

Zestaw 7: funkcje wykładnicza i logarytmiczna.

Zadanie 1. Rozwiązać równania:

a) $5^x - 5^{3-x} = 20$,

b) $49^x - 6 \cdot 7^x + 5 = 0$,

c) $4^{\sqrt{x-2}} + 16 = 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}}$,

d) $0,125 \cdot 4^{2x-3} = \left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$,

e) $\frac{3^{\sqrt[3]{x^2}}}{2 \cdot 3^{\sqrt[3]{x-1}}} = 1,5$.

Zadanie 2. Rozwiązać układy równań:

a)
$$\begin{cases} x - y\sqrt{x+y} = 2\sqrt{3} \\ (x+y)2^{y-x} = 3 \end{cases}$$
,

b)
$$\begin{cases} 8^{x-2} \cdot 4^{y+1} = 16 \\ 2^{2(x-1)} \cdot 8^y = 1 \end{cases}$$
,

c)
$$\begin{cases} 64^{2x} + 64^{2y} = 12 \\ 64^{x+y} = 4\sqrt{2} \end{cases}$$
,

d)
$$\begin{cases} 8^{2x+1} = 32 \cdot 2^{4y-1} \\ 5 \cdot 5^{x-y} = \sqrt{25^{2y+1}} \end{cases}$$
,

e)
$$\begin{cases} 3^y \cdot 4^x = 18 \\ 4^y \cdot 9^x = 48 \end{cases}$$
.

Zadanie 3. Rozwiązać nierówności:

a) $x^2 \cdot 2^x + x \cdot 2^{x-1} > 0$,

b) $0,5^{\frac{x+1}{x-1}} > \frac{1}{32}$,

c) $\frac{1}{2^x-1} > \frac{1}{1-2^{x-1}}$,

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^x - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1-x} \geq 1$,

e) $3^{x+\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}} > 4^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$.

Zadanie 4. Obliczyć:

a) $\log_3 \sqrt[3]{27}$,

b) $2^{\log_2 \sqrt{2}^{15}}$,

- c) $\log_9 \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}$,
 d) $2^{\log_3 5} - 5^{\log_3 2}$,
 e) $\sqrt{10^{2 + \frac{1}{2} \log 16}}$.

Zadanie 5. Rozwiązać równania:

- a) $\log(x-2) - \log(4-x) = 1 - \log(13-x)$,
 b) $\log \sqrt{x-5} + \log \sqrt{2x-3} + 1 = \log 30$,
 c) $\log(0,5+x) = \log 0,5 - \log x$,
 d) $\frac{1}{1+\log x} + \frac{5}{3-\log x} = 3$,
 e) $\log_2(9-2^x) = 3-x$.

Zadanie 6. Rozwiązać układy równań:

- a) $\begin{cases} 2 \log x - \log y = \log 9 \\ 10^{y-x} = \frac{1}{100} \end{cases}$,
 b) $\begin{cases} x^y = 9 \\ y = \log_3 x + 1 \end{cases}$,
 c) $\begin{cases} x^{\log y} = 100 \\ \log_y x = 2 \end{cases}$,
 d) $\begin{cases} xy = 400 \\ x^{\log y} = 16 \end{cases}$,
 e) $\begin{cases} xy = a^2 \\ 2(\log^2 x + \log^2 y) = 5 \log^2 a^2 \end{cases}$.

Zadanie 7. Rozwiązać nierówności:

- a) $\log^2(x-1) - 2 \log(x-1) > 0$,
 b) $\log_2(x+14) + \log_2(x+2) \geq 6$,
 c) $\frac{1}{\log_a x} > 1$, gdzie $a > 1$,
 d) $|3 - \log_2 x| < 1$,
 e) $3^{\frac{\log_1(x^2-5x+7)}{2}} < 1$.

Zadanie 8. Dla jakich wartości parametru k równanie

$$\frac{\log(kx)}{\log(x+1)} = 2$$

ma tylko jedno rozwiązanie?

Zadanie 9. Dla jakich wartości parametru m równanie

$$x^2 - 2x + \log_{0,5} m = 0$$

ma dwa różne pierwiastki?

Zadanie 10. Dla jakiej wartości parametru a równanie

$$x^2 - 2x + 1 = 2x \log a + 2 \log^2 a$$

ma dwa różne pierwiastki?