1. Funkcje monotoniczne, wahanie funkcji.

Zbiór X będziemy nazywali *uporządkowanym*, jeśli określona jest relacja zawarta w produkcie kartezjańskim $X \times X$, która jest spójna, antysymetryczna i przechodnia. Relację tą będziemy nazywali *porządkiem* innymi słowy: porządek spełnia trzy następujące warunki.

Spójność: *Jeśli dwa różne punkty x oraz y należą do X, to para (x, y) lub para (y, x) należy do porządku.*

Antysymetria: *Jeśli para (x, y) należy do porządku, to para (y, x) nie należy do porządku.*

Przechodniość: *Jeśli pary (x, y) oraz (y, z) należą do porządku, to również para (x, z) należy do porządku.*

Jeśli para (x, y) należy do porządku, to będziemy pisali $x < y$ lub $y > x$ oraz będziemy mówili x *poprzedza* y lub y *następuje* po x. Będziemy pisali $x \leqslant y$ gdy $x = y$ lub $x < y$ i mówili x jest *niewiększe* niż y bąd« y jest *niemniejsze* niż x. - Symbolikę i nazewnictwo związane z porządkiem będziemy używali tak, jakby był to porządek na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych.

Zbiorami uporządkowanymi są zbiór wszystkich liczb naturalnych, zbiór wszystkich liczb rzeczywistych lub podzbiory tych zbiorów. Jednakże zbiór uporządkowany niekoniecznie musi być zbiorem złożonym z liczb lub zbiorem posiadającym dodatkową strukturę algebraiczną. Zbiory uporządkowane można traktować jako przykłady dla aksjomatycznej teorii zbiorów uporządkowanych. Wtedy spójność, antysymetria i przechodniość są aksjomatami relacji porządku - z których wyprowadza się twierdzenia o zbiorach uporządkowanych. Przykładami zbiorów uporządkowanych nie posiadających struktury algebraicznej zgodnej z porządkiem są podzbiory liczb porządkowych z relacją należenia - stosownym jej obcięciem, jako porządkiem.

Jeśli P oraz Q są zbiorami uporządkowanymi, to na produkcie kartezjańskim $P \times Q$ określamy porządek następującym warunkiem: Para (x, n) poprzedza parę (y, k), o ile x poprzedza y w porządku na P lub $x = y$ oraz k następuje po n w porządku na Q. - Taka metoda opisywania nowych zbiorów uporządkowanych może być iterowana. Pozwala ona konstruować wiele różnorodnych przykładów dla teorii zbiorów uporządkowanych. Porządki tak otrzymane są stosowane przy ustalaniu kolejności słów w różnego rodzaju słownikach.

Będziemy mówili, że zbiór X jest *prawie zawarty* w zbiorze Y oraz pisali $X \subseteq_* Y$, jeśli co najwyżej skończona ilość elementów z X nie należy do Y.

Lemat 1.1: *Niech dana będzie rodzina przeliczalna złożona ze zbiorów nieskończonych. Jeśli relacja prawie zawierania obcięta do tej rodziny jest porządkiem na niej, to istnieje zbiór nieskończony prawie zawarty w dowolnym zbiorze należącym do tej rodziny.*

Dowód. Ustalamy ciąg zbiorów nieskończonych $X_0, X_1, \ldots$ takich, że dla dowolnych dwu liczb naturalnych k oraz n zachodzi warunek:

$$X_k \subseteq_* X_n \quad \text{lub} \quad X_n \subseteq_* X_k.$$

Następnie wybieramy punkt $x_0 \in X_0$. Gdy określimy punkty $x_0, x_1, \ldots,$ x_{n-1}, to sprawdzamy - korzystając z przechodniości relacji prawie zawierania, że przekrój $X_0 \cap X_1 \cap \ldots \cap X_n$ jest nieskończony, a następnie dobieramy punkt x_n należący do tego przekroju różny od punktów $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$. Punkty $x_n, x_{n+1}, \ldots$ - są różne oraz należą do zbioru X_n. Oznacza to, że zbiór $\{x_0, x_1, \ldots\}$ jest prawie zawarty w dowolnym zbiorze z rodziny $\{X_0, X_1, \ldots\}$ $\square$

