TEORIA MOCY

Zbiory X i Y nazywamy *równolicznymi*, jeśli istnieje odwzorowanie $f\colon X \xrightarrow[\text{na}]{1-1} Y$. Piszemy wówczas $X \sim Y$ lub X rl Y.

Można łatwo pokazać, że dla każdych zbiorów X, Y i Z jeśli $X \sim Y$ i $Y \sim Z$, to $X \sim Z$; jeśli $X \sim Y$, to $Y \sim X$ i w końcu $X \sim X$.

Każdemu zbiorowi przyporządkowujemy pewien obiekt zwany *liczbą kardynalną*. Liczby kardynalne oznaczamy zazwyczaj literami gotyckiego lub hebrajskiego alfabetu (ew. z indeksami). Jeśli zbiorowi X jest przyporządkowana liczba $\mathfrak{m}$, to piszemy $\overline{\overline{X}} = \mathfrak{m}$. Zbiorem równolicznym przyporządkowujemy tę samą liczbę kardynalną. Tak więc $\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}} \Leftrightarrow X \sim Y$. Liczbę kardynalną $\overline{\overline{X}}$ nazywamy *mocą zbioru* X. W przypadku, gdy X i Y są zbiorami skończonymi, $X \sim Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy ilość elementów w zbiorze X jest równa ilości elementów w zbiorze Y.

Pojęcie równoliczności traktujemy jako ścisły odpowiednik intuicyjnego pojęcia posiadania tej samej liczby elementów. W związku z tym, jeśli X jest zbiorem skończonym, to $\overline{\overline{X}}$ jest po prostu liczbą jego elementów.

Dla zbiorów nieskończonych wprowadzamy nowe liczby. I tak moc zbioru liczb naturalnych określamy liczbą kardynalną $\aleph_0$ (alef zero), moc zbioru liczb rzeczywistych oznaczamy przez $\mathfrak{c}$ (continuum).

Zbiór X jest *skończony* jeśli jest pusty lub istnieje taka liczba naturalna $k > 0$, że $X \sim \{0, \ldots, k-1\}$. Zbiór $\{0, \ldots, k-1\} = \{n\colon n < k\}$ nazywamy też *właściwym odcinkiem początkowym zbioru* $\mathcal{N}$ (por. str. 84).

Zbiory skończone lub mocy $\aleph_0$ nazywamy zbiorami *przeliczalnymi*.

Mówimy, że liczba kardynalna $\mathfrak{n}$ jest większa lub równa $\mathfrak{m}$, (co zapisujemy przez $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$), jeśli istnieją takie zbiory X i Y, że

1° $X \subset Y$

2° $\overline{\overline{X}} = \mathfrak{m}$, $\overline{\overline{Y}} = \mathfrak{n}$.

Piszemy natomiast $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$, jeśli $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$ i $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{n}$. Można pokazać, że dla dowolnych liczb kardynalnych $\mathfrak{m}$ i $\mathfrak{n}$ mamy

3° $\mathfrak{m}_1 \leqslant \mathfrak{m}_2 \wedge \mathfrak{m}_2 \leqslant \mathfrak{m}_1 \Rightarrow \mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_2$

vierdzenie Cantora-Bernsteina).

W pewnych rozważaniach dotyczących mocy, zachodzi niekiedy p
zeba korzystania z tzw. *pewnika wyboru*, który można sformułować w n
ępujący sposób·

Jeśli $A = \{A_t\}_{t \in T}$ jest rodziną zbiorów takich, że

1° $A_t \neq O$ dla dowolnego $t \in T$,

2° $A_{t_1} \cap A_{t_2} = O$ dla dowolnych $t_1, t_2 \in T$, $t_1 \neq t_2$,

3° $T \neq O$,

istnieje zbiór S taki, że $\overline{\overline{S \cap A_t}} = 1$ dla dowolnego $t \in T$

Dowieść, że następujące zbiory A i B są równoliczne (zad. 7 1-7.3)

7.1. $A = \{1, 2\}$, $B = \{5, 7\}$.

7.2. $A = \{x \in \mathcal{N} \cdot x < 7\}$, $B = \{x \in \mathcal{N}: 1 < x^2 < 70\}$.

7.3. $A = \{x \in \mathcal{R} \cdot x^2 - 2x + 1 = 0\}$, $B = \{O\}$.

7.4. Dowieść, że dla dowolnych zbiorów A, B i C mamy

a) $A \sim A$, b) $A \sim B \Rightarrow B \sim A$, c) $A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C$.

7.5. Dowieść, że jeśli A i B są zbiorami skończonymi, to $A \sim B$ wted
tylko wtedy, gdy A i B mają tę samą ilość elementów.

Dowieść, że dla dowolnych zbiorów A i B (zad. 7.6-7.9)·

7.6. Jeśli $A_1 \sim B_1$ i $A_2 \sim B_2$, to $A_1 \times A_2 \sim B_1 \times B_2$.

7 7 Jeśli $A_1 \cap A_2 = O$, $B_1 \cap B_2 = O$ oraz $A_1 \sim B_1$ i $A_2 \sim B_2$, t
$\cup A_2 \sim B_1 \cup B_2$.

