0. Liczby naturalne, rzeczywiste i porządkowe.

Liczby często oznaczamy literami. Gdy zapisujemy równania:

$$\begin{array}{rrcl} & a^2 - b^2 & = & (a+b)(a-b), \\ & a^3 - b^3 & = & (a-b)(a^2+ab+b^2), \\ & a^3 + b^3 & = & (a+b)(a^2-ab+b^2) \\ \text{lub} & a^n - b^n & = & (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}) \end{array}$$

- to myślimy o wzorach, które są spełnione gdy za litery a, b oraz n podstawimy liczby. Przy czym za n podstawiamy jedynie liczby naturalne; zaś a oraz b mogą być liczbami, dla których określone są łączne i przemienne operacje dodawania i mnożenia. Wzory są formą zapisywania informacji używającą zwykle kilka bądź kilkadziesiąt symboli. Niewielka ilość reguł i konwenasów wykorzystywanych przy tworzeniu lub odczytywaniu wzorów - np. we wzorze ten sam symbol oznacza wszędzie taki sam obiekt oraz różne symbole mogą oznaczać taki sam obiekt, czyni je istotnymi narzędziami precyzyjnego komunikowania się.

Inną formą zapisywania informacji jest opis słowny, który bywa równie komunikatywny jak wzory. Prześledźmy to na przykładzie relacji równości. Jeśli litery a oraz b oznaczają ten sam obiekt, to piszemy $a = b$ oraz mówimy a *równe* b. Gdy a nie jest równe b, to piszemy $a \neq b$ oraz mówimy a *różne* od b. Relacja równości jest: - *zwrotna* - Czyli a jest równe a; co zapisujemy $a = a$. - *symetryczna* - Czyli jeśli a jest równe b, to b jest równe a; co zapisujemy $a = b$ pociąga $b = a$. - *przechodnia* - Czyli jeśli a jest równe b oraz b jest równe c, to a jest równe c; co zapisujemy $a = b$ oraz $b = c$ implikują $a = c$.

Opis słowny wykorzystuje słowa języka potocznego, które są dobierane z kilku tysięcy słów o różnym zakresie znaczenia. W tekstach matematycznych, ze względów praktycznych, korzystnym jest łączenie opisu słownego ze wzorami. My będziemy spójniki logiczne zapisywać w języku potocznym: tak uczyniliśmy, podając symboliczną formę zapisów zwrotności, symetryczności i przechodniości relacji równości. Najkorzystniejszą formę łączenia opisu słownego ze wzorami można osiągnąć wtedy, gdy udaje się skracać napisy, wprowadzając nazwy lub - wykorzystać pozycję fragmentów napisu. Zilustrujmy to opisem pozycyjnego sposobu zapisywania liczb naturalnych. Dla zapisywania liczb naturalnych przyjmujemy system pozycyjny, który w Europie jest znany jako system arabski. Liczby naturalne 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 nazywamy *cyframi.* Kolejna cyfra - za wyjątkiem 0, symbolizuje liczbę naturalną, która jest następnikiem liczby symbolizowanej przez cyfrę ją poprzedzającą. Pozostałe liczby naturalne są symbolizowane przez skończone układy cyfr $c_k c_{k-1} \ldots c_1 c_0$, gdzie $c_k \neq 0$. 10 symbolizuje następnik 9. Następnik liczby naturalnej $c_k c_{k-1} \ldots c_1 c_0$, jest symbolizowany przez układ cyfr $c_k c_{k-1} \ldots c_1 b$, o ile b jest cyfrą oraz jest następnikiem c_0. Gdy $c_0 = 9$, to na końcu następnika liczby naturalnej $c_k c_{k-1} \ldots c_1$ dopisujemy zero. Otrzymany napis to zapis symbolizujący następnik liczby naturalnej $c_k c_{k-1} \ldots c_1 9$.

