

4. Zbiory borelowskie.

Zbiór wszystkich podzbiorów liczb naturalnych będziemy oznaczali przez 2^ω . Najmniejszą topologię na zbiorze 2^ω , w której zbiory

$$\{A \in 2^\omega : x \subseteq A \subseteq \omega \setminus y\},$$

gdzie x oraz y są zbiorami skończonymi, są otwarte będziemy nazywali *topologią produktową*. Przestrzeń 2^ω z topologią produktową będziemy nazywali *zbiorem Cantora*. Zbiór Cantora jest przestrzenią zwartą homeomorficzną z podzbiorem liczb rzeczywistych postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x_n}{3^{n+1}},$$

gdzie $x_0, x_1, \dots$ to ciąg zer i jedynek. Zbiory $\{A \in 2^\omega : x \subseteq A \subseteq \omega \setminus y\}$, gdzie x oraz y są zbiorami skończonymi, są domknięto-otwarte oraz tworzą bazę topologii produktowej innymi słowy: zbiory typu Δ_0 tworzą bazę topologii produktowej.

Dla zbioru Cantora prawdziwe są wersje lematu 3.6 oraz lematu 3.8 przy założeniu $\alpha = \emptyset$:

- *dowolny zbiór otwarty jest sumą przeliczalnej ilości rozłącznych zbiorów domknięto-otwartych,*
- *dla dowolnych dwu rozłącznych zbiorów domkniętych istnieje zbiór domknięto-otwarty zawierający jeden z nich oraz rozłączny z drugim,*
- *dowolna ciągła funkcja rzeczywista jest granicą jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji prostych oraz ciągłych.*

Prawdziwe są także wersje lematu 3.7 oraz twierdzenia 3.9 przy założeniu $\alpha = 1$: *dowolna funkcja klasy 1 jest granicą punktowo zbieżnego ciągu funkcji prostych oraz ciągłych.* Dowody powyższych twierdzeń przebiegają tak samo jak odpowiadających im lematów i twierdzeń z wykładu 3: korzystają z faktu, iż dowolny podzbiór otwarty zbioru Cantora jest sumą przeliczalnej ilości zbiorów domknięto-otwartych.

Lemat 4.1: *Niech α będzie niegraniczną liczbą porządkową, która jest przeliczalna. Jeśli f oraz g są funkcjami rzeczywistymi klasy α określonymi na zbiorze Cantora oraz h jest funkcją rzeczywistą ciągłą określoną na zbiorze liczb rzeczywistych, to funkcje $f+g$, $f-g$, fg , $|f|$, $h(f)$, $\max(f, g)$ oraz $\min(f, g)$ są funkcjami klasy α .*

Dowód. Jest tak dla $\alpha = 0$, bo wtedy f oraz g są funkcjami ciągłymi: teza jest konsekwencją właściwości funkcji ciągłych. Jeśli założymy, że f oraz g są

funkcjami rzeczywistymi klasy $\alpha = \beta + 1$, to korzystamy z twierdzenia 3.9 i dobieramy ciągi funkcji prostych $f_0, f_1, \dots$ oraz $g_0, g_1, \dots$ klasy β lub klas $\gamma \in \beta$, gdy β jest liczbą graniczną, zbieżne - kolejno, do funkcji f oraz g . Wtedy

$$f(x) + g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x) + g_n(x)),$$

$$f(x) - g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x) - g_n(x)),$$

$$f(x)g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)g_n(x),$$

$$h(g(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(g_n(x)).$$

Z prawych stron powyższych równości mamy granice funkcji klasy β lub klas $\gamma \in \beta$. Korzystamy z twierdzenia 3.4 i wnioskujemy, że funkcje z lewych stron powyższych równości są klasy $\beta + 1$. Gdy położymy $h(x) = |x|$ - to wnioskujemy, że funkcja: $x \rightarrow |f(x)|$ jest funkcją klasy $\beta + 1$. Zawsze zachodzą równości

$$\max\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x) + g(x)}{2} + \frac{|f(x) - g(x)|}{2}$$

oraz

$$\min\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x) + g(x)}{2} - \frac{|f(x) - g(x)|}{2},$$

które implikują, że funkcje $\max(f, g)$ oraz $\min(f, g)$ są klasy $\beta + 1$. To wystarcza dla zakończenia dowodu $\square$

