3. Funkcje borelowskie.

Rodzinę F złożoną z podzbiorów zbioru X będziemy nazywali *ciałem zbiorów,* gdy spełnione są dwa następujące warunki.

(1): *Jeśli zbiór Y należy do rodziny F, to jego dopełnienie $X \setminus Y$ także należy do F.*

(2): *Rodzina F jest zamknięta na skończone sumy innymi słowy: jeśli skończona podrodzina S jest zawarta w rodzinie F, to jej suma $\cup S = \cup\{Y : Y \in S\}$ także należy do F.*

Gdy w warunku (2) weźmiemy jako S rodzinę pustą - to wnioskujemy, że zbiór pusty oraz zbiór $X = \cup F$ należą do ciała zbiorów F. Jeśli w (2) dopuścimy podrodziny przeliczalne w miejsce rodzin skończonych S, to ciało zbiorów F będziemy nazywali *σ-ciałem.*

Jeśli f jest funkcją rzeczywistą oraz dla dowolnego zbioru otwartego w sensie *topologii naturalnej* - czyli topologii na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych generowanej przez przedziały otwarte o końcach wymiernych - jego przeciwobraz przez funkcję f należy do rodziny F, to będziemy mówili, że funkcja f jest *F-mierzalna* innymi słowy: funkcja jest F-mierzalna jeśli przeciwobraz dowolnego zbioru domkniętego należy do rodziny dopełnień zbiorów z rodziny F.

Lemat 3.1: *Jeśli F jest rodziną zbiorów zamkniętą na przeliczalne sumy, to granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji rzeczywistych F-mierzalnych jest funkcją F-mierzalną.*

Dowód. Ustalamy ciąg $f_0, f_1, \ldots$ złożony z funkcji F-mierzalnych taki, aby był on jednostajnie zbieżny do funkcji f. Dowolny jego podciąg jest także jednostajnie zbieżny, a więc bez straty ogólności możemy założyć - wybierając stosowny podciąg, że zawsze zachodzi nierówność $n|f(x) - f_n(x)| < 1$. Bierzemy dowolny domknięty - w sensie topologii naturalnej, podzbiór i oznaczamy go przez D. Oznaczamy przez B_n zbiór wszystkich liczb rzeczywistych odległych od D o co najwyżej $\frac{1}{n}$. Skoro zawsze zachodzi $n|f(x) - f_n(x)| < 1$, to liczba $f(x)$ należy do D wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby naturalnej n liczba $f_n(x)$ należy do B_n. Mamy stąd

$$f^{-1}(D) = \cap\{f_n^{-1}(B_n) : n = 0, 1, \ldots\}.$$

Zbiory $B_0, B_1, \ldots$ są domknięte, zaś przekrój z prawej strony powyższej równości jest przekrojem przeliczalnej ilości dopełnień elementów rodziny F, a więc jest dopełnieniem elementu z rodziny F : funkcja f jest F-mierzalna $\square$

Jeśli X jest przestrzenią topologiczną, to elementy najmniejszego $\sigma-$ciała zawierającego wszystkie jej podzbiory otwarte będziemy nazywali *zbiorami borelowskimi.* Będziemy mówili, że zbiór jest *typu* F_σ, gdy jest on sumą przeliczalnej ilości zbiorów domkniętych oraz - jest *typu* G_δ, gdy jest przekrojem przeliczalnej ilości zbiorów otwartych. Przestrzeń topologiczną będziemy nazywali *doskonałą*, gdy dowolny jej podzbiór otwarty jest zbiorem typu F_σ innymi słowy: przestrzeń topologiczna jest doskonala, gdy dowolny jej podzbiór domknięty jest zbiorem typu G_δ.

Przyjmujemy umowę, że zbiory domknięte są to zbiory *typu* G_0; zaś zbiory otwarte to zbiory *typu* F_0. Jeśli α jest przeliczalną liczbą porządkową, to będziemy mówili, że zbiór borelowski jest *typu* F_α, gdy jest sumą przeliczalnej ilości zbiorów typów G_β, gdzie $\beta \in \alpha$; zaś zbiór borelowski jest *typu* G_α, gdy jest dopełnieniem zbioru typu F_α innymi słowy: jest przekrojem przeliczalnej ilości zbiorów typów F_β, gdzie $\beta \in \alpha$. Zgodnie z tą umową zbiory typu F_σ to również zbiory typu F_1; zaś zbiory typu G_1 to również zbiory typu G_δ. Zbiór jednocześnie typu F_α oraz typu G_α będziemy nazywali zbiorem *typu* Δ_α.