Pozycyjny system zapisywania liczb pojawiał się około 4 tysiące lat temu w Mezopotamii. Zdecydował o tym sposób pisania na glinianych tabliczkach przy pomocy jednego znaku w kształcie klina. Techniczne możliwości tworzenia zapisu wymusiły potrzebę wykorzystywania pozycji znaku dla tego, aby ilość zapisanej informacji miała znaczenie praktyczne. To, że w systemie arabskim używany jest symbol zera pozwala domniemać, że system ten powstał jako modyfikacja systemu pozycyjnego -? wykorzystującego 60 cyfr, tj. systemu stworzonego w Mezopotamii, w którym zero odgrywało specyficzną rolę. Gdzie cyfry od 1 do 59 były zapisywane metodą addytywną. Znak klina z ostrzem skierowanym w dół ▼ oznaczał jednostki, zaś znak klina z ostrzem skierowanym w lewą stronę ◀ dziesiątki. Gdy cyfra użyta do zapisu liczby nie zawierała jednostek lub dziesiątek, to w zapisie pozostawiano odpowiednie miejsce puste lub wstawiano znak dwu równoległych klinów z ostrzami skierowanymi w lewą stronę, a więc znak zera - znane są tabliczki gliniane pochodzące z III wieku przed naszą erą, na których znak zera jest w taki sposób symbolizowany. Ze znanych zabytków pisanych wynika, że system arabski ukształtował się w Indiach w VI wieku naszej ery oraz został rozpowszechniony cztery wieki później w Europie. Nie ma powodów o charakterze matematycznym dla wyboru dziesiętnego systemu zapisywania liczb. W naszej kulturze pozostały ślady systemów dwunastkowego i sześćdziesiątkowego w miarach czasu i kątów. Dominacja systemu dziesiątkowego - podstawą dla zapisywania liczb naturalnych może być dowolna liczba naturalna większa od 1 - wynika z dydaktycznych oraz praktycznych nawyków istot, które się nim posługują. Wygląda na to, że decyduje ilość palców, a jest ich dziesięć, w obu rękach tych istot!

W wykładach o funkcjach rzeczywistych będziemy posługiwali się dowodem indukcyjnym. Czytelnikowi proponujemy aby swoją wprawę w posługiwaniu się takim dowodem sprawdził, wyprowadzając własności liczb naturalnych z aksjomatów. Przytaczamy układ aksjomatów ogłoszony w 1889 roku przez G. Peano w rozprawie *Arithmeticas principia nova methodo exposita.* Pojęciami pierwotnymi są: *liczba naturalna*, *następnik* oraz *zero.*

A1: *Zero jest liczbą naturalną.*

A2: *Następnik liczby naturalnej jest liczbą naturalną.*

A3: *Zero nie jest następnikiem liczby naturalnej.*

A4: *Jeśli następnik liczby naturalnej n jest równy następnikowi liczby naturalnej k, to liczby n oraz k są równe.*

A5: *Jeśli zero należy do zbioru N oraz wraz z liczbą naturalną należącą do N jej następnik także należy do N, to wszystkie liczby naturalne należą do N.*

Metoda aksjomatyczna polega na tym, że ustala się pojęcia pierwotne. Aksjomaty to twierdzenia przyjęte bez dowodu, które określają wzajemne zależności pomiędzy pojęciami pierwotnymi. Z aksjomatów wyprowadza się twierdzenia. Dowody twierdzeń składają się ze skończonej ilości napisów: dowolne twierdzenie jest konsekwencją skończonej ilości aksjomatów. Pomimo tego aksjomatów może być nieskończenie wiele. Zwykle czytelnikowi pozostawione bywa dokładne sprecyzowanie aksjomatów, które zostały użyte w konkretnym dowodzie. My pomijamy precyzowanie reguł dowodzenia twierdzeń. Przyjmujemy, że te reguły, innymi słowy zasady logiki, są z natury swej używane tak samo przez istoty, z którymi potrafimy komunikować się. Prawdopodobnie pierwszymi zastosowaniami metody aksjomatycznej były gry planszowe. Przykładowo, w szachach nazwy figur - to pojęcia pierwotne, aksjomaty - to reguły ruchu figur, zaś zbiór dopuszczalnych ruchów w ustalonym momencie gry - to twierdzenie. Metodę aksjomatyczną odkrywali również twórcy kodeksów moralnych bądź prawnych. Pierwszy znany piśmienny przykład tej metody podaje Biblia: w taki sposób Mojżesz wprowadził dziesięć przykazań - gdzie pojęciem pierwotnym jest słowo *Bóg*. O takim zamyśle może świadczyć opowieść o rozmowie przy krzaku gorejącym na pustyni. Gdy Mojżesz przygotowywał się do wypełnienia misji i miał wątpliwości w jaki sposób wytłumaczyć ludowi imię Boga, wtedy padła propozycja: *jestem, który jestem*. Propozycja, aby imienia tego nie definiować. W matematyce po raz pierwszy metodę aksjomatyczną zastosował Euklides: tak przedstawił znane w jego czasach twierdzenia z geometrii.

