

Funktory reprezentowalne

Definicja: Niech \mathcal{C} będzie kategorią, niech $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ będzie funktorem kowariantnym. T nazywamy *funktorem reprezentowalnym* jeżeli dla pewnego obiektu A w \mathcal{C} istnieje naturalna równoważność α pomiędzy funktorem kowariantnym $h_A = \text{hom}_{\mathcal{C}}(A, \cdot)$ a funktorem T . Para (A, α) jest nazywana *reprezentacją* T , zaś o T mówimy, że jest reprezentowany przez obiekt A .

Niech \mathcal{C} będzie kategorią, niech $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}et$ będzie funktorem kontrawariantnym. T nazywamy *funktorem reprezentowalnym* jeżeli dla pewnego obiektu B w \mathcal{C} istnieje naturalna równoważność β pomiędzy funktorem kontrawariantnym $h^B = hom_{\mathcal{C}}(\cdot, B)$ a funktorem T . Para (B, α) jest nazywana *reprezentacją T* , zaś o T mówimy, że jest reprezentowany przez obiekt B .

Definicja:

Niech \mathcal{C} będzie kategorią, niech $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{Set}$ będzie funktorem kowariantnym. Zdefiniujemy kategorię \mathcal{C}_T następująco:

Obiekty pary (C, s) , gdzie $C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, $s \in T(C)$;

Morfizmy $(C, s) \xrightarrow{f} (D, t)$ jest morfizmem $C \xrightarrow{f} D$ takim, że

$$T(f)(s) = t \in T(D).$$

Obiekt początkowy w kategorii \mathcal{C}_T nazywamy *elementem początkowym* funktora T .

Nech \mathcal{C} będzie kategorią, niech $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}et$ będzie funktorem kontrawariantnym. Zdefiniujmy kategorię \mathcal{C}^T następująco:

Obiekty pary (C, s) , gdzie $C \in Ob(\mathcal{C})$, $s \in T(C)$;

Morfizmy $(C, s) \xrightarrow{f} (D, t)$ jest morfizmem $C \xrightarrow{f} D$ takim, że

$$T(f)(t) = s \in T(C).$$

Obiekt końcowy w kategorii \mathcal{C}^T nazywamy *elementem końcowym* funktora T .

Lemat

Niech \mathcal{C} będzie kategorią, niech $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ będzie funktorem kowariantnym, niech $A \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$.

1. Jeśli $\alpha : h_A \rightarrow T$ jest transformacją naturalną pomiędzy h_A oraz T i $u = \alpha_A(1_A) \in T(A)$, to, dla dowolnego obiektu $C \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ oraz $g \in \mathbf{hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$

$$\alpha_C(g) = T(g)(u).$$

2. Jeśli $u \in T(A)$ i dla każdego obiektu $C \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ odwzorowanie $\beta_C : \mathbf{hom}_{\mathcal{C}}(A, C) \rightarrow T(C)$ zdefiniowane jest wzorem $g \mapsto T(g)(u)$, to $\beta : h_A \rightarrow T$ jest naturalną transformacją taką, że $\beta_A(1_A) = u$.

Twierdzenie

Niech \mathcal{C} będzie kategorią, niech $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ będzie funktorem kowariantnym. Wówczas istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy klasą X wszystkich reprezentacji funktora T i klasą Y wszystkich elementów początkowych funktora T dana wzorem

$$(A, \alpha) \mapsto (A, \alpha_A(1_A)).$$

Wniosek

Niech \mathcal{C} będzie kategorią, niech $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ będzie funktorem kowariantnym. Jeśli (A, α) oraz (B, β) są reprezentacjami funktora T , to wówczas istnieje jednoznacznie wyznaczony morfizm $f : A \rightarrow B$ taki, że następujący diagram jest przemienny dla dowolnych $C \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$:

$$\begin{array}{ccc} h_B(C) = \mathit{hom}_{\mathcal{C}}(B, C) & & \\ \downarrow \mathit{hom}(f, 1_C) & \searrow \beta_C & \\ & & T(C) \\ & \nearrow \alpha_C & \\ h_A(C) = \mathit{hom}_{\mathcal{C}}(A, C) & & \end{array}$$

Wniosek (lemat Yonedy)

Niech \mathcal{C} będzie kategorią, niech $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ będzie funktorem kowariantnym, niech $A \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$. Wówczas istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy zbiorem $T(A)$ i zbiorem $\mathbf{Nat}(h_A, T)$ wszystkich transformacji naturalnych pomiędzy kowariantnym funktorem h_A a funktorem T . Bijekcja ta jest naturalna w A oraz T .