy 1. Korzystamy z lematu 5.1 i dobieramy ciąg $f_{n,0}, f_{n,1}, \ldots, f_{n,k}, \ldots$ funkcji ciągłych punktowo zbieżny do funkcji $f_n - f_{n-1}$, przy czym zakładamy, że dla dowolnego punktu x zachodzi $|f_{n,k}(x)| \leqslant 2^{-n}$. Dalej kładziemy

$$h_{m,n}(x) = f_{1,n}(x) + f_{2,n}(x) + \ldots + f_{m,n}(x)$$

Ciąg funkcji ciągłych $h_{m,0}, h_{m,1}, \ldots, h_{m,k}, \ldots$ jest punktowo zbieżny do funkcji f_m : bo zawsze ciąg liczb $h_{m,k}(x)$ - o ile $k \to +\infty$, z definicji jest zbieżny do liczby

$$(f_1(x) - f_0(x)) + (f_2(x) - f_1(x)) + \ldots + (f_m(x) - f_{m-1}(x)) = f_m(x).$$

Dla dowolnego punktu x zawsze zachodzi

$$|f_{m,n}(x)| = |h_{m,n}(x) - h_{m-1,n}(x)| \leqslant 2^{-m}.$$

Dalej wnioskujemy, że ciąg $h_{0,0}, h_{1,1} \ldots, h_{n,n}, \ldots$ jest ciągiem funkcji punktowo zbieżnym do funkcji f - podobnie jak w dowodzie twierdzenia 3.9 wykorzystujemy następujący fakt o liczbach rzeczywistych: *Jeśli dla dowolnej liczby naturalnej k ciąg liczb $a_{0,k}, a_{1,k}, \ldots, a_{n,k}, \ldots$ jest zbieżny do liczby b_k oraz zawsze zachodzi $|a_{n,k} - a_{n-1,k}| < 2^{-n}$, to granica ciągu $b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots$ - o ile jest liczbą, jest równa granicy ciągu $a_{0,0}, a_{1,1}, \ldots, a_{n,n}, \ldots$* $\square$

Przypuśćmy, że funkcja rzeczywista f jest określona na przestrzeni topologicznej. Dla punktu x należącego do domknięcia dziedziny funkcji f niech $\omega(x)$ oznacza kres dolny średnic zbiorów $f(G)$, gdzie G przebiega zbiory otwarte zawierające punkt x. Funkcję: $x \to \omega(x)$ będziemy nazywali *oscylacją funkcji f*.

Lemat 5.3: (a): *Jeśli $\varepsilon > 0$ jest liczbą rzeczywistą, to zbiór punktów dla których oscylacja funkcji rzeczywistej jest nie mniejsza od ε jest domknięty.*

(b): *Zbiór punktów, w których funkcja rzeczywista jest ciągła jest równy podzbiorowi dziedziny tej funkcji składającemu się z punktów, dla których oscylacja funkcji jest równa zeru.*

Dowód. Ustalamy funkcję rzeczywistą f określoną na przestrzeni topologicznej oraz liczbę rzeczywistą $\varepsilon > 0$. Bierzemy zbiór X złożony z punktów, dla których oscylacja ω funkcji f jest nie mniejsza od ε. Gdy punkt x należy do domknięcia zbioru X, to dowolne otoczenie otwarte G punktu x zawiera punkt z dziedziny funkcji f należący do X : jest otwartym otoczeniem takiego punktu. Stąd średnica obrazu $f(G)$ jest większa od ε. To pociąga $\omega(x) \geqslant \varepsilon$ i wystarcza dla uzasadnienia (a).

Gdy x jest punktem ciągłości funkcji f, to wnętrze przeciwobrazu dowolnego zbioru otwartego zawierającego liczbę $f(x)$ zawiera punkt x. To - wobec definicji oscylacji, pociąga równości $\omega(x) = 0$

Gdy $\omega(x) = 0$, to dla dowolnej liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór otwarty G taki, że $x \in G$ oraz średnica obrazu $f(G)$ jest mniejsza od ε. Skoro liczba $f(x)$ należy do obrazu $f(G)$, to $f(G)$ jest zawarty w kuli otwartej o promieniu ε oraz środku $f(x)$: funkcja f jest ciągła w punkcie x - co wystarcza dla uzasadnienia (b) $\square$

Kolejne twierdzenie jest mocniejszą wersją twierdzenia 4.6; zaś początkowy fragment jego dowodu jest powtórzeniem dowodu twierdzenia 4.6.