Lemat 3.2: *Niech α będzie przeliczalną liczbą porządkową.*

(a): *Przekrój skończonej ilości oraz suma przeliczalnej ilości zbiorów typu F_α są zbiorami typu F_α.*

(b): *Suma skończonej ilości oraz przekrój przeliczalnej ilości zbiorów typu G_α są zbiorami typu G_α.*

(c): *Wszystkie zbiory typu Δ_α tworzą ciało zbiorów.*

(d): *Gdy $\beta \in \alpha$, to dla dowolnej przestrzeni doskonałej podzbiory typu G_β oraz F_β są typu Δ_α .*

Dowód. Warunek (c) - wobec definicji zbiorów typu Δ_α, natychmiastowo wynika z warunków (a) oraz (b). Warunek (a) jest tłumaczeniem warunku (b) przez prawa de Morgana. Zbiory typu G_0 to zbiory domknięte, a więc dla nich warunek (b) jest prawdziwy z mocy aksjomatów zbiorów domkniętych.

Niech $0 \neq \alpha$: najmniejsza liczba porządkowa $\emptyset$ jest różna od α. Przypuśćmy, że zbiory $H_0, H_1, \ldots$ są typu G_α : dla dowolnej liczby naturalnej n mamy $H_n = \cap\{H_n^k : k \in \omega_0\}$ oraz zbiory $H_n^0, H_n^1, \ldots$ są typu F_β, gdzie $\beta \in \alpha$. Zawsze zachodzą równości

$$H_0 \cap H_1 \cap \ldots = \cap\{\cap\{H_n^k : k \in \omega_0\} : n \in \omega_0\} = \cap\{H_n^k : (k, n) \in \omega_0 \times \omega_0\},$$

z których wynika, że przekrój z lewej strony jest zbiorem typu G_α, bo jest przekrojem przeliczalnej ilości zbiorów postaci H_n^k, które są typu F_β, gdzie $\beta \in \alpha$. Wynika stąd, że rodzina zbiorów typu G_α jest zamknięta na przekroje przeliczalne.

Aby pokazać, że rodzina zbiorów G_α jest zamknięta na skończone sumy wystarczy wykazać, że suma dwóch zbiorów typu G_α jest zbiorem typu G_α. To wynika z zawsze prawdziwej równości

$$\cap\{A_k : k \in \omega_0\} \cup \cap\{B_n : n \in \omega_0\} = \cap\{A_k \cup B_n : (k, n) \in \omega_0 \times \omega_0\} :$$

gdy za $A_0, A_1, \ldots$ oraz $B_0, B_1, \ldots$ podstawimy zbiory typu F_β, gdzie $\beta \in \alpha$. Wtedy sumy postaci $A_k \cup B_n$ są także zbiorami typu F_β - z mocy warunku (a) jako założenie w dowodzie indukcyjnym, zaś dla $\alpha = 0$ z mocy aksjomatów zbiorów otwartych. Powyższa równość - użyta w kolejnych krokach dowodu indukcyjnego, wystarcza dla zakończenia dowodu warunku (b).

Przyjmijmy, że liczba porządkowa β należy do liczby porządkowej α. Jeśli H jest zbiorem typu G_β, to jest także zbiorem typu F_α jako suma rodziny $\{H\}$: zawsze zachodzi równość $H = \cup\{H\}$. Podobnie jeśli E jest zbiorem typu F_β, to jest także zbiorem typu G_α jako przekrój rodziny $\{H\}$: zawsze zachodzi równość $H = \cap\{H\}$.

Przestrzeń jest doskonała: dowolny jej podzbiór typu F_0, czyli dowolny jej podzbiór otwarty, jest zbiorem typu $F_1 = F_\sigma$; zaś dowolny jej podzbiór typu G_0, tj. dowolny jej podzbiór domknięty, jest zbiorem typu $G_1 = G_\delta$. Stąd - wobec definicji zbiorów typów G_1 oraz F_1, wynika, że zbiory otwarte oraz zbiory domknięte są zbiorami typu Δ_1.