W aksjomacie A5, będziemy go nazywali aksjomatem indukcji, występują pojęcia *należenia* oraz *zbioru*. Są to pojęcia pierwotne teorii zbiorów, którą będziemy stosowali intuicyjnie, zakładając znajomość nazewnictwa i symboliki tej teorii. Mamy nadzieję, że czytelnik bez trudu - na podstawie kontekstu, będzie rozróżniał algebraiczne bądź mnogościowe znaczenie nazw: ciało, suma lub iloczyn. Aksjomat indukcji jest schematem dla aksjomatów, których jest tyle samo co zbiorów zawierających podzbiory liczb naturalnych. Dowolny zbiór podstawiony za N daje aksjomat. Gdy dowodzimy twierdzeń o liczbach naturalnych, to w dowodach wykorzystujemy skończenie wiele razy schemat aksjomatu indukcji: jakiekolwiek twierdzenie o liczbach naturalnych jest konsekwencją skończonej ilości aksjomatów.

Jeśli n jest liczbą naturalną, to następnik n oznaczamy $n+1$. Napis $n+m$ będziemy nazywali *sumą* liczb n oraz m. Dla określenia dodawania liczb naturalnych przyjmijmy umowę: $n+0=n$ oraz $n+(m+1)=(n+m)+1$.

Podobnie jak dodawanie określamy mnożenie. Napis nm będziemy nazywali *iloczynem* liczb n oraz m. Przyjmujemy umowę: $n1 = n$ oraz $n(m+1) = nm+n$.

Analogicznie jak dodawanie i mnożenie określamy potęgowanie, które bywa wykorzystywane dla skracania wzorów, w których występuje mnożenie - podobnie jak mnożenie liczb naturalnych wykorzystuje się dla skracania wzorów, w których występuje dodawanie. Napis n^m będziemy nazywali *m-tą potęgą* liczby n. Przyjmujemy umowę: $n^0 = 1$ oraz $n^{m+1} = n^m n$.

Dla liczb naturalnych n oraz m piszemy $n \leqslant m$ lub $m \geqslant n$ gdy można dobrać liczbę naturalną k tak, aby $m = n + k$. Wtedy mówimy n jest *niewiększe* od m lub m jest *niemniejsze* od n. Gdy $m = n + k$ oraz $k \neq 0$, to piszemy $n < m$ lub $m > n$ oraz mówimy n jest *mniejsze* od m lub m jest *większe* od n.

$$
\begin{array}{rcl}
n+0 & = & 0+n. \\
n+1 & = & n+(0+1). \\
0n & = & 0. \\
1n & = & n. \\
(m+n)k & = & mk+nk. \\
m+(n+1) & = & (m+1)+n. \\
n+m & = & m+n. \\
nm & = & mn. \\
n+(m+k) & = & (n+m)+k. \\
n(mk) & = & (nm)k. \\
n(m+k) & = & nm+nk. \\
n+[m+(l+k)] & = & [(n+m)+l]+k. \\
n^1 & = & n. \\
n^{m+k} & = & n^m n^k. \\
(n^m)^k & = & n^{mk}.
\end{array}
$$

Liczba naturalna jest różna od swego następnika i - za wyjątkiem zera, jest następnikiem innej liczby naturalnej.

Jeśli $n \neq m$, *to* $n + n \neq m + m$ *oraz* $n^2 \neq m^2$.

Jeśli $n \neq 0$, *to* $n + m \neq 0$.

Dla liczby naturalnej n *można dobrać liczbę naturalną* k *tak, aby* $n = k + k$ *lub* $n = k + k + 1$.

Jeśli $nm = 0$, *to* $n = 0$ *lub* $m = 0$.

Jeśli liczbę naturalną n *dodamy do siebie* k*-krotnie, to otrzymana suma jest* *równa* nk.

Jeśli liczbę naturalną n*, różną od zera, pomnożymy przez siebie* k*-krotnie, to otrzymany iloczyn równa się* n^k.

Dla liczby naturalnej n *zachodzi* $0 \leqslant n \leqslant n < n+1$ *oraz nieprawdą jest, że* $n < n$.

Dla liczb naturalnych n *oraz* m *zachodzi* $n \leqslant m$ *lub* $m \leqslant n$.

Dla liczb naturalnych n *oraz* m *zachodzi* $n \leqslant m$ *lub* $m < n$.

