

10. WYKŁAD 10: KATEGORIE: EKWALIZATORY, JĄDRA, OBRAZY

Definicja 10.1. Niech \mathcal{C} będzie kategorią. Obiekt I kategorii \mathcal{C} nazywamy **obiektem początkowym** (lub **uniwersalnym**), jeżeli dla każdego obiektu C kategorii \mathcal{C} istnieje dokładnie jeden morfizm $I \xrightarrow{i} C$.

Obiekt T kategorii \mathcal{C} nazywamy **obiektem końcowym** (lub **kouniwersalnym**), jeżeli dla każdego obiektu C kategorii \mathcal{C} istnieje dokładnie jeden morfizm $C \xrightarrow{t} T$.

Obiekt Z kategorii \mathcal{C} nazywamy **obiektem zerowym**, jeżeli jest równocześnie obiektem początkowym i końcowym.

Przykłady:

(31) Rozważmy kategorię \mathcal{Grp} . Obiektem początkowym i jednocześnie końcowym jest grupa trywialna $\{1\}$.

(32) Rozważmy kategorię \mathcal{Ab} . Obiektem początkowym i jednocześnie końcowym jest grupa trywialna $\{1\}$.

(33) Rozważmy kategorię $\mathcal{R} - \mathcal{Mod}$. Obiektem początkowym i jednocześnie końcowym jest moduł trywialny $\{0\}$.

Uwaga 10.1. Niech \mathcal{C} będzie kategorią, niech $\{A_i : i \in I\}$ będzie rodziną obiektów kategorii \mathcal{C} . Niech \mathcal{D} będzie kategorią, której obiektami są pary $(B, \{f_i : i \in I\})$, gdzie $B \xrightarrow{f_i} A_i$ są morfizmami w kategorii \mathcal{C} , $i \in I$, zaś morfizmy z klasy $\text{Hom}((B, \{f_i : i \in I\}), (C, \{g_i : i \in I\}))$ zdefiniowane są jako morfizmy $B \xrightarrow{h} C$ z kategorii \mathcal{C} takie, że

$$g_i \circ h = f_i.$$

Wówczas produkt $\prod_{i \in I} A_i$ istnieje w kategorii \mathcal{C} wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje obiekt końcowy $(\prod_{i \in I} A_i, \{\pi_i : i \in I\})$ w kategorii \mathcal{D} .

Prosty dowód powyższej uwagi pozostawiamy jako ćwiczenie Czytelnikowi.

Uwaga 10.2. Niech \mathcal{C} będzie kategorią, niech $\{A_i : i \in I\}$ będzie rodziną obiektów kategorii \mathcal{C} . Niech \mathcal{D} będzie kategorią, której obiektami są pary $(B, \{f_i : i \in I\})$, gdzie $A_i \xrightarrow{f_i} B$ są morfizmami w kategorii \mathcal{C} , $i \in I$, zaś morfizmy z klasy $\text{Hom}((B, \{f_i : i \in I\}), (C, \{g_i : i \in I\}))$ zdefiniowane są jako morfizmy $B \xrightarrow{h} C$ z kategorii \mathcal{C} takie, że

$$h \circ f_i = g_i.$$

Wówczas koproduct $\coprod_{i \in I} A_i$ istnieje w kategorii \mathcal{C} wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje obiekt początkowy $(\coprod_{i \in I} A_i, \{\iota_i : i \in I\})$ w kategorii \mathcal{D} .

Prosty dowód powyższej uwagi pozostawiamy jako ćwiczenie Czytelnikowi.

Uwaga 10.3. Niech \mathcal{C} będzie kategorią konkretną, niech F będzie obiektem kategorii \mathcal{C} , niech X będzie niepustym zbiorem, niech $f : X \rightarrow F$ będzie odwzorowaniem zbiorów. Niech \mathcal{D} będzie kategorią, której obiektami są pary (B, g) , gdzie $g : X \rightarrow B$ są funkcjami między zbiorami, zaś morfizmy z klasy $\text{Hom}((B, g), (C, h))$ zdefiniowane są jako morfizmy $B \xrightarrow{\phi} C$ z kategorii \mathcal{C} takie, że

$$\phi \circ g = h.$$

Wówczas F jest obiektem wolnym w kategorii \mathcal{C} wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje obiekt początkowy (F, f) w kategorii \mathcal{D} .

Prosty dowód powyższej uwagi pozostawiamy jako ćwiczenie Czytelnikowi.

Uwaga 10.4. Niech \mathcal{C} będzie kategorią, niech $C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, niech 0 będzie obiektem zerowym. Wówczas:

- (1) jednoznacznie wyznaczony morfizm $0 \rightarrow C$ jest monomorfizmem kategorijskim;
- (2) jednoznacznie wyznaczony morfizm $C \rightarrow 0$ jest epimorfizmem kategorijskim.

