11. Wykład 11: Funktory i transformacja naturalna funktorów

Definicja 11.1. *Niech $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ będą kategriami.* Funktorem kowariantnym $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *nazywamy parę odwzorowań* (F_1, F_2), $F_1 : Ob(\mathcal{C}) \to Ob(\mathcal{D})$, $F_2 : Ar(\mathcal{C}) \to Ar(\mathcal{D})$ *takich, że*

(1) *dla* $A \in Ob(\mathcal{C})$ *i dla* $B = F_1(A) \in Ob(\mathcal{D})$

$$F_2(1_A) = 1_B;$$

(2) *dla* $A \xrightarrow{f} B$, $A, B \in Ob(\mathcal{C})$

$$F_1(A) \xrightarrow{F_2(f)} F_1(B);$$

(3) *dla* $B \xrightarrow{f} C$, $A \xrightarrow{g} B$, $A, B, C \in Ob(\mathcal{C})$:

$$F_2(f \circ g) = F_2(f) \circ F_1(g)$$

Definicja 11.2. *Niech $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ będą kategoriami.* Funktorem kontrawariantnym $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *nazywamy parę odwzorowań* (F_1, F_2), $F_1 : Ob(\mathcal{C}) \to Ob(\mathcal{D})$, $F_2 : Ar(\mathcal{C}) \to Ar(\mathcal{D})$ *takich, że*

(1) *dla* $A \in Ob(\mathcal{C})$ *i dla* $B = F_1(A) \in Ob(\mathcal{D})$

$$F_2(1_A) = 1_B;$$

(2) *dla* $A \xrightarrow{f} B$, $A, B \in Ob(\mathcal{C})$

$$F_1(B) \xrightarrow{F_2(f)} F_1(A);$$

(3) *dla* $B \xrightarrow{f} C$, $A \xrightarrow{g} B$, $A, B, C \in Ob(\mathcal{C})$:

$$F_2(f \circ g) = F_2(g) \circ F_1(f)$$

Na ogół zamiast rozróżniać odwzorowania F_1, F_2 będziemy po prostu pisać F na oznaczenie każdego z nich.

Przykłady:

(1) Dla dowolnej kategorii $\mathcal{C}$ przyporządkowanie $I_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ dane przez:

$$I_{\mathcal{C}}(A) = A, A \in Ob(\mathcal{C}) \text{ oraz } I_{\mathcal{C}}(f) = f, f \in Ar(\mathcal{C})$$

jest funktorem kowariantnym, który będziemy nazywać **funktorem identycznościowym**.

(2) Odwzorowanie $F : \mathcal{G}rp \to \mathcal{S}et$ dane przez:

$$F(A) = A, A \in Ob(\mathcal{G}rp) \text{ oraz } F(f) = f, f \in Ar(\mathcal{G}rp)$$

jest funktorem kowariantnym, który będziemy nazywać **funktorem zapominania**. Podobnie możemy zdefiniować funktory zapominania $\mathcal{R}ng \to \mathcal{S}et$, $R - \mathcal{M}od \to \mathcal{S}et$, $\mathcal{T}op \to \mathcal{S}et$ lub, na przykład, $\mathcal{R}ng \to \mathcal{G}rp$.

(3) Przyporządkowanie $F : \mathcal{S}et \to \mathcal{A}b$ dane przez:

$$F(X) = \text{ wolna grupa abelowa o bazie } X, X \in Ob(\mathcal{S}et)$$

oraz

$$F(f) = \text{ jednoznacznie wyznaczone rozszerzenie } f \text{ do } \bar{f} : F(X_1) \to F(X_2), f \in Hom(X_1, X_2)$$

jest funktorem kowariantnym tworzącym obiekty wolne. Podobnie możemy zdefinować funktory tworzące obiekty wolne $\mathcal{S}et \to \mathcal{G}rp$ lub $\mathcal{S}et \to R - \mathcal{M}od$.

(4) Dla dowolnej kategorii $\mathcal{C}$ oraz $A \in Ob(\mathcal{C})$ przyporządkowanie $h_A : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ dane przez:

$$h_A(C) = Hom(A, C), C \in Ob(\mathcal{C})$$

oraz

$$h_A(f) = \bar{f}, f \in Ar(\mathcal{C}),$$

gdzie $C \xrightarrow{f} C'$ oraz $\bar{f} : Hom(A, C) \to Hom(A, C')$ jest dane wzorem

$$\bar{f}(\phi) = f \circ \phi$$

jest funktorem kowariantnym, który będziemy nazywać **kowariantnym funktorem hom**.

(5) Dla dowolnej kategorii $\mathcal{C}$ oraz $A \in Ob(\mathcal{C})$ przyporządkowanie $h_A : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ dane przez:

$$h_A(C) = Hom(C, A), C \in Ob(\mathcal{C})$$

oraz

$$h_A(f) = \bar{f}, f \in Ar(\mathcal{C}),$$

gdzie $C \xrightarrow{f} C'$ oraz $\bar{f} : Hom(C', A) \to Hom(C, A)$ jest dane wzorem

$$\bar{f}(\psi) = \psi \circ f$$

jest funktorem kontrawariantnym, który będziemy nazywać **kontrawariantnym funktorem hom**.

