2. Przyblianie funkcjami elementarnymi.

Bdziemy mwili, e funkcja rzeczywista f okrelona na zbiorze X daje si *przyblia* funkcjami rodziny G, gdy istnieje cig funkcji nalecych do G zbieny jednostajnie do f innymi sowy: dla kadej liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0$ mona dobra funkcj $h \in G$ tak, aby dla dowolnego punktu $x \in X$ zachodzia nierwno $|h(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Lemat 2.1: *Jeli dowolna funkcja rzeczywista naleca do rodziny H daje si przyblia funkcjami z rodziny G, to funkcja dajca si przyblia funkcjami z rodziny H, daje si przyblia funkcjami z rodziny G.*

Dowd. Bierzemy funkcj f dajc si przyblia funkcjami rodziny H. Ustalamy $\varepsilon > 0$. Nastpnie dobieramy funkcje $h \in H$ oraz $g \in G$ takie, e dla dowolnego punktu x zachodz nierwnoci $2|h(x)-f(x)| < \varepsilon$ oraz $2|g(x)-h(x)| < \varepsilon$. Dodajemy te nierwnoci stronami, upraszczamy - wykorzystujc nierwno trjkta i otrzymujemy $|g(x) - f(x)| < \varepsilon$ □

Lemat 2.2: *Dla dowolnego ograniczonego przedziau liczb rzeczywistych istnieje cig wielomianw zbieny jednostajnie do funkcji: $x \to |x|$ okrelonej na tym przedziale.*

Dowd. Jeli cig wielomianw $w_0(x), w_1(x), \ldots$ jest zbieny jednostajnie do funkcji: $x \to |x|$ na przedziale $[-1, 1]$, to dla dowolnej liczby rzeczywistej $a > 0$ cig wielomianw $aw_0(xa^{-1}), aw_1(xa^{-1}), \ldots$ jest zbieny jednostajnie do funkcji $x \to |x|$ okrelonej na przedziale $[-a, a]$. Wobec powyszego dalsze rozwaania ograniczymy do przedziau $[-1, 1]$.

Okrelamy cig wielomianw $p_0(x), p_1(x), \ldots$ nastpujco. Niech $p_0(x)$ bdzie wielomianem stale rwnym zeru oraz

$$2p_{n+1}(x) = 2p_n(x) + (x^2 - p_n^2(x)).$$

Jeli zaoymy, e $0p_n(x)|x|$, to z okrelenia wielomianu $p_{n+1}(x)$ mamy $0p_{n+1}(x)$. Nierwno $p_{n+1}(x)|x|$ wynika z nastpujcych rwnoci

$$|x| - p_{n+1}(x) = |x| - p_n(x) - \frac{1}{2}(x^2 - p_n^2(x)) = (|x| - p_n(x))(1 - \frac{1}{2}(|x| + p_n(x)),$$

gdzie dwa ostatnie czynniki s nieujemne: pierwszy bo $p_n(x)|x|$; za drugi bo $p_n(x)|x|1$. Pokazalimy idukcyjnie, e dla dowolnej liczby naturalnej n oraz dowolnej liczby rzeczywistej $x \in [-1, 1]$ zachodzi nierwno $0p_n(x)|x|$.

Dla dowolnej liczby rzeczywistej $x \in [-1, 1]$ cig liczb $p_0(x), p_1(x), \ldots$ jest rosncy i ograniczony z gry przez liczb $|x|$. Granica tego cigu jest nieujemna oraz spenia rwnanie $2g = 2g + (x^2 - g^2)$, a wic $g = |x|$. To oznacza, e cig wielomianw $p_0(x), p_1(x), \ldots$ jest punktowo zbieny do funkcji: $x \to |x|$ okrelonej na przedziale $[-1, 1]$. Aby si przekona, e zbieno ta jest jednostajna ustalmy $\varepsilon > 0$ oraz rozwamy zbiory