Prosty dowód powyższej uwagi pozostawiamy jako ćwiczenie Czytelnikowi.

Definicja i uwaga 10.1. Niech \mathcal{C} będzie kategorią, niech 0 będzie obiektem zerowym. Wówczas dla każdej pary obiektów $C, D \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ istnieje dokładnie jeden morfizm $C \xrightarrow{0_{C,D}} D$ taki, że

$$f \circ 0_{C,D} = 0_{C,E} \text{ oraz } 0_{C,D} \circ g = 0_{B,D},$$

dla dowolnych morfizmów $h \in \text{Hom}(D, E)$ oraz $g \in \text{Hom}(B, C)$. Morfizm $0_{C,D}$ nazywamy **morfizmem zerowym**.

Prosty dowód powyższej uwagi pozostawiamy jako ćwiczenie Czytelnikowi.

Definicja 10.2. Niech \mathcal{C} będzie kategorią, niech $C, D \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, niech $C \xrightarrow[f]{g} D$ będą morfizmami. **Ekwalizatorem** (lub **jądrem różnicy**) pary f, g nazywamy parę (E, e) złożoną z obiektu E i morfizmu $E \xrightarrow{e} C$ takich, że

- (1) $f \circ e = g \circ e$;
- (2) jeśli A jest dowolnym obiektem, a $A \xrightarrow{h} C$ jest morfizmem takim, że

$$f \circ h = g \circ h,$$

to wówczas istnieje dokładnie jeden morfizm $A \xrightarrow{\bar{h}} E$ taki, że

$$e \circ \bar{h} = h.$$

Innymi słowy diagram

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{e} & C \xrightarrow[f]{g} D \\ \bar{h} \uparrow & \nearrow h & \\ A & & \end{array}$$

jest przemienny.

Koekwalizatorem (lub **kojądrem różnicy**) pary f, g nazywamy parę (Q, q) złożoną z obiektu E i morfizmu $D \xrightarrow{q} Q$ takich, że

- (1) $q \circ f = q \circ g$;
- (2) jeśli F jest dowolnym obiektem, a $D \xrightarrow{k} F$ jest morfizmem takim, że

$$k \circ f = k \circ g,$$

to wówczas istnieje dokładnie jeden morfizm $Q \xrightarrow{\bar{k}} F$ taki, że

$$\bar{k} \circ q = k.$$

Innymi słowy diagram

$$\begin{array}{ccc} C \xrightarrow[f]{g} D & \xrightarrow{q} & Q \\ & \searrow k & \downarrow \bar{k} \\ & & F \end{array}$$

jest przemienny.

Przykłady:

(37) Rozważmy kategorię $\mathcal{S}et$. Niech $C, D \in Ob(\mathcal{S}et)$, niech $C \xrightarrow[f]{g} D$ będą morfizmami. Zdefiniujemy

$$E = \{c \in C : f(c) = g(c)\}$$

oraz $E \xrightarrow{e} C$ niech będzie inkluzją. Wówczas (E, e) jest ekwalizatorem pary f, g .

(38) Rozważmy kategorię $\mathcal{G}rp$. Niech $C, D \in Ob(\mathcal{G}rp)$, niech $C \xrightarrow[f]{g} D$ będą morfizmami. Zdefiniujemy

$$E = \{c \in C : f(c) = g(c)\}$$

oraz $E \xrightarrow{e} C$ niech będzie inkluzją. Wówczas (E, e) jest ekwalizatorem pary f, g .

(39) Rozważmy kategorię $\mathcal{R}ng$. Niech $C, D \in Ob(\mathcal{R}ng)$, niech $C \xrightarrow[f]{g} D$ będą morfizmami. Zdefiniujemy

$$E = \{c \in C : f(c) = g(c)\}$$

oraz $E \xrightarrow{e} C$ niech będzie inkluzją. Wówczas (E, e) jest ekwalizatorem pary f, g .

(40) Rozważmy kategorię $R - \mathcal{M}od$. Niech $C, D \in Ob(R - \mathcal{M}od)$, niech $C \xrightarrow[f]{g} D$ będą morfizmami.

Zdefiniujemy

$$E = \{c \in C : f(c) = g(c)\}$$

oraz $E \xrightarrow{e} C$ niech będzie inkluzją. Wówczas (E, e) jest ekwalizatorem pary f, g .

(41) Rozważmy kategorię $\mathcal{G}rp$. Niech $C, D \in Ob(\mathcal{S}et)$, niech $C \xrightarrow[f]{g} D$ będą morfizmami. Zdefiniujemy

$$Q' = \text{najmniejsza podgrupa normalna grupy } D \text{ zawierająca } \{f(c)g(c)^{-1} : c \in C\}$$

oraz $D \xrightarrow{q} D/Q' = Q$ niech będzie epimorfizmem kanonicznym. Wówczas (Q, q) jest koekwalizatorem pary f, g .