Funkcję rzeczywistą f określoną na zbiorze uporządkowanym X będziemy nazywali *rosnącą,* jeśli $x < y$ pociąga $f(x) \leqslant f(y)$. - Jeżeli $x < y$ pociąga $f(y) \leqslant f(x)$, to funkcję f będziemy nazywali *malejącą.* Funkcję rzeczywistą będziemy nazywali *monotoniczną*, jeśli jest funkcją rosnąca lub funkcją malejąca.

Lemat 1.2: *Niech dana będzie nieskończona rodzina zbiorów. Jeśli inkluzja obcięta do tej rodziny jest porządkiem, to istnieje nieskończona podrodzina tej rodziny taka, że jej elementy dają się ustawić w ciąg monotoniczny.*

Dowód. Ustalamy nieskończoną rodzinę zbiorów U uporządkowaną przez inkluzję i przyjmujemy obcięcie inkluzji do U za porządek. Przypuśćmy - że żadna nieskończona podrodzina zawarta w U nie daje się ustawić w ciąg nalejący. Oznacza to, że dowolna podrodzina zawarta w U zawiera element najmniejszy: gdyby tak nie było, to wybierając z U kolejno zbiory zawarte jeden w drugim otrzymalibyśmy podrodzinę nieskończoną ustawioną w ciąg malejący. Niech X_0 będzie najmniejszym elementem należącym do U. Gdy określimy zbiory $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$, to niech X_n będzie najmniejszym elementem w podrodzinie $U \setminus \{X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}\}$. Skoro rodzina U jest nieskończona, to $X_0 \subset X_1 \subset \ldots$: ciąg $X_0, X_1, \ldots$ jest nieskończony oraz rosnący $\Box$

Twierdzenie 1.3 (E. Helly): *Z dowolnego ciągu funkcji monotonicznych określonych na tym samym zbiorze uporządkowanym można wybrać podciąg punktowo zbieżny.*

Dowód. Przyjmijmy - że funkcje rzeczywiste $f_0, f_1, \ldots$ są rosnące i określone na zbiorze uporządkowanym X. - Dla funkcji malejących dowód polega na zamianie porządku przez relację odwrotną do niego; zaś w ciągu funkcji monotonicznych nieskończenie wiele wyrazów to funkcje rosnące lub funkcje malejące. Kładziemy

$$A(n, q) = \{x \in X : f_n(x) < q\}.$$

- Funkcje $f_0, f_1, \ldots$ są rosnące, a więc zbiory $A(0, q), A(1, q), \ldots$ są uporządkowane przez inkluzję dla dowolnej liczby rzeczywistej q.

Ustawiamy w ciąg $q_1, q_2, \ldots$ wszystkie liczb wymierne. Niech Y_0 oznacza - dla potrzeb tego dowodu, zbiór wszystkich liczb naturalnych. Załóżmy, że określiliśmy nieskończony podzbiór liczb naturalnych Y_n. Bierzemy ciąg $(A(k, q_n) : k \in Y_n)$ - i wybieramy z niego podciąg monotoniczny, stosując lemat 1.2 gdy ciąg zawiera nieskończenie wiele różnych wyrazów. Niech Y_{n+1} będzie zbiorem wszystkich liczb naturalnych, które występują na pierwszym miejscu w parach liczb występujących w napisach symbolizujących wyrazy powyżej wybranego podciągu. Skoro $Y_0 \supseteq Y_1 \supseteq \ldots$, to korzystamy z lematu 1.1 - i dobieramy zbiór nieskończony prawie zawarty w dowolnym ze zbiorów $Y_0, Y_1, \ldots$, który oznaczamy przez Z.