Dla liczb naturalnych n *oraz* m *zachodzi* $n < m$ *lub* $m < n$ *lub* $n = m$.

Jeśli $n \leqslant m$*, to* $n < m+1$.

Jeśli $n \leqslant m$ *oraz* $m \leqslant k$*, to* $n \leqslant k$.

Jeśli $n \leqslant m$ *oraz* $m < k$*, to* $n < k$.

Jeśli $n < m$ *oraz* $m \leqslant k$*, to* $n < k$.

Jeśli $n \leqslant m \leqslant n+1$*, to* $m = n$ *lub* $m = n+1$.

Jeśli $n \leqslant m$*, to* $n+l \leqslant m+l$.

Jeśli $n < m$*, to* $n+l < m+l$.

Jeśli $n \leqslant l$ *oraz* $m \leqslant k$*, to* $n+m \leqslant l+k$.

Jeśli $n \leqslant m$*, to* $nl \leqslant ml$.

Jeśli $n \leqslant l$ *oraz* $m \leqslant k$*, to* $nm \leqslant lk$.

Jeśli $n < l$ *oraz* $m \leqslant k$*, to* $n+m < l+k$.

Jeśli $n < l$ *oraz* $m \leqslant k$*, to* $nm \leqslant lk$*. Gdy dodatkowo* $k \neq 0$ *, to* $nm < lk$.

Jeśli $n+l \leqslant m+l$*, to* $n \leqslant m$.

Jeśli $n+l < m+l$*, to* $n < m$.

Jeśli $n+l = m+l$*, to* $n = m$.

Jeśli $n < m$ oraz $l \neq 0$, to $nl < ml$.

Jeśli $nl \leqslant ml$ oraz $l \neq 0$, to $n \leqslant m$.

Jeśli $nl = ml$ oraz $l \neq 0$, to $n = m$.

Czytelnikowi - który ma kłopoty z samodzielnym wyprowadzeniem z aksjomatów powyższych wzorów i twierdzeń polecamy książkę W. Sierpińskiego *Arytmetyka teoretyczna*. Znajdzie tam dowody, których modyfikacje dają odpowiednie uzasadnienia. Jako inny rodzaj ćwiczeń - proponujemy zapisać powyższe twierdzenia w formie nie używającej symboli: dodawania, mnożenia, porządku lub równości.

Mówimy, że zbiór składający się z liczb naturalnych jest *ograniczony,* gdy jakaś liczba naturalna jest większa od jakiejkolwiek liczby z tego zbioru.

Zasada maksimum: *Ze zbioru złożonego z liczb naturalnych, ograniczonego i zawierającego przynajmniej jedną liczbę można wybrać liczbę największą; tzn. do zbioru złożonego z liczb naturalnych, ograniczonego i niepustego należy liczba niemniejsza od jakiejkolwiek liczby z tego zbioru.*

Dowód. Rozważmy zbiór N złożony z liczb naturalnych, ograniczony oraz zawierający liczbę naturalną l. Dobieramy liczbę naturalną n większą od jakiejkolwiek liczby z N. Przypuśćmy - dla dowodu niewprost, że dla dowolnej liczby należącej do N istnieje liczba większa od niej także należąca do N. Oznaczmy przez Z zbiór tych liczb naturalnych, które są niewiększe od choć jednej liczby należącej do N. Skoro liczba l należy do N oraz zero jest niewiększe od l, to zero należy do Z. Jeśli liczba naturalna k należy do Z, to dobieramy liczbę m należącą do N niemniejszą od k. Następnie dobieramy liczbą p należącą do N większą od m. Zachodzi $k \leqslant m < p$. Co pociąga $k + 1 \leqslant p$ - skąd wnioskujemy, że liczba naturalna $k+1$ należy do Z. Na podstawie aksjomatu indukcji zbiór Z zawiera wszystkie liczby naturalne, między innymi liczba n należy do Z. To jest niemożliwe, bo wtedy liczba n byłaby większa od siebie samej $\square$

W sformułowaniu zasady maksimum - przy okazji podaliśmy definicję niepustości zbioru oraz liczby największej w zbiorze. W sformułowaniu poniższej zasady podana jest definicja liczby najmniejszej w zbiorze.