Wśród liczb porządkowych zawsze $\gamma \in \beta \in \alpha$ pociąga $\gamma \in \alpha$, a więc - z definicji, dowolny zbiór typu F_β - o ile $\emptyset \neq \beta$, jest równocześnie zbiorem typu F_α. Podsumowując powyższe rozumowania wnioskujemy, że dowolny zbiór typu F_β oraz jego dopełnienie, tj. zbiór typu G_β, są zbiorami typu F_α oraz zbiorami typów G_α : są zbiorami typu Δ_α □

Będziemy mówili, że funkcja rzeczywista jest *klasy* α gdy przeciwobraz - przez tą funkcję, dowolnego zbioru otwartego jest zbiorem typu F_α innymi słowy: funkcja rzeczywista jest klasy α, gdy przeciwobraz dowolnego zbioru domkniętego jest zbiorem typu G_α. Odnotujmy, że funkcje klasy 0 to funkcje ciągłe. Funkcje klasy α, o ile α jest przeliczalną liczbą porządkową, będziemy nazywali *funkcjami borelowskimi.*

Twierdzenie 3.3: *Granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji klasy* α *jest funkcją klasy* α.

Dowód. Rodzina zbiorów typu F_α - na podstawie lematu 3.2 (a), jest zamknięta na przeliczalne sumy. To - na podstawie w lematu 3.1, wystarcza dla zakończenia dowodu: funkcje klasy α są mierzalne względem rodziny zbiorów typu F_α $\square$

Twierdzenie 3.4 (F. Hausdorff): *Granica punktowo zbieżnego ciągu funkcji klasy α jest funkcją klasy $\alpha + 1$.*

Dowód. Ustalamy ciąg funkcji $f_0, f_1, \ldots$ klasy α, który jest punktowo zbieżny do funkcji f. Bierzemy dowolny zbiór domknięty, który oznaczamy przez D. Przez B_n oznaczamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych odległych od D o mniej niż $\frac{1}{n}$. Skoro zawsze ciąg liczb $f_0(x), f_1(x), \ldots$ jest zbieżny do liczby $f(x)$, to liczba rzeczywista $f(x)$ należy do D wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej liczby naturalnej n prawie wszystkie liczby $f_n(x), f_{n+1}(x), \ldots$ należą do B_n innymi słowy: zachodzi równość

$$f^{-1}(D) = \cap\{\cup\{f^{-1}_{n+k}(B_n) : k = 0, 1, \ldots\} : n = 0, 1, \ldots\}.$$

Zbiory $B_0, B_1, \ldots$ są otwarte, a więc zbiory postaci $f^{-1}_{n+k}(B_n)$ są zbiorami typu F_α - wynika to z mocy definicji funkcji klasy α. Na podstawie lematu 3.2(a) sumy

$$\cup\{f^{-1}_{n+k}(B_n) : k = 0, 1, \ldots\}$$

są zbiorami typu F_α co pociąga, że zbiór $f^{-1}(D)$ jest typu $G_{\alpha+1}$. To wystarcza dla zakończenia dowodu $\square$

Będziemy mówili, że funkcja rzeczywista jest *funkcją prostą,* gdy zbiór jej wartości jest skończony.

Lemat 3.5: *Funkcja prosta jest klasy α, gdy przeciwobrazy punktów przez tą funkcję są zbiorami typu Δ_α.*

Dowód. Dla funkcji prostej punkty przeciwdziedziny są zbiorami domknięto-otwartymi w przeciwdziedzinie. Jeśli dodatkowo funkcja prosta jest funkcją klasy α, to - z definicji, przeciwobrazy punktów przez taką funkcję są równocześnie zbiorami typu F_α oraz zbiorami typu G_α : są zbiorami typu Δ_α $\square$

Twierdzenia 3.4 nie daje się poprawić tak, aby było prawdziwe dla granicznej liczby porządkowej α innymi słowy: jeśli α jest graniczną liczbą porządkową, to może istnieć ciąg funkcji klas mniejszych niż α punktowo zbieżny do funkcji klasy $\alpha+1$. Przykładowo rozważmy zbiór H, który jest zbiorem typu F_α oraz nie jest zbiorem typu G_α: o istnieniu takiego zbioru, będziemy mówili w następnym rozdziale. Korzystamy z lematu 3.2(d) i przedstawiamy H jako sumę zbiorów $A_0, A_1, \ldots$, które są zbiorami typów Δ_β, gdzie $\beta \in \alpha$: jest to możliwe gdy $\beta \in \alpha$ pociąga $\beta \in \gamma \in \alpha$. Możemy założyć, że $A_0 \subseteq A_1 \subseteq \ldots$ na podstawie lematu