Zauważmy, że dla dowolnego punktu $x \in X$ ciąg liczb rzeczywistych $(f_n(x) : n \in Z)$ ma co najwyżej jeden punkt skupienia. - Gdyby istniały dwa różne punkty skupienia tego ciągu, np. g oraz h takie, że $g < q_m < h$, to ciąg $(A(k, q_m) : k \in (Z \cap Y_m))$ nie byłby monotoniczny: nieskończenie wiele jego wyrazów zawierałoby punkt x oraz nieskończenie wiele jego wyrazów nie zawierałoby punktu x. Wnioskujemy z tego, że ciąg $(f_n(x) : n \in Z)$ jest zbieżny - być może do $-\infty$ lub $+\infty$, dla dowolnego punktu $x \in X$ $\Box$

Niech t będzie najmniejszą liczbą kardynalną taką, że lemat 1.1 pozostaje prawdziwy jeśli określenie „rodzina przeliczalna” z pierwszego zdania w jego wypowiedzi zastąpimy słowami „rodzina mocy mniejszej od t”. Z lematu 1.1 wynika, że liczba kardynalna t jest nieprzeliczalna, tzn. $\omega_0 < t$. Z definicji liczby kardynalnej t wnioskujemy, że $t \leqslant \mathbf{c}$: bo definicja jest tak sformułowana, aby rodziny równoliczne z liczbą kardynalną t były wśród rodzin złożonych z podzbiorów liczb naturalnych. Z analizy dowodu twierdzenia 1.3 wynika, że liczby rzeczywiste - jako przeciwdziedziny funkcji monotonicznych, mogą być zastąpione w tym twierdzeniu przez dowolny zbiór uporządkowany o gęstości mniejszej od t, w którym ciągi monotoniczne są zbieżne. Nietrywialnym przykładem takiego zbioru uporządkowanego są liczby porządkowe niewiększe od ustalonej liczby porządkowej poprzedzającej t. - Gęstość zbioru uporządkowanego to najmniejsza liczba kardynalna równoliczna ze zbiorem przecinającym dowolny nietrywialny przedział, a więc w dowodzie twierdzenia 1.3 zamiast liczb wymiernych $q_1, q_2, \ldots$ wystarcza wziąć zbiór gęsty $\{q_\alpha : \alpha < t\}$ ponumerowany kolejnymi liczbami porządkowymi. Wtedy zbiory Y_α definiujemy tak samo jak zbiory Y_{n+1}, podstawiając za Y_n zbiór nieskończony prawie zawarty w dowolnym zbiorze należącym do rodziny $\{Y_\beta : \beta < \alpha\}$.

Niech f będzie funkcją rzeczywistą określoną na zbiorze uporządkowanym X. Jeśli punkty a oraz b należą do X oraz $a \leqslant b$, to przez $W_a^b(f)$ będziemy oznaczali kres górny zbioru złożonego z liczb postaci

$$|f(x_0) - f(x_1)| + |f(x_1) - f(x_2)| + \ldots + |f(x_{n-1}) - f(x_n)|,$$

gdzie $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Będziemy mówili, że f jest funkcją o *wahaniu skończonym* w przedziale $[a, b] = \{x \in X : a \leqslant x \leqslant b\}$, jeśli kres $W_a^b(f)$ jest liczbą rzeczywistą. Kres $W_a^b(f)$ będziemy nazywali *wahaniem* funkcji f w przedziale $[a, b]$.

Funkcja f monotoniczna na przedziale $[a, b]$ - jest o wahaniu skończonym w tym przedziale; zaś wahanie tej funkcji jest równe $|f(a) - f(b)|$: gdyż $W_a^b(f)$ jest kresem górnym po zbiorze, którego jedynym elementem jest liczba $|f(a) - f(b)|$.