Uwaga 10.5. Niech \mathcal{C} będzie kategorią, niech $C, D \in Ob(\mathcal{C})$, niech $C \xrightarrow[f]{g} D$ będą morfizmami, niech (E, e) będzie ekwalizatorem, a (Q, q) koekwalizatorem pary f, g . Wówczas:

- (1) e jest monomorfizmem kategorijskim;
- (2) q jest epimorfizmem kategorijskim.

Prosty dowód powyższej uwagi pozostawiamy jako ćwiczenie Czytelnikowi.

Definicja 10.3. Niech \mathcal{C} będzie kategorią, niech 0 będzie obiektem zerowym, niech $C, D \in Ob(\mathcal{C})$, niech $C \xrightarrow{f} D$ będzie morfizmem. **Jądrem** morfizmu f nazywamy ekwalizator (E, e) pary $f, 0_{C,D}$. Ekwalizator (E, e) oznaczamy wówczas $(\text{Ker } f, \text{ker } f)$.

Kojądrem morfizmu f nazywamy koekwalizator (Q, q) pary $f, 0_{C,D}$. Koekwalizator (Q, q) oznaczamy wówczas $(\text{Coker } f, \text{coker } f)$.

Wniosek 10.1. Niech \mathcal{C} będzie kategorią, niech 0 będzie obiektem zerowym, niech $C, D \in Ob(\mathcal{C})$, niech $C \xrightarrow{f} D$ będzie morfizmem. Wówczas:

- (1) $\text{ker } f$ jest monomorfizmem oraz $f \circ \text{ker } f = 0_{\text{Ker } f, D}$;
- (2) $\text{coker } f$ jest epimorfizmem oraz $\text{coker } f \circ f = 0_{C, \text{Coker } f}$.

Prosty dowód powyższego wniosku pozostawiamy jako ćwiczenie Czytelnikowi.

Przykłady:

- (42) Rozważmy kategorię $\mathcal{G}rp$. Niech $C, D \in Ob(\mathcal{G}rp)$, niech $C \xrightarrow{f} D$ będzie morfizmem. Jądrem f jest para $(\text{Ker } f, \ker f)$, gdzie

$$\text{Ker } f = \{c \in C : f(c) = 0\}$$

oraz $\text{Ker } f \xrightarrow{\ker f} C$ jest inkluzją.

- (43) Rozważmy kategorię $\mathcal{G}rp$. Niech $C, D \in Ob(\mathcal{G}rp)$, niech $C \xrightarrow{f} D$ będzie morfizmem. Kojądrem f jest para $(\text{Coker } f, \text{coker } f)$, gdzie

$$\text{Coker } f = D/\text{Im } f$$

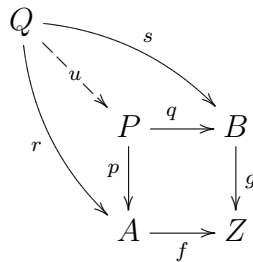
oraz $D \xrightarrow{\text{coker } f} \text{Coker } f$ jest epimorfizmem kanonicznym.

Definicja 10.4. Niech \mathcal{C} będzie kategorią, niech $A, B, Z \in Ob(\mathcal{C})$.

- (1) Niech $A \xrightarrow{f} Z$ oraz $B \xrightarrow{g} Z$ będą morfizmami. **Pulbakiem** (lub **produktem włóknistym** albo **kwadratem kartezjańskim**) pary f, g nazywamy trójkę (P, p, q) złożoną z obiektu P oraz morfizmów $P \xrightarrow{p} A$ oraz $P \xrightarrow{q} B$ takich, że:

(a) $f \circ p = g \circ q$;

- (b) dla dowolnego obiektu Q wraz z morfizmami $Q \xrightarrow{r} A$ oraz $Q \xrightarrow{s} B$ takimi, że $f \circ r = g \circ s$, istnieje dokładnie jeden morfizm $Q \xrightarrow{u} P$ taki, że $r = p \circ u$ oraz $s = q \circ u$; innymi słowy następujący diagram:

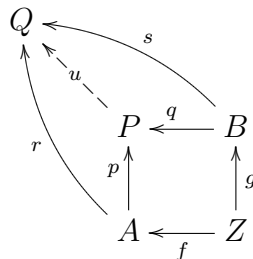


jest przemienny. Obiekt P oznaczamy przez $A \times_Z B$, o morfizmie p mówimy, że jest **pulbakiem g wzdłuż f** , a o morfizmie q , że jest **pulbakiem f wzdłuż g** .