3. 2 (c). Funkcje charakterystyczne zbiorów $A_0, A_1, \ldots$ są punktowo zbieżne do funkcji charakterystycznej zbioru H. Ta ostatnia funkcja na podstawie lematu 3.5 jest klasy $\alpha + 1$ oraz nie jest klasy α. Skoro α jest graniczną liczbą porządkową, to funkcje charakterystyczne zbiorów $A_0, A_1, \ldots$ są klas β, gdyż zbiory $A_0, A_1, \ldots$ są funkcjami klas Δ_β, gdzie $\beta \in \alpha$.

Lemat 3.6 (W. Sierpiński): *Niech $\alpha \neq \emptyset$ będzie przeliczalną liczbą porządkową oraz załóżmy, że rozważania prowadzimy w przestrzeni doskonałej.*

(a): *Dowolny zbiór typu F_α, można przedstawić jako sumę rozłącznych zbiorów typu Δ_α.*

(b): *Dla dowolnych dwu rozłącznych zbiorów typu G_α, istnieje zbiór typu Δ_α zawierający jeden z nich oraz rozłączny z drugim.*

Dowód. Ustalamy dowolny zbiór typu F_α, który oznaczamy przez X. Z definicji - zbiór X jest sumą zbiorów $A_0, A_1, \ldots$, które są zbiorami typu G_β, gdzie $\beta \in \alpha$. Na podstawie lematu 3.2 (d) zbiory $A_0, A_1, \ldots$ są także zbiorami typu Δ_α. Kładziemy $E_0 = A_0$ oraz

$$E_n = A_n \setminus (A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}).$$

Zbiory $E_0, E_1, \ldots$ są typu Δ_α : na podstawie lematu 3.2 (c), są rozłączne i dają w sumie X. To uzasadnia punkt (a).

Ustalamy dwa rozłączne zbiory typu G_α. Ich dopełnienia przedstawiamy w postaci sum $C_0 \cup C_1 \cup \ldots$ oraz $B_0 \cup B_1 \cup \ldots$ tak, aby zbiory występujące w tych sumach były zbiorami typów G_β, gdzie $\beta \in \alpha$. Kładziemy $H_0 = C_0$ oraz $K_0 = B_0 \setminus C_0$ oraz

$$H_n = C_n \setminus (B_0 \cup B_1 \cup \ldots \cup B_{n-1} \cup C_0 \cup C_1 \cup \ldots \cup C_{n-1})$$

oraz

$$K_n = B_n \setminus (C_0 \cup C_1 \cup \ldots \cup C_n \cup B_0 \cup B_1 \cup \ldots \cup B_{n-1}).$$

Zbiory $H_0, H_1, \ldots, K_0, K_1, \ldots$ są rozłączne oraz - na podstawie lematu 3.2 (d), są typu Δ_α. Ich sumy $H_0 \cup H_1 \cup \ldots$ oraz $K_0 \cup K_1 \cup \ldots$ są rozłączne oraz - na podstawie lematu 3.2 (a), są typu F_α. Dają one w sumie całą przestrzeń. Czyli są zbiorami typu Δ_α. Suma $H_0 \cup H_1 \cup \ldots$ zawiera jeden z wcześniej ustalonych zbiorów typu G_α ; zaś suma $K_0 \cup K_1 \cup \ldots$ zawiera drugi. To wystarcza dla zakończenia dowodu punktu (b) $\square$

Lemat 3.7: *Jeśli $\alpha > 1$ jest przeliczalną liczbą porządkową, to dowolna funkcja prosta klasy α określona na przestrzeni doskonałej jest granicą punktowo* *zbieżnego ciągu funkcji prostych klas β, gdzie $\beta \in \alpha$. Gdy $\alpha = \gamma + 1$ oraz γ jest graniczną liczbą porządkową, to wystarcza założenie $\beta \in \gamma$.*