$$F_n = \{x \in [-1, 1] : |x| - p_n(x)\varepsilon\}.$$

Zbiory $F_0, F_1, \ldots$ s domknite, a wic zwarte: s przeciwobrazami pprostej domknitej $[\varepsilon, \infty)$ przez funkcj cig. Tworz one cig malejcy o pustym przekroju, gdy dla dowolnej liczby $x \in [-1, 1]$ cig liczb $p_0(x), p_1(x), \ldots$ jest rosncy i zbieny do liczby $|x|$. Na podstawie twierdzenia Cantora mwicego: *cig zstpujcy zbiorw zwartych i niepustych ma niepusty przekrj* pewien zbir F_n jest pusty. To wystarcza dla zakoczenia dowodu □

Lemat 2.3: *Jeli liczby rzeczywiste $x_0, x_1, \ldots, x_n$ s rne oraz ustawione rosnco, to amana czca kolejno punkty paszczyzny $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ jest wykresem funkcji*

$$f(x) = b + \sum_{i=0}^{n-1} a_i |x - x_i|,$$

okrelonej dla $x \in [x_0, x_n]$.

Dowd. Dobr parametru b nie podlega ograniczeniom, a wic funkcja f jest okrelona z dokadnoci do tego parametru. Z tego powodu wystarczy by pochodne funkcji f oraz funkcji, ktrej wykresem jest amana czca kolejno punkty $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ byy rwne poza punktami $x_0, x_1, \ldots, x_n$. To zachodzi, gdy ukad rwna

$$z_k = \sum_{i=0}^{k} a_i - \sum_{i=k+1}^{n-1} a_i$$

posiada rozwizanie dla dowolnie ustalonych liczb $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$, jeli szukanymi liczbami s $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$. Ukad ten ma rozwizanie, gdy jego wyznacznik podstawowy jest niezerowy: dodajemy pierwsz kolumn do pozostaych i otrzymujemy na przektnej jedynk i dwjki, za nad przektn zera □

Twierdzenie 2.4 (K. Weierstrass): *Dowolna funkcja rzeczywista ciga okrelona na przedziale zwartym daje si przyblia wielomianami.*

Dowd. Bierzemy funkcj rzeczywist h cig okrelon na przedziale $[c, d]$. Ustalamy liczb $\varepsilon > 0$. Funkcja h jest ciga jednostajnie, a wic dobieramy liczb $\delta > 0$ tak, aby dla liczb x oraz y nalecych do $[c, d]$ nierwno

$$|x - y| < \delta \qquad \text{pocigaa} \qquad 2|h(x) - h(y)| < \varepsilon.$$

Dobieramy liczby $x_0, x_1, \ldots, x_n$ tak, aby rnice midzy kolejnymi liczbami byy mniejsze od δ oraz $c = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = d$. Łaman czc kolejno punkty $(x_0, h(x_0)), (x_1, h(x_1)), \ldots, (x_n, h(x_n))$ przedstawiamy - na podstawie lematu 2.3, w postaci funkcji

$$f(x) = b + \sum_{i=0}^{n-1} a_i |x - x_i|,$$

gdzie $x \in [x_0, x_n]$. Korzystamy z lematu 2.2 - i dobieramy wielomiany $w_i(x)$ tak, aby dla $x \in [c, d]$ zachodzia rwno $2n|w_i(x) - a_i|x - x_i|| < \varepsilon$. Kadziemy

$$w(x) = b + w_0(x) + \ldots + w_{n-1}(x)$$

i sprawdzamy, e dla dowolnej liczby $x \in [c,d]$ zachodzi $2|f(x) - h(x)| < \varepsilon$ oraz

$$|f(x) - w(x)| = |\sum_{i=0}^{n-1}(a_i|x - x_i| - w_i(x)|) \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|x - x_i| - w_i(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dodajemy powysze nierwnoci stronami - upraszczamy i wyniku tych operacji otrzymujemy $|w(x) - h(x)| < \varepsilon$, co wobec dowolnoci doboru $\varepsilon > 0$ wystarcza dla zakoczenia dowodu □

W powyszym twierdzeniu zwarto przedziau, na ktrym okrelona jest funkcja dajca si przyblia wielomianami jest istotna. Funkcja nieograniczona okrelona na przedziale ograniczonym nie moe by granic jednostajn wielomianw, bo wielomiany s ograniczone na zbiorze ograniczonym: przykadem jest cotangens okrelony na przedziale $(0, \pi)$.