Zasada minimum: *Ze zbioru złożonego z liczb naturalnych zawierającego choć jedną liczbę można wybrać liczbę najmniejsza; tzn. niepusty zbiór złożony z liczb naturalnych zawiera liczbę niewiększą od jakiejkolwiek liczby z tego zbioru.*

Dowód. Rozważmy zbiór N złożony z liczb naturalnych. Gdy zero należy do

N, to jest najmniejszą liczbą naturalnją należącą do N. Przypuśćmy, że zero nie należy do N. Oznaczmy przez Z zbiór tych liczb naturalnych, które są mniejsze od dowolnej liczby z N. Gdy liczba naturalna l należy do N, to zbiór Z zawiera zero oraz jest ograniczony, a więc na podstawie zasady maksimum zawiera liczbę największą, którą oznaczmy przez k. Skoro $k < k + 1$, to liczba $k + 1$ nie należy do Z. Korzystamy z definicji zbioru Z i wybieramy ze zbioru N liczbę m taką, że $m \leqslant k + 1$. Skoro $k < m$, to $m = k + 1$. Liczba m jest najmniejszą liczbą wśród liczb należących do N. Gdyby to było nieprawdą, to do N należałaby liczba naturalna większa od k oraz mniejsza od $k + 1$, co jest niemożliwe $\square$

Uogólniony aksjomat indukcji: *Jeśli liczba naturalna n należy do zbioru N oraz wraz z liczbą naturalną należącą do N jej następnik także należy do N, to wszystkie liczby naturalne większe od n należy do N.*

Dowód. Rozważmy zbiór N taki jak w założeniach oraz liczbę naturalną n należącą do N. Oznaczmy przez Z zbiór wszystkich liczb naturalnych większych od n, które nie należą do N. Jeśli zbiór Z zawiera choć jedną liczbę naturalną, to korzystamy z zasady minimum i oznaczamy przez m najmniejszą liczbę należącą do Z. Skoro liczby należące do Z są większe od zera, to dobieramy liczbę naturalną k tak, aby $m = k + 1$. Liczba k nie należy do Z oraz nie jest mniejsza od n, bo niemożliwe jest $k < n < m = k + 1$, czyli k należy do N - to oraz założenia implikują, że liczba $k + 1 = m$ należy do N oraz nie należy do Z. Daje to sprzeczność, która kończy dowód $\square$

Dzielenie z resztą: *Jeśli m oraz n są liczbami naturalnymi oraz m jest większe od zera, to można dobrać liczbę naturalną d oraz liczbę naturalną r mniejszą od m tak, aby $n = md+r$. Przy czym liczby d oraz r są wyznaczone jednoznacznie.*

Dowód. Rozważmy liczby naturalne n oraz m i załóżmy, że $m > 0$. Jeżeli $n < m$, to kładziemy $d = 0$ oraz $r = n$: wtedy $n = 0 + n = md + r$. Jeżeli $m \leqslant n$, to dobieramy liczbę naturalną $k \geqslant 0$ tak, aby $n = m + k$. Jeśli k jest niemniejsze od m, to powtarzamy powyższą operację - podstawiając k za n. Takie powtórzenie dokonujemy tyle razy, ile razy jest to możliwe. Otrzymaną za i-tym razem liczbę oznaczamy k_i. Otrzymujemy liczby oznaczone przez $k_1, k_2, \ldots$ takie, że $n > k_1 > k_2 > \ldots$ - oraz dla dowolnego i zachodzi $k_i = m + k_{i+1}$. Korzystamy z zasady minimum i wybieramy liczbę najmniejszą w zbiorze wszystkich liczb k_i, którą oznaczamy przez k_{j+1}. Jeśli dodamy stronami równości

$$\begin{aligned} n &= m + k_1, \\ k_1 &= m + k_2, \\ &\ldots \\ k_j &= m + k_{j+1} \end{aligned}$$

- to po uproszczeniqach otrzymamy

$$n = m(j+1) + k_{j+1}.$$

Skoro nie zdefiniowaliśmy liczby k_{j+2} - to liczba k_{j+1} jest mniejsza od m. Kładziemy $r = k_{j+1}$ oraz $d = j + 1$: otrzymujemy $n = md + r$.

Dla uzasadnienia jednoznaczności załóżmy, że $n = md + r = mg + s$, gdzie $r < m$ oraz $s < m$. Jeśli $d \neq g$ - przykładowo $d < g$, to dobieramy liczbę naturalną $k > 0$ tak, aby $d + k = g$: otrzymujemy

$$md + r = n = mg + s = m(d + k) + s = md + mk + s$$

- a po uproszczeniu $r = mk + s$. Ostatnia równość jest sprzeczna z założeniem $r < m$, a więc zachodzi $d = g$. Jeśli $d = g$, to równości $n = md + r = md + s$ - po uproszczeniu dają $r = s$ $\square$

Wielomian

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

nazywamy *rozkładem liczby naturalnej m według potęg liczby naturalnej k*, gdy współczynniki $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ są liczbami naturalnymi mniejszymi od k oraz $W(k) = m$.