Dowód. Ustalamy funkcję prostą f klasy α określoną na przestrzeni doskonałej. Oznaczamy przez $y_0, y_1, \ldots, y_n$ wszystkie punkty przeciwdziedziny funkcji f. Na podstawie lematu 3.5 przeciwobrazy punktów

$$f^{-1}(y_0), f^{-1}(y_1), \ldots, f^{-1}(y_n)$$

są zbiorami typu Δ_α : są równocześnie zbiorami typu F_α. Gdy $0 \leqslant i \leqslant n$, to przedstawiamy zbiór $f^{-1}(y_i)$ jako sumę rosnących zbiorów

$$H_0^i \subseteq H_1^i \subseteq \ldots,$$

które są zbiorami typów G_β , gdzie $\beta \in \alpha$: mamy $f^{-1}(y_i) = \cup\{H_k^i : k \in \omega_0\}$. Skoro $\alpha > 1$ możemy założyć, że $\beta \neq \emptyset$. Dla dowolnej liczby naturalnej k zbiory $H_k^0, H_k^1, \ldots, H_k^n$ są rozłączne oraz są zbiorami typów G_β. Na podstawie lematów 3.2(c) oraz 3.6 (b) dobieramy rołączne zbiory

$$K_k^0, K_k^1, \ldots K_k^n$$

typów Δ_β takie, że zawsze zachodzi zawieranie $H_k^i \subseteq K_k^i$. Dla dowolnej liczby naturalnej k kładziemy

$$g_k(x) = \begin{cases} y_i, & \text{dla } x \in K_k^i; \\ y_0, & \text{dla pozostałych } x. \end{cases}$$

Każda funkcja g_k jest funkcją prostą klasy β, gdyż przeciwobrazy punktów przez funkcję g_k należą do ciała generowanego przez zbiory $K_k^1, \ldots, K_k^n$: elementy tego ciała są zbiorami typów Δ_β na podstawie lematu 3.2 (c).

Aby uzasadnić zbieżność punktową ciągu funkcji $g_0, g_1, \ldots$ bierzemy dowolny punkt x. Wówczas $f(x) = y_i$ oraz można dobrać liczbę naturalną k tak, aby $x \in H_k^i$. Skoro $x \in H_k^i$ oraz $H_0^i \subseteq H_1^i \subseteq \ldots$, to dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant k$ zachodzi $f(x) = y_i = g_n(x)$: ciąg liczb $g_0(x), g_1(x), \ldots$ jest stały od jakiegoś miejsca, a więc jest zbieżny do $f(x)$.

Gdy $\alpha = \gamma + 1$ oraz γ jest liczbą porządkową graniczną, to zbiory postaci H_k^i są typu G_γ. Każdy z nich jest sumą przeliczalnej ilości zbiorów typów Δ_β, gdzie $\beta \in \gamma$, na podstawie lematu 3.2 (d). Każdy ze zbiorów H_k^i przedstawiamy jako przeliczalną sumę zbiorów typu Δ_β. To wystarcza dla zakończenia dowodu, bo suma przeliczalnej ilości rodzin przeliczalnych jest przeliczalną sumą elementów tych rodzin. Tak więc zamiast zbiów H_s^p bierzemy skończone sumy zbiorów, które sumują zbiory H_s^p oraz są typów Δ_β. Dalej zbiory K_s^p dobieramy podobnie jak wyżrej $\square$

Lemat 3.8: *Dowolna funkcja rzeczywista klasy $\alpha > 0$ określona na przestrzeni doskonałej jest granicą jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji prostych klasy α.*

Dowód. Ustalamy funkcję rzeczywistą f klasy α taką, aby była to funkcja ograniczona: to nie szkodzi ogólności, bo nietrywialny otwarty przedział liczb rzeczywistych jest homeomorficzny ze zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych oraz złożenie homeomorfizmów nie zmienia klasy funkcji borelowskiej. Bierzemy liczbę $\epsilon > 0$ i wybieramy zbiór skończony $\{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$ zawarty w przeciwdziedzinie funkcji f tak, aby dowolny punkt przeciwobrazu funkcji f był odległy od tego zbioru o mniej niżr $\frac{\epsilon}{2}$. Dla dowolnej liczby naturalnej k rozważamy zbiory

$$X_k = \{x : |f(x) - y_k| \leqslant \frac{\epsilon}{2}\} \qquad \text{oraz} \qquad Y_k = \{x : |f(x) - y_k| \geqslant \epsilon\}.$$