(6) Dla dowolnej kategorii $\mathcal{C}$ oznaczmy przez $\mathcal{C}^{op}$ **kategorię odwrotną** zdefiniowaną następująco: $Ob(\mathcal{C}^{op}) = Ob(\mathcal{C})$ oraz, dla $A, B \in Ob(\mathcal{C}^{op})$:

$$Hom_{\mathcal{C}^{op}}(A, B) = Hom_{\mathcal{C}}(B, A),$$

i

$$f^{op} \circ g^{op} = (g \circ f)^{op}.$$

Na przykład, jeśli $\mathcal{C}$ jest następującą kategorią:

$$A \to B \to C \to D$$

to wówczas $\mathcal{C}^{op}$ jest następującej postaci:

$$A \leftarrow B \leftarrow C \leftarrow D.$$

Jeśli $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ jest funktorem kontrawariantnym, to $\bar{F} : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$ zdefiniowane przez

$$\bar{F}(A) = F(A), A \in Ob(\mathcal{C}), \text{ oraz } \bar{F}(f^{op}) = F(f), f \in Ar(\mathcal{C}^{op}),$$

jest funktorem kowariantnym.

(7) Przyporządkowanie $F : R - \mathcal{M}od \to R - \mathcal{M}od$ dane przez:

$$F(A) = Hom(A, R), A \in Ob(R - \mathcal{M}od) \text{ oraz } F(f) = f^*, f \in Ar(R - \mathcal{M}od),$$

gdzie $A \xrightarrow{f} A'$ oraz $f^* : Hom(A, R) \to Hom(A', R)$ jest dane wzorem

$$f^*(\phi) = \phi \circ f$$

jest funktorem kontrawariantnym, który jest specjalnym przypadkiem kontrawariantnego funktora hom. Oznaczamy go przez $\,^*$ i nazywamy **funktorem dualizacji**. W szczególności, gdy $R = F$ jest ciałem, a $R - \mathcal{M}od$ staje się kategorią przestrzeni wektorowych nad ciałem F, otrzymujemy w ten sposób konstrukcję przestrzeni sprzężonej do danej przestrzeni wektorowej.

(8) Przyporządkowanie $^{**} : R - \mathcal{M}od \to R - \mathcal{M}od$ dane przez:

$$A^{**} = (A^*)^*, A \in Ob(R - \mathcal{M}od) \text{ oraz } f^{**} = (f^*)^*, f \in Ar(R - \mathcal{M}od),$$

jest funktorem kowariantnym zwanym **funktorem podwójnej dualizacji** (albo **bidualizacji**).

Definicja 11.3. *Niech $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ będą kategoriami, niech $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ będą funktorami kowariantnymi.* Transformacją naturalną *α pomiędzy F i G nazywamy klasę morfizmów $\alpha_A : F(A) \to G(A)$, $A \in Ob(\mathcal{C})$ taką, że dla każdego $A \xrightarrow{f} B$, $A, B \in Ob(\mathcal{C})$*

$$G(f) \circ \alpha_A = \alpha_B \circ F(f).$$

Innymi słowy taką, że następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\alpha_A"'] & F(B) \arrow[d, "\alpha_B"] \\
G(A) \arrow[r, "G(f)"'] & G(B)
\end{tikzcd}$$

Jeżeli wszystkie α_A są izomorfizmami, to mówimy, że α jest naturalną równoważnością.

Definicja 11.4. *Niech $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ będą kategoriami, niech $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ będą funktorami kontrawariantnymi.* Transformacją naturalną *α pomiędzy F i G nazywamy klasę morfizmów $\alpha_A : F(A) \to G(A)$, $A \in Ob(\mathcal{C})$ taką, że dla każdego $A \xrightarrow{f} B$, $A, B \in Ob(\mathcal{C})$*

$$F(f) \circ \alpha_A = \alpha_B \circ G(f).$$

Innymi słowy taką, że następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "F(f)"] & F(B) \\
G(A) \arrow[r, "G(f)"'] \arrow[u, "\alpha_A"'] & G(B) \arrow[u, "\alpha_B"]
\end{tikzcd}$$

Jeżeli wszystkie α_A są izomorfizmami, to mówimy że α jest naturalną równoważnością.