Twierdzenie 5.4 (R. Baire): *Zbiór punktów nieciągłości funkcji 1 klasy Baire'a jest sumą przeliczalnej ilości zbiorów domkniętych o pustych wnętrzach.*

Dowód. Ustalamy funkcję rzeczywistą 1 klasy Baire'a i oznaczamy ją przez f. Dla dowolnej liczby naturalnej n bierzemy zbiór

$$E_n = \{x : \omega(x) \geqslant n^{-1}\},$$

który z mocy lematu 5.3 (a) jest domknięty. Zbiór punktów nieciągłości funkcji f jest równy sumie $E_0 \cup E_1 \cup \ldots \cup E_n \cup \ldots$: na podstawie lematu 5.3 (b) jest zbiorem typu F_σ. Pozostało wykazać, że dowolny zbiór E_n jest sumą przeliczalnej ilości zbiorów domkniętych o pustych wnętrzach.

Ustalamy liczbę naturalną n oraz bierzemy ciąg $f_0, f_1, \ldots$ funkcji ciągłych punktowo zbieżny do funkcji f. Dla dowolnej liczby naturalnej k kładziemy

$$H_k = \{x : |f_m(x) - f_k(x)| \leqslant (4n)^{-1} \quad \text{dla} \quad m > k\}.$$

Skoro funkcje $f_0, f_1, \ldots$ są ciągłe, to zbiory $H_0, H_1, \ldots$ są domknięte. Zbieżność punktowa ciągu $f_0, f_1, \ldots$ pociąga, że suma $H_0 \cup H_1 \cup \ldots$ jest dziedziną funkcji f. Dla zakończenia dowodu wystarczy pokazać, że dla dowolnej liczby naturalnej k wnętrze zbioru H_k jest rozłączne ze zbiorem E_n : bo zakładamy nitrywialność założeń, czyli gęstość sumy wnętrz zbiorów H_k w dziedzinie funkcji f. Przypuśćmy, że punkt x należy do wnętrza zbioru H_k. Korzystamy z ciągłości funkcji f_k i dobieramy otwarte otoczenie G punktu x zawarte w H_k tak, aby średnica obrazu $f_k(G)$ była mniejsza od $(4n)^{-1}$. Dla dowolnych punktów y oraz z zachodzi nierówność

$$|f(y) - f(z)| \leqslant |f(y) - f_k(y)| + |f_k(y) - f_k(z)| + |f_k(z) - f(z)|.$$

Gdy punkty y oraz z należą do G, to z prawej strony tej nierówności pierwszy i trzeci składnik są niewiększe od $(4n)^{-1}$, bo punkty y oraz z należą do H_k; zaś drugi składnik jest mniejszy od $(4n)^{-1}$ z założenia: suma tych składników jest mniejsza od $3(4n)^{-1}$. To pociąga, że $\omega(x) < n^{-1}$ innymi słowy: x nie należy do E_n. To wystarcza dla zakończenia dowodu $\square$

Podany wyżej dowód twierdzenia 5.4 pochodzi od K. Kuratowskiego. Jego zaletą jest to, że pracuje dla funkcji o wartościach w dowolnej przestrzeni metrycznej: nie korzysta z ośrodkowości. Gdy rozważymy przestrzeń metryczną nieośrodkową, to funkcje klasy 1 oraz funkcje 1 klasy Baire'a - dotyczy to klas funkcji definiowanych podobnie jak w przypadku funkcji rzeczywistych - nie pokrywają się. W książce K. Kuratowskiego *Topology* podany jest inny dowód twierdzenia 5.4, który pracuje dla funkcji o wartościach w przestrzeni z bazą przeliczalną.