Dowolny wielomian okrelony na zbiorze zwartym mona przyblia wielomianami o wspczynnikach wymiernych: wynika to z cigoci wielomianu gdy jego wspczynniki potraktujemy jak zmienne. Skoro wielomianw o wspczynnikach wymiernych jest przeliczalnie wiele, to w twierdzeniu 2.4 o rodzinie wielomianw, ktrymi mona przyblia funkcje cige wystarcza zakada, i jest przeliczalna. Dla funkcji cigych okrelonych na zbiorze niezwartym, podobna sytuacja jest niemoliwa. Przyczyny tego ilustruje nastpujca rodzina funkcji poindeksowana podzbiorami liczb naturalnych

$$f_Y(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } n \in Y \text{ oraz } xn = 1; \\ 0, & \text{gdy } n \in \omega \setminus Y \text{ oraz } xn = 1; \\ \text{dowolnie,} & \text{tak aby otrzyma cigo.} \end{cases}$$

Jeli X oraz Y s rnymi podzbiorami liczb naturalnych - czyli mona wybra liczb naturaln $n \in (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$, to $|f_Y(n) - f_X(n)| = 1$. Wynika z tego, e wszystkie funkcje z powyej okrelonej rodziny nie mog by przybliane przez przeliczaln rodzin funkcji.

Niech H bdzie rodzin funkcji rzeczywistych cigych okrelonych na zbiorze zwartym. Zamy, e do H nale funkcje stae o wartociach wymiernych. Jeli dla funkcji f oraz g nale do H suma: $x \to f(x) + g(x)$ oraz iloczyn: $x \to f(x)g(x)$ take nale do H, to rodzin H bdziemy nazywali *piercieniem.*

Lemat 2.5: *Rodzina H^* wszystkich funkcji dajcych si przyblia funkcjami piercienia H jest piercieniem zawierajcym funkcje stae oraz wielomiany, w ktrych za zmienne podstawione s funkcje z H^* .*

Dowd. Funkcje stae o wartociach wymiernych nale do H. Dowolna liczba rzeczywista jest granic cigu liczb wymiernych. Std dowolna funkcja rzeczywista staa jest granic jednostajn pewnego cigu funkcji staych o wartociach wymiernych, a wic na podstawie lematu 2.1 naley do H^*.

Przypumy, e funkcje $f_0, f_1, \ldots, f_n$ nale do H^* oraz $w(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ jest wielomianem. Funkcje $f_0, f_1, \ldots, f_n$ s cige i okrelone na zbiorze zwartym, a wic s ograniczone. Dobieramy przedzia $[a, b]$ tak, aby wspczynniki wielomianu $w(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ oraz wartoci funkcji $f_0, f_1, \ldots, f_n$ naleay do przedziau otwartego (a, b). Traktujemy wspczynniki wielomianu $w(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ jak zmienne. Otrzymana funkcja rzeczywista jest ciga i okrelon na produkcie - tylekrotnym ile potrzeba, przedziau $[a, b]$. Jest ona okrelona na zbiorze zwartym, a wic jest jednostajnie ciga na tym zbiorze. Ustalamy $\varepsilon > 0$ i dobieramy $\delta > 0$ tak, aby zmiany zmiennych lub wspczynnikw o mniej ni δ zmieniay warto funkcji utworzonej wyej z wielomianu $w(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ o mniej ni ε. Dla kadej funkcji f_i dobieramy funkcj $g_i \in H$ tak, aby dla dowolnego punktu x zachodzia nierwno $|f_i(x) - g_i(x)| < \delta$. W wielomianie $w(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ kady wspczynnik zastpujemy liczb wymiern nalec do przedziau (a, b) odleg o mniej ni δ. Tak powstay wielomian oznaczamy $v(x_0, x_1, \ldots, x_n)$. Funkcja $v(g_0(x), g_1(x), \ldots, g_n(x))$ naley do piercienia H oraz dla dowolnego punktu x zachodzi nierwno