Przykłady:

(9) Dla dowolnej kategorii $\mathcal{C}$ i dowolnego funktora $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ przyporządkowanie $I(A) = I_A$, $A \in Ob(\mathcal{C})$, gdzie $I_A : F(A) \to F(A)$ jest dane przez

$$I_A = 1_{F(A)}$$

jest naturalną równoważnością pomiędzy F oraz F zwaną **naturalną równoważnością identycznościową.**

(10) Dla kategorii $R - \mathcal{M}od$ rozważmy funktor identycznościowy $I_{R-\mathcal{M}od} : R - \mathcal{M}od \to R - \mathcal{M}od$ dany przez

$$I_{R-\mathcal{M}od}(A) = A, A \in Ob(R - \mathcal{M}od) \text{ oraz } I_{R-\mathcal{M}od}(f) = f, A \xrightarrow{f} A'$$

i funktor podwójnej dualizacji $^{**} : R - \mathcal{M}od \to R - \mathcal{M}od$ dany przez

$$A^{**} = (A^*)^* = Hom(Hom(A, R), R), A \in Ob(R - \mathcal{M}od)$$

oraz

$$f^{**} = (f^*)^*, A \xrightarrow{f} A'$$

gdzie $f^{**} : A^{**} \to A'^{**}$ jest dane przez

$$f^{**}(\Psi) = \Psi \circ f^*, Hom(A, R) = A^* \xrightarrow{\Psi} R$$

oraz $f^* : A'^* \to A^*$ jest dane przez

$$f^*(\psi) = \psi \circ f, A' \xrightarrow{\psi} R.$$

Przyporządkowanie $\theta(A) = \theta_A$, $A \in R - \mathcal{M}od$, gdzie $\theta_A : A \to A^{**}$ jest dane przez

$$\theta_A(a) = a^*$$

gdzie $a^* : Hom(A, R) = A^* \to R$ jest dane przez

$$a^*(\psi) = \psi(a), A \xrightarrow{\psi} R$$

jest transformacją naturalną pomiędzy $I_{R-\mathcal{M}od}$ i **. Jeżeli $R = F$ jest ciałem, zaś $R - \mathcal{M}od$ zastąpimy kategorią skończeniewymiarowych przestrzeni wektorowych nad ciałem F, to θ jest naturalną równoważnością (co odpowiada temu, że przestrzenie wektorowe V oraz V^{**} są izomorficzne, zaś dla danej bazy $v_1, \ldots, v_n$ przestrzeni V, $v_1^*, \ldots, v_n^*$ jest bazą przestrzeni V^{**}).

Homomorfizm będziemy nazywać **naturalnym** jeżeli istnieją dwa w miarę oczywiste funktory dla których dany homomorfizm wyznacza transformację naturalną.

(11) Dla lewych R-modułów A, B, C rozważmy homomorfizm grup abelowych $\phi : Hom(A \oplus B, C) \to Hom(A, C) \oplus Hom(B, C)$ dany przez

$$\phi(f) = (f_1, f_2,)$$

gdzie $f_1 : A \to C$ jest dane przez

$$f_1(a) = f(a, 0)$$

oraz $f_2 : B \to C$ jest dane przez

$$f_2(b) = f(0, b).$$

Wówczas ϕ jest **naturalny względem** B w następującym sensie: ustalmy dwa moduły A i C, zapiszmy ϕ_B zamiast ϕ i rozważmy następujący diagram przemienny:

$$\begin{tikzcd}
Hom(A \oplus B, C) \arrow[r, "\phi_B"] & Hom(A, C) \oplus Hom(B, C) \\
Hom(A \oplus B', C) \arrow[r, "\phi'_B"'] \arrow[u, "Hom(1_A \oplus f, 1_C)"] & Hom(A, C) \oplus Hom(B', C) \arrow[u, "Hom(1_A, 1_C) \oplus Hom(f, 1_C)"']
\end{tikzcd}$$

gdzie $1_A \oplus f : A \oplus B \to A \oplus B'$ jest dane przez

$$1_A \oplus f(a, b) = (a, f(b)),$$

oraz $Hom(1_A \oplus f, 1_C) : Hom(A \oplus B', C) \to Hom(A \oplus B, C)$ jest dane przez

$$Hom(1_A \oplus f, 1_C)(\alpha) = \alpha \circ 1_A \oplus f,$$

tzn. tak, że następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{tikzcd}
A \oplus B \arrow[rr, "Hom(1_A \oplus f, 1_C)(\alpha)"] \arrow[d, "1_A \oplus f"'] & & C \arrow[d, "1_C"] \\
A \oplus B' \arrow[rr, "\alpha"'] & & C,
\end{tikzcd}$$

podczas gdy $Hom(1_A, 1_C) \oplus Hom(f, 1_C) : Hom(A, C) \oplus Hom(B', C) \to Hom(A, C) \oplus Hom(B, C)$ jest dane przez

$$Hom(1_A, 1_C) \oplus Hom(f, 1_C)(\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2 \circ f)$$

tzn. tak, że następujące diagramy są przemienne:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "1_A"'] & C \arrow[d, "1_C"] \\
A \arrow[r, "\alpha_1"'] & C,
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[d, "1_C"] \\
B' \arrow[r] & C,
\end{tikzcd}$$

W ten sposób wyznaczamy naturalną równoważność pomiędzy funktorami

$$B \mapsto Hom(A \oplus B, C), f \mapsto Hom(1_A \oplus f, 1_C)$$

oraz

$$B \mapsto Hom(A, C) \oplus Hom(B, C), f \mapsto Hom(1_A, 1_C) \oplus Hom(f, 1_C).$$

W podoby sposób sprawdzamy, że ϕ jest naturalny względem A oraz C.