Rozkład według potęg: *Liczba naturalna ma rozkład według potęg liczby naturalnej większej od 1. Rozkład taki jest jednoznaczny.*

Dowód. Zero ma stosowny rozkład. Jest nim wielomian stale równy zeru. Przypuśćmy, że wielomian $V(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ jest rozkładem liczby naturalnej m według potęg liczby naturalnej $k > 1$. Gdy $a_0 + 1 < k$, to stosownym rozkładem liczby $m + 1$ jest wielomian

$$W(x) = V(x) + 1 = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 + 1.$$

Gdy $a_0 + 1 = a_1 + 1 = \ldots = a_i + 1 = k$ oraz $a_{i+1} + 1 < k$, to wielomian

$$W(x) = a_n x^n + \ldots + a_{i+2} x^{i+2} + (a_{i+1} + 1) x^{i+1}$$

- jest stosownym rozkładem liczby $m + 1$: bo

$$k^{i+1} = 1 + (k-1)(k^i + \ldots + k + 1) = 1 + a_i k^i + \ldots + a_1 k + a_0.$$

Gdy $a_0 + 1 = a_1 + 1 = \ldots = a_n + 1 = k$, to wielomian $W(x) = x^{n+1}$ - jest stosownym rozkładem dla $m + 1$. Na podstawie aksjomatu indukcji określiliśmy rozkład dowolnej liczby naturalnej według potęg liczby naturalnej $k > 1$. Jednoznaczności tego rozkładu dowodzimy, korzystając z twierdzenie o dzieleniu z resztą. Dokładny zapis tego fragmentu dowodu pomijamy $\square$

Własności liczb naturalnych odzwierciedlają doświadczenia - w których uczestniczyliśmy badając skończoną ilość obiektów, z których każdy jest swoistego rodzaju jednostką. Aksjomaty liczb naturalnych i twierdzenia z nich wyprowadzane systematyzują reguły myślenia o takich obiektach. Ich niezawodność jest wspólnym doświadczeniem istot, które z nich korzystały lub korzystają. Określenie obiektu jako jednostki jest wyborem o charakterze subiektywnym: taki wybór może być swobodnie dokonany spośród wielu różnych możliwości; np. gdy rozważamy odległości, to zwykle z dużą swobodą wybieramy jednostkę długości. Różnego rodzaju przyczyny praktyczne stały się powodem dla rozszerzania zbioru liczb naturalnych. Z grubsza czyniono to tak, aby zachować i poprawić algebraiczne własności liczb naturalnych. Przy tym motywacją była potrzeba istnienia rozwiązań równań: $m + x = n$, $mx = n$ lub $x^2 = m$. Próbowano także utrzymać relację uporządkowania liczb lub przypisać zbiorowi wszystkich liczb własności natury topologicznej: własności, które pozwalą precyzować zasady przybliżania liczb przez skończone układy liczb.

Postulaty algebraiczne bywają realizowane poprzez gwarantowanie tego, że zbiór liczb jest ciałem. Sprowadza się to do definiowania zbioru liczb X, w którym określone i wykonalne są działania dodawania i mnożenia, które są przemienne i łączne oraz mnożenie jest rozdzielne względem dodawania. Dwie różne liczby 0 oraz 1 są elementami neutralnymi dodawania i mnożenia. Dowolne równanie $m + x = n$, gdzie m oraz n należą do X, ma zawsze jednoznaczne rozwiązanie należące do X. Dowolne równania $mx = n$ - gdzie m jest różne od 0 i należy do X, zaś n należy do X - ma zawsze jednoznaczne rozwiązanie należące do X.

Dowolny zbiór można uporządkować: tego rodzaju twierdzenie można przyjąć jako aksjomat teorii mnogości. Jednakże gdy rozważamy zbiór wyposażony w strukturę algebraiczną, to uporządkowanie nie musi być zgodne z taką strukturą. Przykładowo, dla ciała liczb zespolonych nie istnieje porządek taki, że

(A): $x < y$ *pociąga* $x + z < y + z$.