Są to rozłączne przeciwobrazy - przez funkcje klasy α, zbiorów domkniętych, a więc zbiory typu G_α. Korzystamy z lematu 3.6 (b) i dobieramy zbiór E_k typu Δ_α zawierający X_k oraz rozłączny z Y_k. Następnie kładziemy $H_0 = E_0$ oraz

$$H_n = E_n \setminus (E_0 \cup E_1 \cup \ldots \cup E_{n-1}).$$

Jeśli punkt x należy do zbioru H_k, to kładziemy $g(x) = y_k$: określiliśmy funkcję g przyjmującą wartości $y_0, y_1, \ldots, y_n$. Jest to funkcja prosta klasy α - na podstawie lematu 3.5, gdyż przeciwobrazy punktów są zbiorami $H_0, H_1, \ldots, H_n$: są zbiorami typu Δ_α. Zawsze zachodzi nierówność $|f(x) - g(x)| < \epsilon$: gdy $g(x) = y_i$, to $x \in H_i$, a więc także $x \in E_i$ oraz równocześnie $x \notin Y_i$. Wobec dowolności doboru liczby ϵ to wystarcza dla zakończnia dowodu $\square$

Twierdzenie 3.9 (S. Banach): *Niech $\alpha > 1$ będzie przeliczalną liczbą porządkową. Wtedy dowolna funkcja rzeczywista klasy α określona na przestrzeni doskonałej jest granicą punktowo zbieżnego ciągu funkcji prostych klasy mniejszej niż α. Dodatkowo, gdy $\alpha = \gamma + 1$ oraz γ jest graniczną liczbą porządkową, to funkcje ciągu punktowo zbieżnego można dobrać tak, aby były klas mniejszych niż γ*

Dowód. Ustalamy ograniczoną funkcję rzeczywistą f klasy α : założenie ograniczoności nie szkodzi ogólności, bo zbiór wszystkich liczb rzeczywistych jest homeomorficzny z dowolnym nietrywialnym przedziałem otwartym oraz zbieżność punktowa ma charakter topologiczny. Korzystamy z lematu 3.8 i wybieramy ciąg $f_0, f_1, \ldots$ funkcji prostych klasy α tak, aby dla dowolnego punktu x zachodziła nierówność

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{2^{n+1}},$$

z której wynika, że zawsze zachodzi nierówność

$$|f_n(x) - f_{n+1}(x)| < \frac{1}{2^n}.$$

Skoro $\alpha > 1$ - to korzystamy z lematu 3.7 i dla dowolnej liczby naturalnej n dobieramy ciąg funkcji prostych $f_{n,0}, f_{n,1}, \ldots$ klas β punktowo zbieżny do funkcji f_n, gdzie $\beta \in \alpha$. Określamy ciągi funkcji prostych $h_{m,0}, h_{m,1}, \ldots$ klas β, gdzie $\beta \in \alpha$, następująco. Dla liczby naturalnej $m = 0$ kładziemy

$$f_{0,k}(x) = h_{0,k}(x).$$

Jeśli założymy, że określiliśmy liczbę $h_{m,k}(x)$, to kładziemy

$$h_{m+1,k}(x) = \begin{cases} f_{m+1,k}(x), & \text{gdy } |f_{m+1,k}(x) - h_{m,k}(x)| < \dfrac{1}{2^m}; \\ h_{m,k}(x), & \text{dla pozostałych } x. \end{cases} .$$

Przeciwobrazy punktów przez funkcję $h_{m+1,n}$ należą do ciała generowanego przez przeciwobrazy punktów przez funkcje $h_{m,n}$ oraz $f_{m+1,n} - h_{m,n}$. Jeśli założymy, że funkcje $f_{m+1,n}$ oraz $h_{m,n}$ są funkcjami prostymi klasy β, wtedy to ciało składa się ze zbiorów typów Δ_β : różnica dwu funkcji prostych klasy β jest funkcją prostą tej samej klasy. To wystarcza dla dowodu indukcyjnego, że wszystkie funkcje $h_{p,s}$ są klas β, gdzie $\beta \in \alpha$.

