Zestaw zadań 2: Automorfizmy afinicznych przestrzeni ortogonalnych

(1) Wykazać, że:
(a) przekształcenie liniowe $\varphi : V \to W$ jest różnowartościowe (na) wtedy i tylko wtedy, gdy przekształcenie $\varphi^* : W^* \to V^*$ jest na (różnowartościowe);
(b) endomorfizm $\varphi \in End(V)$ niezdegenerowanej przestrzeni ortogonalnej jest różnowartościowy (na) wtedy i tylko wtedy, gdy endomorfizm sprzężony φ° jest na (różnowartościowy);
(c) $Ker\varphi^\circ = (Im\varphi)^\perp$, $Im\varphi^\circ = (Ker\varphi)^\perp$.

(2) Udowodnić nast następujący wzór na endomorfizm sprzężony: jeśli $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ jest bazą prostopadłą niezdegenerowanej przestrzeni ortogonalnej (V, ξ), to

$$\varphi^\circ(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\xi\left(\alpha, \varphi(v_i)\right)}{q\left(v_i\right)} v_i.$$

(3) Obliczyć endomorfizm sprzężony φ^* z endomorfizmem $\varphi : \mathbb{R}[X]_2 \to \mathbb{R}[X]_2$ przestrzeni wielomianów stopnia ≤ 2 określonym wzorem $\varphi(f) = X^2 f\left(\frac{1}{X}\right)$, jeśli $\xi(f,g) = f(0)g(0) + f\prime(0)g\prime(0) + f''(0)g''(0)$.

(4) Udowodnić: jeśli U jest podprzestrzenią niezmienniczą endomorfizmu samosprzężonego, to $U^\perp$ jest też podprzestrzenią niezmienniczą tego endomorfizmu.

(5) Niech A będzie symetryczną macierzą stopnia n nad ciałem F. Niech $f : F^n \to F^n$ będzie endomorfizmem o macierzy A w bazie kanonicznej, ζ - formą dwuliniową o macierzy A względem bazy kanonicznej, ξ - zwykłym iloczynem skalarnym. Wykazać, że :
(a) wektory własne endomorfizmu f należące do różnych wartości własnych są prostopadłe do siebie względem ζ i względem ξ;
(b) jeśli baza $(v_1, \ldots, v_n)$ przestrzeni F^n jest bazą prostopadłą zarówno dla ζ jak i dla ξ, to jest to baza złożona z wektorów własnych endomorfizmu f.

(6) Sprawdzić, że symetria hiperpłaszczyznowa jest przekształceniem samosprzężonym.

(7) Wykazać, że rzut prostopadły (traktowany jako endomorfizm) jest przekształceniem samosprzężonym.

(8) Znaleźć macierz ortogonalną C taką, że macierz $C^\intercal AC$ jest diagonalna, jeśli $A =$

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; **(b)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$; **(c)** $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$;

(d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; **(e)** $\begin{bmatrix} 2 & -3 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$; **(f)** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$;

(g) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; **(h)** $\begin{bmatrix} 1 + t\cos\frac{2}{t} & t\sin\frac{2}{t} \\ t\sin\frac{2}{t} & 1 - t\cos\frac{2}{t} \end{bmatrix}$.

(9) Udowodnić, że każdy automorfizm ortogonalny niezdegenerowanej przestrzeni ortogonalnej jest złożeniem samosprzężonych automorfizmów ortogonalnych.