Twierdzenie 5.5 (R. Baire): *Jeśli funkcja rzeczywista f klasy 1 jest określona na przestrzeni metrycznej zupełnej, to zbiór punktów ciągłości f jest zbiorem gęstym typu G_δ oraz dla dowolnego podzbioru domkniętego D zawartego w dziedzinie funkcji f obcięcie $f|_D$ ma gęsty w D zbiór punktów ciągłości.*

Dowód. Ustalamy przestrzeń metryczną X zupełną oraz funkcję rzeczywistą f klasy 1 określoną na X. Skoro przestrzeń metryczna jest normalna, to funkcja f jest 1 klasy Baire'a na podstawie twierdzenia 5.2. Korzystamy z poprzedniego twierdzenia i otrzymujemy, że zbiór punktów ciągłości funkcji f jest typu G_δ oraz jego dopełnienie jest 1 kategorii. Na podstawie twierdzenia Baire'a - tj. faktu mówiącego, że *w przestrzeni metryzowalnej w sposób zupełny przekrój przeliczalnej ilości zbiorów otwartych i gęstych jest zbiorem gęstym* - wnioskujemy, iż zbiór punktów ciągłości funkcji f jest zbiorem gęstym typu G_δ. Drugą część tezy otrzymujemy podobnie jak pierwszą z tym, że korzystamy z faktu: *domknięty podzbiór przestrzeni metrycznej zupełnej jest metryzowalny w sposób zupełny,* który stosujemy do zbioru domkniętego D $\square$

Fakt użyty dla uzasadnienia drugiej części powyższego dowodu znany jest jako twierdzenie P. S. Aleksandrowa. W rzeczywistości P. S. Aleksandrow pokazał, że dowolny podzbiór typu G_δ zawarty w przestrzeni metrycznej zupełnej można wyposażyć w metrykę równoważną, w której jest przestrzenią metryczną zupełną.

Lemat 5.6: *Jeśli x jest punktem ciągłości funkcji f oraz x należy do domknięcia przeciwobrazu $f^{-1}(Y)$, to liczba $f(x)$ należy do domknięcia zbioru Y.*

Dowód. Przypuśćmy - dla dowodu niewprost, że punkt $f(x)$ nie należy do domknięcia zbioru Y. Wtedy istnieje zbiór otwarty G rozłączny z Y taki, że $f(x) \in G$. Z ciągłości funkcji f w punkcie x wynika istnienie zbioru otwartego V zawartego w dziedzinie funkcji f takiego, że $f(V) \subseteq G$: obraz $f(V)$ jest rozłączny ze zbiorem Y. To pociąga rozłączność zbioru V z przeciwobrazen $f^{-1}(Y)$. Skoro punkt x należy do zbioru otwartego V rozłącznego z przeciwobrazu $f^{-1}(Y)$, to punkt x nie należy do domknięcia tego przeciwobrazu: mamy sprzeczność z założeniami $\square$

Twierdzenie 5.7 (R. Baire): *Jeśli funkcja rzeczywista określona na przestrzeni topologicznej przy obcięciu do dowolnego podzbioru domkniętego ma punkt ciągłości, to jest funkcją klasy 1.*

Dowód. Ustalamy funkcję rzeczywistą f o własnościach jak w założeniach oraz domknięty podzbiór liczb rzeczywistych F. Wystarczy pokazać, że przeciwobraz $f^{-1}(F)$ jest zbiorem typu G_δ. Przedstawiamy dopełnienie zbioru F w postaci sumy $F_0 \cup F_1 \cup \ldots \cup F_n \cup \ldots$ tak, aby zbiory F_n były domknięte. Wtedy dopełnienie przeciwobrazu $f^{-1}(F)$ jest sumą złożoną z domknięć przeciwobrazów $f^{-1}(F_n)$: jest zbiorem typu F_σ. Aby się o tym przekonać wystarczy pokazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n domknięcia przeciwobrazów $f^{-1}(F)$ oraz $f^{-1}(F_n)$ są rozłączne. Oznaczamy przez X przekrój tych domknięć i przypuśćmy - dla dowodu niewprost, że punkt x jest punktem ciągłości obcięcia $f|_X$. Na podstawie poprzedniego lematu liczba $f(x)$ należy do zbioru F oraz do zbioru F_n: co jest niemożliwe. Skoro dopełnienie zbioru $f^{-1}(F)$ jest sumą domknięć zbiorów $f^{-1}(F_0), f^{-1}(F_1), \ldots$, to jest typu G_δ $\square$