Funkcja o wahaniu skończonym może być nieciągła: przykładem jest dowolna nieciągła funkcja monotoniczna. Na odwrót, funkcja ciągła - a nawet różniczkowalna, może nie mieć wahania skończonego: przykładem jest funkcja

$$f(x) = x^2 \cos(\pi x^{-2}), gdy$$

x$\neq$ 0;0, dla $x = 0$

$-ktrajestrniczkowalnawszdzie, lecz niemawahaniaskoczonegowprzedziale$

[0,1].

Twierdzenie 1.4 (C. Jordan): *Dowolna funkcja rzeczywista o wahaniu skończonym w ustalonym przedziale jest różnicą dwu funkcji rosnących na tym przedziale.*

Dowód. Niech f będzie funkcją rzeczywistą o wahaniu skończonym w przedziale $[a, b]$. Kładziemy

$$F(x) = \frac{W_a^x(f) + f(x)}{2} \quad \text{oraz} \quad G(x) = \frac{W_a^x(f) - f(x)}{2}.$$

Dla dowolnego punktu $x \in [a, b]$ mamy $f(x) = F(x) - G(x)$: funkcja f jest różnicą funkcji F oraz G. Jeśli $a \leqslant x < y \leqslant b$, to korzystamy z równości $W_a^y(f) = W_a^x(f) + W_x^y(f)$ - która wynika z właściwości kresów użytych w definicji wahania funkcji - i wyliczamy liczbę $2(F(y) - F(x))$, która jest równa

$$W_a^y(f) - W_a^x + f(y) - f(x) = W_x^y(f) + f(y) - f(x) \geqslant W_x^y(f) - |f(y) - f(x)|.$$

Podobnie

$$2(G(y) - G(x)) = W_x^y(f) - f(y) + f(x) \geqslant W_x^y(f) - |f(y) - f(x)|.$$

Skoro $W_x^y(f) - |f(y) - f(x)| \geqslant 0$, to funkcje F oraz G są rosnące $\square$

Wniosek 1.5: *Dowolna suma skończonej ilości funkcji monotonicznych na ustalonym przedziale jest różnicą dwu funkcji rosnących na tym przedziale.*

Dowód. Suma skończonej ilości funkcji rzeczywistych o wahaniu skończonym w ustalonym przedziale jest funkcją o wahaniu skończonym w tym przedziale: wynika to z definicji wahania funkcji oraz z nierówności trójkąta. Wnioskujemy z tego, że suma skończonej ilości funkcji monotonicznych na ustalonym przedziale jest funkcją o wahaniu skończonym w tym przedziale - co wobec poprzedniego twierdzenia wystarcza dla zakończenia dowodu $\square$

Ciąg $(x_0, x_1, \ldots)$ złożony z zer i jedynek będziemy nazywali *rozwinięciem dwójkowym* liczby $x \in [0, 1]$, jeśli

$$x = \frac{x_0}{2} + \frac{x_1}{2^2} + \ldots + \frac{x_n}{2^{n+1}} + \ldots$$

oraz nieskończenie wiele wyrazów tego ciągu to jedynki. - Dowolna liczba z przedziału $[0,1]$ ma jednoznacznie wyznaczone rozwinięcie dwójkowe. Na odwrót, dowolny ciąg $(x_0, x_1, \ldots)$ złożony z zer i jedynek wyznacza liczbę z przedziału $[0,1]$, dla której jest rozwinięciem dwójkowym, o ile nieskończonie wiele jego wyrazów to jedynki.