- (2) Niech $Z \xrightarrow{f} A$ oraz $Z \xrightarrow{g} B$ będą morfizmami. **Puszautem** (lub **koproduktem włóknistym** albo **kwadratem kokartezjańskim**) pary f, g nazywamy trójkę (P, p, q) złożoną z obiektu P oraz morfizmów $A \xrightarrow{p} P$ oraz $B \xrightarrow{q} P$ takich, że:

(a) $p \circ f = q \circ g$;

- (b) dla dowolnego obiektu Q wraz z morfizmami $A \xrightarrow{r} Q$ oraz $B \xrightarrow{s} Q$ takimi, że $r \circ f = s \circ g$, istnieje dokładnie jeden morfizm $P \xrightarrow{u} Q$ taki, że $r = u \circ p$ oraz $s = u \circ q$; innymi słowy następujący diagram:



jest przemienny. Obiekt P oznaczamy przez $A \cup_Z B$, o morfizmie p mówimy, że jest **puszautem g wzdłuż f** , a o morfizmie q , że jest **puszautem f wzdłuż g** .

Uwaga 10.6. Niech \mathcal{C} będzie kategorią. Wówczas w kategorii \mathcal{C} istnieją produkty binarne i ekwalizatory wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją w niej pulbaki.

Dowód. (\Rightarrow): Załóżmy, że w kategorii \mathcal{C} istnieją produkty dwóch elementów oraz ekwalizatory. Ustalmy $A, B, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ wraz z morfizmami $A \xrightarrow{f} Z$ oraz $B \xrightarrow{g} Z$ i rozważmy produkt $A \times B$ obiektów A i B wraz z rzutowaniami kanonicznymi $A \times B \xrightarrow{\pi_1} A$ oraz $A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$. Rozważmy diagram

$$A \times B \begin{array}{c} \xrightarrow{f \circ \pi_1} \\ \xrightarrow{g \circ \pi_2} \end{array} Z.$$

Niech (P, e) będzie ekwalizatorem pary $f \circ \pi_1$ i $g \circ \pi_2$:

$$P \xrightarrow{e} A \times B \begin{array}{c} \xrightarrow{f \circ \pi_1} \\ \xrightarrow{g \circ \pi_2} \end{array} Z.$$

Wówczas $(P, \pi_1 \circ e, \pi_2 \circ e)$ jest pulbakiem pary f, g . Istotnie, oczywiście $f \circ \pi_1 \circ e = g \circ \pi_2 \circ e$. Ustalmy obiekt Q wraz z morfizmami $Q \xrightarrow{r} A$ oraz $Q \xrightarrow{s} B$ takimi, że $f \circ r = g \circ s$. Wobec własności uniwersalnej produktu istnieje dokładnie jeden morfizm $Q \xrightarrow{\phi} A \times B$ taki, że

$$\pi_1 \circ \phi = r \text{ oraz } \pi_2 \circ \phi = s.$$

Wobec własności uniwersalnej ekwalizatora istnieje dokładnie jeden morfizm $Q \xrightarrow{\bar{\phi}} P$ taki, że diagram

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{e} & A \times B \begin{array}{c} \xrightarrow{f \circ \pi_1} \\ \xrightarrow{g \circ \pi_2} \end{array} Z \\ \uparrow \bar{\phi} & \nearrow \phi & \\ Q & & \end{array}$$

jest przemienny. Wobec tego diagram

$$\begin{array}{ccccc} Q & & & & \\ & \searrow s & & & \\ & & P & \xrightarrow{\pi_2 \circ e} & B \\ & & \downarrow \pi_2 \circ e & & \downarrow g \\ & & A & \xrightarrow{f} & Z \\ & \nearrow r & & & \\ Q & & & & \end{array}$$

również jest przemienny.

(\Leftarrow): ćwiczenie. □

Uwaga 10.7. Niech \mathcal{C} będzie kategorią. Wówczas w kategorii \mathcal{C} istnieją koprodukty binarne i koekwalizatory wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją w niej puszauty.

Prosty dowód powyższej uwagi pozostawiamy jako ćwiczenie Czytelnikowi.

Przykłady:

(44) Rozważmy kategorię Set . Niech $A, B, Z \in \text{Ob}(\mathcal{G}rp)$, niech $A \xrightarrow{f} Z$ oraz $B \xrightarrow{g} Z$ będą morfizmami. Pulbakiem pary f, g jest zbiór:

$$A \times_Z B = \{(a, b) \in A \times B : f(a) = g(b)\}$$

wraz z morfizmami $A \times_Z B \xrightarrow{p} A$ i $A \times_Z B \xrightarrow{q} B$ będącymi zwężeniem kanonicznych rzutowań do zbioru $A \times_Z B$.