(B): $x > 0$ *oraz* $z < y$ *implikują* $xz < xy$.

Dla uzasadnienia tego wystarczy wykluczyć możliwość uporządkowania 0, 1 oraz liczby będącej rozwiązaniem równania $x^2 + 1 = 0$.

W XIX wieku powstały równoważne teorie liczb rzeczywistych, które godziły postulaty natury algebraicznej z porządkiem. Motywacje tych teorii to połączenie kryteriów estetyczno-dydaktycznych z postulatami wynikającymi z zapotrzebowania w naukach przyrodniczych: w czym dominującą rolę grały klasyczne działy fizyki - np. mechanika klasyczna. Opiszmy jeden ze sposobów wprowadzania liczb rzeczywistych pochodzący od R. Dedekinda.

Rozszerzamy zbiór liczb naturalnych do ciała. Elementy najmniejszego - z dokładnością do izomorfizmu, ciała zawierającego wszystkie liczby naturalne nazywamy *liczbami wymiernymi.* Wśród liczb wymiernych wyróżniamy liczby wymierne dodatnie: są to liczby wymierne należące do najmniejszego - w sensie inkluzji, podzbioru liczb wymiernych, który zawiera wszystkie liczby naturalne różne od zera i ich odwrotności oraz jest zamknięty ze względu na dodawanie bądź mnożenie. Następnie przedłużamy relację uporządkowania liczb naturalnych tak, aby: $x < y$ było równoważne przynależności różnicy $y - x$ do liczb wymiernych dodatnich. Oznaczamy zbiór wszystkich liczb wymiernych przez Q. Podzbiór $Y \subset Q$ nazywamy liczbą rzeczywistą gdy

(I): *$x \in Q$, $x < y$ oraz $y \in Y$ implikują $x \in Y$.*

(II): *Zbiór Y jest niepusty oraz różny od zbioru Q.*

(III): *Wśród liczb wymiernych należących do Y nie ma liczby największej.*

Inkluzja obcięta do produktu kartezjańskiego zbioru wszystkich liczb rzeczywistych jest porządkiem. Jeśli A oraz B są liczbami rzeczywistymi, to sumę $A + B$ określamy jako zbiór

$$\{a + b : a \in A \text{ oraz } b \in B\}.$$

Iloczyn AB określamy zależnie od przypadków. Gdy $0 \in A$, to kładziemy

$$AB = \{ab : a > 0, a \in A \text{ oraz } b \in B\}.$$

Gdy $A = \{x \in Q : x < 0\}$, to kładziemy $AB = A$. Gdy 0 nie należy do A i A jest różne od $-A$ - to korzystamy z tego, że 0 należy do $-A$ i kładziemy $AB = -[(-A)B]$.

Czytelnikowi pozostawiamy - jako ćwiczenia w posługiwaniu się językiem teorii mnogości, uzasadnienie, że liczby rzeczywiste określone jak wyżej spełniają wszystkie własności jakie od liczb rzeczywistych są wymagane w podręcznikach akademickich poświęconych analizie matematycznej. Proponujemy zacząć od tego, że rodzina

$$\{\{x \in Q : x < y\} : y \in Q\}$$

jest izomorficzna z ciałem liczb wymiernych Q. Następnie pokazać, że zbiór liczb rzeczywistych jest ciałem z relacją uporządkowania, która jest spójna oraz spełnia warunki (A) i (B).

Konstrukcja liczb rzeczywistych metodą R. Dedekinda natychmiastowo daje ciągłość zbioru wszystkich liczb rzeczywistych - tzn. dowolny ograniczony i monotoniczny ciąg liczb rzeczywistych jest zbieżny: granica ciągu rosnącego to suma mnogościowa jego elementów, zaś granica ciągu malejącego to przekrój jego elementów; czasami przekrój minus jedna liczba wymierna z powodu (III). Sytuacja ta pozwala zwrócić uwagę na zależność struktury zbioru wszystkich liczb rzeczywistych od dopuszczonych metod konstruowania zbiorów inaczej mówiąc: struktura zbioru wszystkich liczb rzeczywistych istotnie zależy od dopuszczonych metod tworzenia podzbiorów zbioru przeliczalnego. W latach sześćdziesiątych obecnego wieku zauważono, że w sposób nieograniczony można powiększać ilość dopuszczalnych metod konstruowania nowych podzbiorów zbioru przeliczalnego. Na spostrzeżeniu tym zbudowano teorię tzw. forcingu zapoczątkowaną pracami P. Cohena.