Dla dowolnego punktu x rozważmy nierówność

$$|h_{m+1,n}(x) - f_{m+1}(x)| \leqslant |h_{m+1,n}(x) - f_{m+1,n}(x)| + |f_{m+1,n}(x) - f_{m+1}(x)|.$$

Jeśli założymy, że ciąg liczb $h_{m,0}(x), h_{m,1}(x), \ldots$ jest zbieżny do liczby $f_m(x)$, to istnieje liczba naturalna k taka, że dla dowolnej liczby naturalnej $n > k$ zachodzi nierówność

$$|h_{m,n}(x) - f_{m+1,n}(x)| < \frac{1}{2^m}, \quad \text{bo} \quad |f_m(x) - f_{m+1}(x)| < \frac{1}{2^m} :$$

zgodnie z defincją zachodzi

$$h_{m+1,n}(x) = f_{m+1,n}(x).$$

Co pociąga zbieżność ciągu liczb $h_{m+1,0}(x), h_{m+1,1}(x), \ldots$ do liczby $f_{m+1}(x)$ innymi słowy: dla dowolnej liczby naturalnej m ciąg funkcji $h_{m,0}, h_{m,1}, \ldots$ jest punktowo zbieżny do funkcji f_m.

Pokażemy, że dla dowolnego punktu x zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} h_{n,n}(x) = f(x).$$

Ustalamy punkt x oraz liczbę rzeczywistą $\epsilon > 0$. Dobieramy liczbę naturalną m tak , aby

$$\frac{1}{2^m} < \frac{\epsilon}{6} \quad \text{oraz} \quad |f_m(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Następnie wybieramy liczbę naturalną $n > m$ tak, aby

$$|h_{m,n}(x) - f_m(x)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Skoro $0 < m < n$, to liczba $|h_{n,n}(x) - f(x)|$ jest niewiększa od sumy

$$|h_{n,n}(x)-h_{n-1,n}(x)|+\ldots+|h_{m+1,n}(x)-h_{m,n}(x)|+|h_{m,n}(x)-f_m(x)|+|f_m(x)-f(x)|.$$

Dwa ostatnie składniki tej sumy są mniejsze od $\frac{\epsilon}{3}$ każdy. Suma pozostałych składników jest mniejsza od

$$\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-2}} + \ldots + \frac{1}{2^m} < \frac{1}{2^{m-1}} < \frac{\epsilon}{3} :$$

dla dowolnej liczby naturalnej k zachodzi - z definicji, nierówność

$$|h_{k,n}(x) - h_{k+1,n}(x)| < \frac{1}{2^k}.$$

Cała suma jest mniejsza od ϵ. To wystarcza dla zakończenia dowodu zbieżności punktowej ciągu $h_{0,0}, h_{1,1}, \ldots$ do funkcji f.

Gdy $\alpha = \gamma + 1$ oraz γ jest graniczną liczbą porządkową, to na podstawie lematu 3.7 możemy przyjąć, że wszystkie funkcje $h_{p,s}$ są klas β, gdzie $\beta \in \gamma$ □

Nie potrafimy udowodnić wersji twierdzenia 3.9 dla liczby porządkowej $\alpha = 1$. Dla tego brakuje faktu, że dowolna funkcja prosta klasy 1 jest granicą ciągu - punktowo zbieżnego, funkcji ciągłych: w dalszych wykładach pokażemy, że fakt taki zachodzi przy dodatkowym założeniu normalności przestrzeni.

Twierdzenie 3.9 pozostanie prawdziwe gdy zamiast funkcji rzeczywistych rozważymy funkcje idące w przestrzeń metryczną ośrodkową. Wiadomo, że dowolną przestrzeń metryczną ośrodkową można zanurzyć w kostkę Hilberta, która jest przestrzenią metryczną zwartą. Dowód lematu 3.8 pracuje dla funkcji idących w kostkę Hilberta. Podobnie jest z dowodami lematu 3.7 oraz twierdzenia 3.9. Z książki K. Kuratowskiego *Topology* tom I można wnosić, że twierdzenie 3.9 jest autorstwa F. Hausdorffa lub H. Lebesgue'a zaś jego wersja dla przestrzeni metrycznej ośrodkowej S. Banacha. Dowody podane przez F. Hausdorffa oraz H. Lebesgue'a w sposób istotny wykorzystują uporządkowanie zbioru liczb rzeczywistych. S. Banach ogłosił w 17 tomie Fundamenta Mathematicae dowód, który z niewielkimi zmianami przypomina dowód z książki K. Kuratowskiego *Topology* tom I oraz nasz dowód. Te dowody nie korzystają z uporządkowania zbioru liczb rzeczywistych. Istotne jest aby przeciwdziedzina spełniała twierdzenie o ϵ-sieci: warunek mówiący, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $\epsilon > 0$ istnieje podzbiór skończony taki, że dowolny punkt przestrzeni jest odległy od niego o mniej niż ϵ.