Lemat 4.2: *Niech α będzie niegraniczną liczbą porządkową, która jest przeliczalna. Jeśli funkcje borelowskie $f_0(x), f_1(x), \dots$ są klasy α , to funkcje określone przez granice*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \text{oraz} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

są funkcjami klasy $\alpha + 2$.

Dowód. Zawsze zachodzą równości

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \max\{f_n(x), f_{n+1}(x), \dots, f_{n+k}(x)\}$$

oraz

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \min\{f_n(x), f_{n+1}(x), \dots, f_{n+k}(x)\}.$$

Skoro funkcje

$$\max(f_n, f_{n+1}, \dots, f_{n+k}) \quad \text{oraz} \quad \min(f_n, f_{n+1}, \dots, f_{n+k})$$

są klasy α - na podstawie poprzedniego lematu, to na podstawie twierdzenie 3.4 - stosowanego dwukrotnie, granice z prawej strony dają funkcje klasy $\alpha + 2$ $\square$

Twierdzenie 4.3 (H. Lebesgue): *Dla dowolnej przeliczalnej liczby porządkowej α istnieje funkcja borelowska $F_\alpha(x, y)$ określona na produkcie zbiorów Cantora $2^\omega \times 2^\omega$ taka, że jeśli f jest funkcją rzeczywistą klasy α określoną na zbiorze Cantora, to można ustalić punkt $y \in 2^\omega$ tak, aby zawsze zachodziła równość $f(x) = F_\alpha(x, y)$.*

Dowód. Przedstawiamy zbiór wszystkich liczb naturalnych w postaci sumy zbiorów $A_0, A_1, \dots$ nieskończonych oraz rozłącznych. Dla dowolnej liczby naturalnej n oraz dowolnego punktu $x \in 2^\omega$ kładziemy $g_n(x) = x|_{A_n}$. Określona tym sposobem funkcja g_n jest ciągła, a więc funkcja: $(x, y) \rightarrow (x, g_n(y))$ jest także ciągła.

Założmy, że dla $\beta \in \alpha$ funkcje borelowskie $F_\beta(x, y)$ są określone. Wybieramy niemalejący ciąg $\beta_0, \beta_1, \dots$ liczb porządkowych tak, aby α było najmniejszą liczbą porządkową większą od wszystkich liczb porządkowych β_n . Przyjmujemy, że funkcja F_{β_n} jest określona na zbiorze $2^\omega \times 2^{A_n}$: jest to możliwe gdyż przestrzenie 2^{A_n} oraz 2^ω z topologią produktową są homeomorficzne. Następnie kładziemy

$$F_\alpha(x, y) = \limsup_{n \rightarrow \infty} F_{\beta_n}(x, g_n(y)).$$

Dowolna funkcja $F_{\beta_n}(x, g_n(y))$ jest funkcją borelowską jako złożenie funkcji ciągłej i funkcji borelowskiej. Czyli F_α jest funkcją borelowską na podstawie poprzedniego lematu.

Bierzemy dowolną funkcję rzeczywistą f klasy $\alpha > 0$ określoną na zbiorze Cantora. Korzystamy z twierdzenia 3.9 i dobieramy ciąg $f_0, f_1, \dots$ funkcji prostych tak, aby dla dowolnej liczby naturalnej n funkcja f_n była klasy $\beta_n \in \alpha$ oraz dla dowolnego punktu x zachodziła równość