$$|w(f_0(x), f_1(x), \ldots, f_n(x)) - v(g_0(x), g_1(x), \ldots, g_n(x))| < \varepsilon,$$

ktra wystarcza dla dowodu $\square$

Lemat 2.6: *Niech H bdzie piercieniem funkcji rzeczywistych cigych okrelonych na przestrzeni zwartej X. Jeli funkcje $f_0, f_1, \ldots, f_n$ daj si przyblia funkcjami piercienia H, to funkcje* $\max(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ *oraz* $\min(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ *take daj si przyblia funkcjami piercienia H.*

Dowd. Ustalamy funkcj f dajc si przyblia funkcjami z piercienia H, tzn. $f \in H^*$. Bierzemy cig wielomiamw $w_0(x), w_1(x), \ldots$ zbieny jednostajnie do funkcji: $x \to |x|$ okrelonej na przedziale zawierajcym przeciwdziedzin funkcji f - jest to moliwe na podstawie lematu 2.2. Wielomiany $w_0(f(x)), w_1(f(x)), \ldots$ s jednostajnie zbiene do funkcji: $x \to |f(x)|$. Z tego i z definicji piercienia na podstawie lematu 2.5 wnioskujemy, e jeli funkcja f naley do H^*, to funkcja: $x \to |f|$ take naley do H^*.

Dla dowolnych funkcji rzeczywistych g oraz h zachodz rwnoci

$$2\min(g, h) = h + g - |h - g| \quad \text{oraz} \quad 2\max(g, h) = h + g + |h - g|.$$

Z tych rwnoci wnioskujemy, e jeli funkcje g oraz h nale do H^*, to rwnie funkcje $\min(g, h)$ oraz $\max(g, h)$ nale do H^*. To - po zastosowaniu zasady indukcji, wystarcza dla zakoczenia dowodu $\square$

Lemat 2.7: *Niech H bdzie piercieniem funkcji rzeczywistych cigych okrelonych na przestrzeni zwartej X oraz f funkcj cig okrelon na X. Jeli dla dowolnej liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0$ i dowolnych punktw x oraz y nalecych do X istnieje funkcja h naleca do H taka, e zachodz nierwnoci $|f(x) - h(x)| < \varepsilon$ oraz $|f(y) - h(y)| < \varepsilon$, to funkcja f daje si przyblia funkcjami piercienia H.*

Dowd. Bierzemy liczb rzeczywist $\varepsilon > 0$ - i ustalamy punkt $y \in X$. Dla dowolnego punktu $z \in X$ dobieramy funkcj $h_{yz} \in H$ tak, jak funkcja h w sformuowaniu lematu. Skoro funkcje f oraz h_{yz} s cige, to dobieramy otoczenie otwarte U_z punktu z tak, aby dla dowolnego punktu $x \in U_z$ zachodzia nierwno $f(x) - \varepsilon < h_{yz}(x)$.

Przestrze X jest zwarta, a wic dobieramy punkty $x_0, x_1, \ldots, x_n$ nalece do X tak, aby zbiory $U_{x_0}, U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}$ zawieray w swojej sumie X. Kadziemy

$$h_y = \max(h_{yx_0}, \ldots, h_{yx_n}).$$

Funkcja h_y naley do H^* na podstawie lematu 2.6. Dla dowolnego punktu $x \in X$ zachodz nierwnoci

$$f(x) - \varepsilon < h_y(x) \quad \text{oraz} \quad h_y(y) < f(y) + \varepsilon.$$