Rozważmy ciąg funkcji określony - dla dowolnej liczby naturalnej n, w punkcie x o rozwinięciu dwójkowym $(x_0, x_1, \ldots)$ wzorem

$$f_n(x) = f_n((x_0, x_1, \ldots)) = 1, gdy$$

x$_n = 1$;0, gdy $x_n = 0$.

$$Funkcje$$

f$_0, f_1, \ldots$ - w literaturze bywają nazywane funkcjami Radamachera, są określone na przedziale $[0,1]$. - Nietrudno wyliczyć, że

$$W_0^1(f_0) = 1, W_0^1(f_1) = 3, \ldots, W_0^1(f_n) = 2^n - 1 :$$

funkcje Radamachera są o wahaniu skończonym w przedziale $[0,1]$. Jednocześnie ciąg funkcji $(f_0, f_1, \ldots)$ nie zawiera podciągu punktowo zbieżnego: gdy ustalimy nieskończony podzbiór Y złożony z liczb naturalnych i podzielimy go na dwa rozłączne, nieskończone podzbiory A oraz B, to podciąg $(f_n(x) : n \in Y)$ nie jest zbieżny dla żadnej liczby o rozwinięciu dwójkowym $(x_0, x_1, \ldots)$ takim, że wyrazy podciągu $(x_n : n \in A)$ są stale równe zero; zaś wyrazy podciągu $(x_n : n \in B)$ są stale równe jeden.

Czytelnikowi - jako ćwiczenia lub uzupełnienia pominiętych rozumowań, proponujemy uzasadnić poniższe twierdzenia.

Jeśli funkcja monotoniczna na ustalonym przedziale jest różnowartościowa, to funkcja odwrotna do niej jest ciągła.

Funkcja rzeczywista o wahaniu skończonym w ustalonym przedziale jest ograniczona na tym przedziale.

Funkcja rzeczywista o wahaniu skończonym ma co najwyżej przeliczalną ilość punktów nieciągłości

Suma skończenie wielu funkcji rzeczywistych o wahaniu skończonym w ustalonym przedziałe jest funkcją o wahaniu skończonym w tym przedziale.

Iloczyn skończenie wielu funkcji rzeczywistych o wahaniu skończonym w ustalonym przedziałe jest funkcją o wahaniu skończonym w tym przedziale.

Z ciągu funkcji rzeczywistych o wahaniu wspólnie ograniczonym w ustalonym przedziale można wybrać podciąg punktowo zbieżny na tym przedziale.

Jeśli $a \leqslant b \leqslant c$, *to* $W_a^c(f) = W_a^b(f) + W_b^c(f)$: wahanie funkcji jest addytywną funkcją przedziału.

Złożenie dwu funkcji o wahaniu skończonym nie musi być funkcją o wahaniu skończonym: np. $F(x) = (x \sin x^{-1})^2$ oraz $G(x) = \sqrt{x}$.

Funkcja rzeczywista, której pochodna jest ciągła dla wszystkich punktów przedziału $[a, b]$, *jest o wahaniu skończonym w tym przedziale.*

Twierdzenie Blaschkego: *Z ciągu krzywych wypukłych położonych na płaszczy«nie w ustalonym kole, można wybrać podciąg zbieżny do krzywej wypukłej.*

Krzywa zwykła określona równaniami paramertycznymi $x = x(t)$, $y = y(t)$ *oraz* $z = z(t)$ *jest prostowalna na przedziale* $[a, b]$, *tzn. ma skończoną długość jeśli* $a \leqslant t \leqslant b$, *wtedy i tylko wtedy gdy funkcje* $x(t)$, $y(t)$ *oraz* $z(t)$ *są o wahaniu skończonym w przedziale* $[a, b]$.

Krzywa zwykła określona w układzie biegunowym równaniami $\varphi = \varphi(t)$ *oraz* $r = r(t)$ *jest prostowalna dla* $a \leqslant t \leqslant b$, *wtedy i tylko wtedy gdy funkcje* $\varphi(t)$ *oraz* $r(t)$ *o wahaniu skończonym w przedziale* $[a, b]$.

Jeśli $g : [a, b] \to [c, d]$ *jest funkcją ciągłą i monotoniczną taką, że zbiory* $\{g(a), g(b)\}$ *oraz* $\{c, d\}$ *są równe, to* $W_a^b(f) = W_d^c(f \circ g)$: podstawienie ciągłe i monotoniczne nie zmienia wahania.