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

Dla dowolnej liczby naturalnej n można dobrać punkt y_n tak, aby

$$f_n(x) = F_{\beta_n}(x, y_n).$$

Niech $y \in 2^\omega$ będzie punktem takim, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość $g_n(y) = y_n$: zbiory $A_0, A_1, \dots$ są rozłączne, a więc taki dobór jest możliwy. Mamy

$$\begin{aligned} F_\alpha(x, y) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} F_{\beta_n}(x, g_n(y)) = \limsup_{n \rightarrow \infty} F_{\beta_n}(x, y_n) = \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x). \end{aligned}$$

Powyższe wystarcza dla dowodu indukcyjnego - o ile określimy pierwszy krok w indukcji innymi słowy: określimy funkcję $F_0(x, y)$. Aby to zrobić ustawiamy w

ciąg wszystkie funkcje proste klasy 0 określone na zbiorze Cantora i przyjmujące wartości wymierne. Przez $P_0(x), P_1(x), \dots$ oznaczamy wyrazy tego ciągu. Następnie wybieramy ciąg różnych punktów $y_0, y_1, \dots$ należących do 2^ω . Oznaczamy przez $E_n(x, y)$ funkcję charakterystyczną zbioru $2^\omega \times \{y_n\}$ oraz kładziemy

$$F_{-1}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) E_n(x, y).$$

Skoro $E_n(x, y)$ jest funkcją charakterystyczną zbioru domkniętego, to jest funkcją klasy 1. Czyli funkcja F_{-1} jest granicą punktowo zbieżnego ciągu funkcji klasy 1. Na podstawie twierdzenia 3.4 jest funkcją klasy 2. Funkcję $F_0(x, y)$ określamy jak wyżej funkcję $F_\alpha(x, y)$, przyjmując $-1 = \beta_n$ □

Twierdzenie 4.4 (H. Lebesgue): *Dla dowolnej przeliczalnej liczby porządkowej α istnieje funkcja borelowska określona na zbiorze Cantora, która nie jest funkcją klasy α .*

Dowód. Korzystamy z poprzedniego twierdzenia i zakładamy - dla dowodu niewprost, że istnieje funkcja dwu zmiennych F taka, że dla dowolnej funkcji borelowskiej f można ustalić punkt t tak, aby dla dowolnego punktu $x \in 2^\omega$ zachodziła równość $f(x) = F(x, t)$. Rozważmy funkcję

$$h(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nF(x, t)}{1 + nF(x, t)}.$$

Jest to funkcja borelowska przyjmująca wartości 0 lub 1. Każdą funkcję borelowską przyjmującą wartości 0 lub 1 można przedstawić w postaci $h(x, t)$: zgodnie z założeniami wystarczy odpowiednio ustalić parametr t . Między innymi funkcja: $x \rightarrow 1 - h(x, x)$ jest równa funkcji: $x \rightarrow h(x, t)$, dla jakiegoś ustalonego parametru t . Gdy $x = t$, to otrzymujemy

$$h(t, t) = 2^{-1} :$$

sprzeczność □

Twierdzenie 4.5: *Zbiór punktów ciągłości funkcji o wartościach w przestrzeni metrycznej jest zbiorem typu G_δ : zbiór punktów nieciągłości funkcji o wartościach w przestrzeni metrycznej jest zbiorem typu F_σ .*

Dowód. Ustalamy: przestrzeń topologiczną X , przestrzeń metryczną Y oraz funkcję $f : X \rightarrow Y$. Dla liczby rzeczywistej $\epsilon > 0$ niech $G(\epsilon)$ oznacza sumę wszystkich otwartych podzbiorów przestrzeni X , których obraz przez funkcję f ma średnicę mniejszą niż ϵ . Z definicji zbiorów $G(\epsilon)$ oraz z warunku ciągłości funkcji w punkcie wynika - że przekrój zbiorów otwartych $G(1), G(2^{-1}), \dots, G(n^{-1}), \dots$

jest zbiorem punktów ciągłości funkcji f : jego dopełnienie jest zbiorem punktów nieciągłości tej funkcji $\square$

Jeśli $G_0, G_1, \dots$ jest malejącym ciągiem otwartych podzbiorów liczb rzeczywistych: $G_0 \supseteq G_1 \supseteq \dots$, to przekrój wszystkich zbiorów z tego ciągu jest zbiorem ciągłości funkcji rzeczywistej przyjmującej na tym przekroju wartość zero, na liczbach niewymiernych z różnicy $G_n \setminus G_{n+1}$ wartość n^{-1} ; zaś na liczbach wymiernych z $G_n \setminus G_{n+1}$ wartość $-n^{-1}$. Sprawdzenie prawdziwości poprzedniego zdania - pozostawiamy czytelnikowi.