Zasada ciągłości zbioru wszystkich liczb rzeczywistych przyjmowana jako aksjomat - w istocie rzeczy wprowadza elementy subiektywne do teorii fizycznych, w których struktura linii może mieć znaczenie. Przytaczamy dylemat z fizyki cząstek elementarnych: *Dlaczego cząstki elementarne, poruszając się po linii nie czynią tego punkt po punkcie, których istnienie odpowiada stosownemu dla nich układowi dopuszczalnych metod konstruowania podzbiorów zbioru przeliczalnego?* Gdyby okazało się, że różne cząstki dopuszczają różne metody konstruowania podzbiorów zbioru przeliczalnego, to teoria liczb rzeczywistych stosowana do tych cząstek mogłaby wykluczać możność porównania każdej pary liczb w sensie uporządkowania: relacja uporządkowania nie musiałaby być spójna. Wtedy o liczbach rzeczywistych wystarczyłoby zakładać, że tworzą ciało, na którym określona jest relacja porządku spełniająca warunki (A) i (B): - być może z jakimiś wyjątkami? O strukturze topologicznej zbioru wszystkich liczb rzeczywistych zakładalibyśmy jedynie to, że topologie wyznaczane przez produkty kartezjańskie różnej ilości przedziałów otwartych nie są homeomorficzne: wymiar algebraiczny przestrzeni euklidesowej byłyby własnością topologiczną.

Jako środki do dowodzenia twierdzeń - będziemy wykorzystywali własności liczb porządkowych. Precyzyjne określenie liczb porządkowych jest fragmentem teorii zbiorów - i dlatego pomijamy je. Liczby porządkowe będziemy oznaczali zgodnie z definicją J. von Neumanna: relacja należenia wyznacza uporządkowanie klasy wszystkich liczb porządkowych w taki sposób, że dla dowolnej liczby porządkowej α zachodzi
$$\alpha = \{\beta : \beta < \alpha\} = \{\beta : \beta \in \alpha\}.$$
Będziemy wykorzystywali następujące własności liczb porządkowych.

Zasada dobrego uporządkowania liczb porządkowych: *Do dowolnej klasy złożonej z liczb porządkowych należy liczba porządkowa najmniejsza wśród liczb porządkowych należących do tej klasy.*

Indukcja zupełna: *Niech U będzie rodziną, której elementy ponumerowano* *kolejnymi liczbami porządkowymi, tzn.* $U = \{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$. *Jeśli zachodzi zdanie* $\phi(X_0)$ *oraz z założenia prawdziwości zdań* $\phi(X_\beta)$ *dla* $\beta < \alpha$ *wynika prawdziwość zdania* $\phi(X_\alpha)$, *to zdanie* $\phi(X)$ *jest prawdziwe dla dowonego elementu* X *należącego do rodziny* U.

Powyższe własności będziemy stosowali łącznie z aksjomatem bądź twierdzeniem - równoważnym pewnikowi wyboru, mówiącym: *Elementy dowolnego zbioru można ponumerować kolejnymi liczbami porządkowymi.*

Wśród liczb porządkowych wyróżniamy liczby kardynalne: liczba porządkowa jest liczbą kardynalną gdy nie jest równoliczna z liczbą porządkową mniejszą. Najmniejszą nieskończoną liczbę kardynalną będziemy oznaczali przez ω_0, najmniejszą nieprzeliczalną liczbę kardynalną będziemy oznaczali przez ω_1, zaś liczbę kardynalną równoliczną ze zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych - przez $\mathbf{c}$.

Klasa wszystkich liczb porządkowych zawiera liczby naturalne: skończone liczby kardynalne to liczby naturalne. Zbiór wszystkich liczb naturalnych jest symbolizowany przez ω_0. Za przedłużenie operacji dodawania można uznać oznaczenie $\alpha+1$ dla najmniejszej liczby porządkowej większej od α. Gdy α oraz β są nieskończonymi liczbami kardynalnymi, to iloczyn $\alpha\beta$ definiujemy jako kres górny liczb α i β inaczej: jako najmniejszą liczbę porządkową niemniejszą od α i β - lub jeszcze inaczej: jako liczbę kardynalną równoliczną z produktem kartezjańskim $\alpha \times \beta$. Zauważmy, że skoro liczba kardynalna jest także liczbą porządkową, to równoważność powyższych definicji iloczynu $\alpha\beta$ nie wymaga - pewnika wyboru.