Funkcje f oraz h_y s cige, a wic dobieramy otwarte otoczenie V_y punktu y tak, aby dla dowolnego punktu $x \in V_y$ zachodzia nierwno $h_y(x) < f(x) + \varepsilon$ Korzystamy ze zwartoci przestrzeni X i wybieramy punkty $y_0, y_1, \ldots, y_n$ nalece do X tak, aby zbiory $V_{y_0}, V_{y_1}, \ldots, V_{y_n}$ zawieray w swojej sumie X. Kadziemy

$$h = \min(h_{y_0}, \ldots, h_{y_n}).$$

Funkcja h naley do H^* na podstawie lematu 2.6. Dla dowolnego punktu $x \in X$ zachodzi nierwno $h(x) < f(x) + \varepsilon$. Skoro byo $f(x) - \varepsilon < h_y(x)$ - dla jakiego $y \in \{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$, to mamy nierwno $f(x) - \varepsilon < h(x)$, ktra wobec lematu 2.1 koczy dowd □

Twierdzenie 2.8 (M. H. Stone): *Niech H bdzie piercieniem funkcji rzeczywistych cigych okrelonych na przestrzeni zwartej X. Jeli dla dowolnych dwu punktw x oraz y nalecych do X istnieje funkcja $g \in H$ taka, e $g(y) \neq g(x)$, to dowolna funkcja ciga okrelona na X daje si przyblia funkcjami piercienia H.*

Dowd. Bierzemy funkcj rzeczywist f cig i okrelon na X. Wobec lematu 2.7 - wstarczy pokaza, e dla dowolnych punktw x oraz y nalecych do X istnieje funkcja $h \in H^*$ taka, e $f(x) = h(x)$ oraz $f(y) = h(y)$. Aby to zrobi bierzemy funkcj $g \in H$ tak, e $g(x) \neq g(y)$. Nastpnie znajdujemy liczby rzeczywiste a oraz b takie aby rwnania $f(x) = ag(x) + b$ oraz $f(y) = ag(y) + b$ miay rozwizania: jest to moliwe, gdy wyznacznik podstawowy tego ukadu jest rwny $g(x) - g(y)$. Dalej kadziemy $h(z) = ag(z) + b$. Na podstawie lematu 2.5 mamy $h \in H^*$, co wystarcza dla zakoczenia dowodu □

Funkcj okrelon wzorem

$$A + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

bdziemy nazywali *wielomianem trygonometrycznym.*

Twierdzenie 2.9 (K. Weierstrass): *Dowolna funkcja rzeczywista ciga i okresowa o okresie 2π daje si przyblia wielomianami trygonometrycznymi.*

Dowd. Zamy, e funkcja rzeczywista ciga f jest parzysta. Rozwamy funkcj: $y \to f(\arccos y)$. Jest ona ciga na przedziale $[-1, 1]$ - i na podstawie twierdzenia 2.4 jest granic jednostajn wielomianw $w_0(y), w_1(y), \ldots$ okrelonych na tym przedziale. - Wtedy cig wielomianw $w_0(\cos x), w_1(\cos x), \ldots$ jest zbieny jednostajnie do funkcji $f(x)$ na przedziale $[0, \pi]$. Funkcja f jest parzysta, a wic zbieno zachodzi na przedziale $[-\pi, \pi]$. Stosujemy wzory trygonometryczne i wielomiany $w_0(\cos x), w_1(\cos x), \ldots$ zamieniamy na wielomiany trygonometryczne. Skoro funkcje stae s parzyste oraz sum bd iloczyn wielomianw trygonometrycznych mona przedstawi w formie wielomianu trygonometrycznego, to funkcje dajce si przyblia wielomianami trygonometrycznymi tworz piercie.

Dla zakoczenia dowodu korzystamy twierdzenia 2.8, do czego wystarczy, aby dla dowolnych liczb rzeczywistych $z, y \in (-\pi, \pi]$ istniaa funkcja parzysta bd wielomian trygonometryczny przyjmujcy rne wartoci na tych punktach. Gdy $z \neq -y$, to dobieramy odpowiedni funkcj parzyst. Gdy $z = -y$, to funkcja $\sin x + \cos x$ jest stosowna $\square$