Twierdzenie 4.6: *Zbiór punktów zbieżności ciągu ciągłych funkcji rzeczywistych jest zbiorem typu G_2 .*

Dowód. Ustalamy ciąg $f_0, f_1, \dots$ złożony z ciągłych funkcji rzeczywistych. Wtedy przekroje

$$B(p, k) = \cap \{ \{x : |f_n(x) - f_m(x)| \leq k^{-1}\} : n > p \text{ oraz } m > p \}$$

są domknięte jako przekroje przeciwobrazów - przez funkcje ciągłe, zbiorów domkniętych. Zaś zbiór wszystkich punktów zbieżności ciągu funkcji $f_0, f_1, \dots$ dokładnie: zbiór wszystkich punktów, dla których ciąg liczb $f_0(x), f_1(x), \dots$ spełnia warunek Cauchy'ego, jest określony wzorem

$$\cap \{ \cup \{ B(p, k) : p \in \omega_0 \} : k \in \omega_0 \}.$$

Ten wzór - z mocy definicji zbiorów typu G_2 , wystarcza dla zakończenia dowodu $\square$

Zbiór wszystkich ciągów, których wyrazami są liczby naturalne będziemy oznaczali przez ω^ω . Ciągi należące do ω^ω będziemy oznaczali $x = (x_0, x_1, \dots)$; zaś najmniejszą topologię, w której zbiory postaci

$$x_n^{-1}(k) = \{x \in \omega^\omega : x = (x_0, x_1, \dots) \text{ oraz } x_n = k\}$$

są otwarte będziemy nazywali *topologią produktową*: zbiory postaci

$$U_{n_0, n_1, \dots, n_k} = \{(x_0, x_1, \dots) \in \omega^\omega : x_0 = n_0, x_1 = n_1, \dots, x_k = n_k\},$$

gdzie $(n_0, n_1, \dots, n_k)$ przebiega wszystkie $(k+1)$ -elementowe ciągi złożone z liczb naturalnych - tworzą bazę zbiorów otwartych dla topologii produktowej na ω^ω .

Lemat 4.7: *Zbiór ω^ω z topologią produktową jest przestrzenią topologiczną homeomorficzną z liczbami niewymiernymi.*

Dowód. Ustawiamy w ciąg $q_0, q_1, \dots$ wszystkie liczby wymierne. Niech $U_0, U_1, \dots$ będzie nieskończonym ciągiem rozłącznych przedziałów otwartych o końcach wymiernych takich, że

(a): suma $U_0 \cup U_1 \cup \dots$ zawiera wszystkie liczby niewymierne,

(b): każdy przedział U_n ma średnicę mniejszą niż 1,

(c): do sumy $U_0 \cup U_1 \cup \dots$ nie należy liczba q_0 .

Przypuśćmy, że określiliśmy rozłączne przedziały $U_{n_0, n_1, \dots, n_k}$, gdzie ciąg skończony $(n_0, n_1, \dots, n_k)$ przebiega wszystkie $(k+1)$ -elementowe ciągi złożone z liczb naturalnych. Dla każdego ciągu $(n_0, n_1, \dots, n_k)$ dobieramy nieskończony ciąg rozłącznych przedziałów otwartych o końcach wymiernych - przedziały ustawiamy w ciąg o wyrazach $U_{n_0, n_1, \dots, n_k, m}$, gdzie $m \in \omega_0$ - tak, aby

(a): suma $\cup \{U_{n_0, n_1, \dots, n_k, m} : m \in \omega_0\}$ zawierała wszystkie liczby niewymierne należące do przedziału $U_{n_0, n_1, \dots, n_k}$

(b): każdy przedział $U_{n_0, n_1, \dots, n_k, m}$ był zawarty w $U_{n_0, n_1, \dots, n_k}$ oraz miał średnicę mniejszą niż k^{-1} ,

(c): do sumy $\cup \{U_{n_0, n_1, \dots, n_k, m} : m \in \omega_0\}$ nie należała liczba q_k .

Odwzorowanie:

$$(n_0, n_1, \dots, n_k, \dots) \rightarrow U_{n_0} \cap U_{n_0, n_1} \cap \dots \cap U_{n_0, n_1, \dots, n_k} \cap \dots$$

jest różnowartościowe oraz przeprowadza zbiory bazowe w topologii produktowej na przedziały otwarte o końcach wymiernych, które tworzą bazę dla liczb niewymiernych. To - sprawdzenie pozostawiamy czytelnikowi - wystarcza dla zakończenia dowodu $\square$

Lemat 4.8: *Dowolny domknięty podzbiór zawarty w przestrzeni ośrodkowej, która jest równocześnie metryczna oraz zupełna, jest obrazem liczb niewymiernych przez funkcję ciągłą.*

Dowód. Jeśli $D \subseteq X$ jest w sobie gęstym domkniętym podzbiorem przestrzeni ośrodkowej, metrycznej i zupełnej X , to dowód przebiega analogicznie jak dowód poprzedniego lematu z tym, że zamiast rozłączności o zbiorach $U_{n_0, n_1, \dots, n_k}$ zakładamy, iż są kulami o średnicy mniejszej niż k^{-1} przecinającymi D .

Gdy $D \subseteq X$ nie jest w sobie gęstym domkniętym podzbiorem przestrzeni ośrodkowej, metrycznej i zupełnej X , to sumę wszystkich zbiorów otwartych mających ze zbiorem D co najwyżej przeliczalny przekrój oznaczamy przez B . Wtedy różnica $D \setminus B$ jest domkniętym zbiorem w sobie gęstym; zaś przekrój $D \cap B$ jest przeliczalny. Odwzorowanie ciągłe z ω^ω na zbiór D określmy tak, aby na

pojedyncze punkty należące do przekroju $D \cap B$ przechodziły kolejno na zbiory

$$\{x \in \omega^\omega : x = (x_0, x_1, \dots) \text{ oraz } x_0 = 2k\},$$

gdzie $k \in \omega_0$; zaś zbiór

$$\{x \in \omega^\omega : x_0 = 2k + 1 \text{ oraz } k \in \omega_0\}$$

- jest to zbiór homeomorficzny z ω^ω , przechodził na różnicę $D \setminus B$ $\square$

Lemat 4.9: *Suma przeliczalnej rodziny obrazów liczb niewymiernych przez funkcje ciągłe jest obrazem liczb niewymiernych przez funkcję ciągłą.*

Dowód. Jeśli $U_0, U_1, \dots$ jest ciągiem obrazów liczb niewymiernych przez funkcje ciągłe, to wobec lematu 4.7 możemy założyć, że dla dowolnej liczby naturalnej n funkcja $f_n : \omega^\omega \rightarrow U_n$ jest ciągła oraz na U_n . Wtedy funkcja: $(n_0, n_1, \dots) \rightarrow f_{n_0}((n_0, n_1, \dots))$ jest ciągła, określona na ω^ω oraz jej obrazem jest suma $U_0 \cup U_1 \cup \dots$ $\square$

Lemat 4.10: *Przekrój przeliczalnej rodziny obrazów liczb niewymiernych przez funkcje ciągłe jest obrazem liczb niewymiernych przez funkcję ciągłą.*

Dowód. Jeśli $U_0, U_1, \dots$ jest ciągiem obrazów liczb niewymiernych przez funkcje ciągłe, to wobec lematu 4.7 możemy założyć, że dla dowolnej liczby naturalnej n funkcja $f_n : \omega^\omega \rightarrow U_n$ jest ciągła oraz na U_n . Wtedy określamy funkcje $F_n : (\omega^\omega)^\omega \rightarrow (U_n)^\omega$ wzorem $F_n(x) = (f_n(x), f_n(x), \dots)$. Dowolna funkcja F_n jest ciągła, a więc zbiór

$$D = \{x \in (\omega^\omega)^\omega : F_0(x) = F_1(x) = \dots\}$$

jest domknięty. Skoro przestrzenie $(\omega^\omega)^\omega$ oraz ω^ω z topologiami produktowymi są homeomorficzne, to na podstawie lematu 4.8 zbiór D jest obrazem ciągłym liczb niewymiernych. Obcięcie funkcji F_n do zbioru D jest ciągłe; zaś przekrój $U_0 \cap U_1 \cap \dots$ jest obrazem zbioru D przez takie obcięcie. Złożenie dwóch wyżej określonych funkcji jest funkcją jakiej potrzeba dla zakończenia dowodu $\square$

Twierdzenie 4.11: *Dowolny podzbiór borelowski w ośrodkowej przestrzeni metrycznej zupełnej jest obrazem liczb niewymiernych przez funkcję ciągłą.*

Dowód. Właściwość bycia obrazem liczb niewymiernych przez funkcję ciągłą jest zamknięta na przeliczalne sumy: lemat 4.9 - jest zamknięta na przeliczalne przekroje: lemat 4.10 - oraz zbiory domknięte w ośrodkowej przestrzeni metrycznej zupełnej mają taką właściwość: lemat 4.8. To wystarczy dla zakończenia dowodu, bo zbiory borelowskie to najmniejsza rodzina zamknięta na przeliczalne

sumy, zamknięta na przeliczalne przekroje oraz zawierająca zbiory domknięte: w przestrzeni doskonałej powyższe warunki są równoważne definicji podanej po lemacie 3.1 $\square$

Czytelnikowi - jako ćwiczenie lub sprawdzenie zrozumienia powyższych rozumowań, proponujemy zmodyfikować dowód twierdzenia 4.11 tak, aby otrzymał dwa kolejne twierdzenia.

Dowolny nieprzeliczalny podzbiór borelowski z ośrodkowej przestrzeni metrycznej zupełnej jest obrazem liczb niewymiernych przez różnowartościową funkcję borelowską $\square$

Dowolny nieprzeliczalny podzbiór borelowski z ośrodkowej przestrzeni metrycznej zupełnej jest obrazem domkniętego podzbioru liczb niewymiernych przez różnowartościową funkcję ciągłą $\square$

Rozważmy ciąg zbiorów $(H_0, H_1, \dots)$ oraz funkcję $\chi : H_0 \cup H_1 \cup \dots \rightarrow 2^\omega$ określoną wzorem $\chi(x) = (x_0, x_1, \dots)$, gdzie

$$x_n = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x \in H_n; \\ 0, & \text{gdy } x \notin H_n. \end{cases}$$

Funkcja χ w literaturze bywa nazywana funkcją Marczewskiego. Jej znaczenie sprowadza się do interpretacji: *Najmniejsze σ -ciało zawierające zbiory $H_0, H_1, \dots$ jest izomorficzne z σ -ciałem zbiorów borelowskich branych relatywnie podzbioru $\chi(H_0 \cup H_1 \cup \dots) \subseteq 2^\omega$.* Czytelnikowi pozostawiamy ustalenie zakresu znaczenia słowa izomorficzne oraz sprawdzenie poprawności powyższej interpretacji. Proponujemy zacząć od równości

$$\chi(H_n) = \{(x_0, x_1, \dots) \in \chi(H_0 \cup H_1 \cup \dots) : x_n = 1\}.$$

Następnie sprawdzić, że topologia generowana przez zbiory $H_0, H_1, \dots$ jest równoważna - jest homeomorficzna po stosownym ilorazowaniu - z topologią dziedziczną z 2^ω przez $\chi(H_0 \cup H_1 \cup \dots)$.