7.8. Jeśli $A \sim B$ i $C \cap (A \cup B) = O$, to $A \cup C \sim B \cup C$.

7.9. Jeśli $A \sim B$, to $\mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(B)$.

Dowieść, że następujące zbiory są przeliczalne. Podać, które z nic
ają moc $\aleph_0$ (zad. 7.10-7.13):

7.10. $\{x \in \mathcal{N} \quad 10 | x\}$.

7.11. $\{x \in \mathcal{R}: \bigvee_{y \in \mathcal{N}} x = \ln y\}$.

7.12. $\{x \in \mathcal{N}: \bigvee_{y \in \mathcal{R}} x = \sin y\}$.

7.13. $\{x \in \mathcal{N} \bigvee_{y \in \mathcal{R}} x = \operatorname{tg} y\}$.

7.14. Dowieść, że zbiór A jest przeliczalny wtedy i tylko wtedy, je
go elementy można ustawić w ciąg.

7.15. Dowieść, że zbiór A jest mocy $\aleph_0$ ($\overline{\overline{A}} = \aleph_0$) wtedy i tylko wted
śli jego elementy można ustawić w ciąg nieskończony o wszystkich wyr
ch różnych.

7.16. [illegible] też jest zbiorem przeliczalnym.

7.17. Dowieść, że jeśli A i B są zbiorami przeliczalnymi, to $A \cup B$, $A \cap B$, $A-B$ i $A \dot{-} B$ są też zbiorami przeliczalnymi.

7.18. Dowieść, że jeśli A i B są przeliczalne, to $A \times B$ też jest przeliczalny. Jakie należy uczynić założenie dodatkowe, by móc twierdzić, że $A \times B$ ma moc $\aleph_0$?

7.19. Dowieść, że jeśli $\overline{\overline{X}} \geqslant \aleph_0$, to istnieje $X_1 \subset X$, $\overline{\overline{X_1}} = \aleph_0$ takie, że $X - X_1 \sim X$.

7.20. Dowieść, że jeśli $\{A_n\}_{n\in\mathcal{N}}$ jest rodziną zbiorów przeliczalnych, to $\bigcup\limits_{n\in\mathcal{N}} A_n$ też jest zbiorem przeliczalnym.

7.21. Dowieść, że jeśli $\{A_n\}_{n\in\mathcal{N}}$ jest rodziną zbiorów skończonych, to $\bigcup\limits_{n\in\mathcal{N}} \mathop{P}\limits_{k<n} A_k$ jest przeliczalny. Kiedy zbiór ten jest mocy $\aleph_0$?

Wyprowadzić stąd wniosek, że zbiór wszystkich ciągów skończonych o wyrazach naturalnych jest przeliczalny.

7.22. Dowieść, że zbiór liczb całkowitych jest przeliczalny.

7.23. Dowieść, że zbiór liczb wymiernych jest przeliczalny.

7.24. Dowieść, że dla każdego n zbiór wielomianów stopnia n o współczynnikach wymiernych jest przeliczalny.

7.25. Dowieść, że dla każdego n, zbiór

$$\{x \in \mathcal{R};\ \bigvee_{a_0\in\mathcal{W}} \dots \bigvee_{a_n\in\mathcal{W}} a_0x^n + \,..\, + a_{n-1}x + a_n = 0\}$$

jest przeliczalny.

7.26. Dowieść, że zbiór wszystkich pierwiastków wielomianów o współczynnikach wymiernych jest przeliczalny.

7.27 Dowieść, że każdy zbiór rozłącznych, położonych na prostej odcinków, jest przeliczalny.

7.28. Dowieść, że zbiór ekstremów funkcji ciągłej o wartościach rzeczywistych jest przeliczalny.

7.29. Dowieść, że jeśli $f(x)$ jest funkcją monotoniczną o wartościach rzeczywistych, to zbiór jej punktów nieciągłości jest przeliczalny.

Dowieść, że każdy z następujących zbiorów jest mocy $\aleph_0$ (zad. 7.30--7.36):

7.30. Zbiór odcinków położonych na prostej, o końcach wymiernych.

7.32. Zbiór trójkątów równobocznych o środku ciężkości w począt[…] układu i jednym wierzchołku o współrzędnych wymiernych.

7.33. Zbiór złożony z rozłącznych sześcianów przestrzeni trójwymia[…] rowej.

7.34. Zbiór złożony z rozłącznych kół położonych na płaszczyźni[…]

7.35. Zbiór macierzy o wyrazach wymiernych.

7.36. Zbiór $\{x \in \mathcal{R}\colon \bigvee_{n \in \mathcal{N}-\{0\}} x^n \in \mathcal{W}\}$.

7.37 Niech A będzie zbiorem przeliczalnym. Dowieść, że zbiór wszyst[…] kich skończonych ciągów jakie dadzą się utworzyć z elementów zbioru [...] jest przeliczalny. Kiedy taki zbiór ma moc $\aleph_0$?

7.38. Znaleźć moc zbioru ciągów o elementach całkowitach zbieżnyc[…] do zera.

7.39. Znaleźć moc zbioru ciągów o wyrazach wymiernych, stałych o[…] pewnego miejsca.

7.40. Dowieść, że niepusty zbiór A jest przeliczalny wtedy i tylk[…] wtedy, gdy istnieje funkcja $g\colon \mathcal{N} \xrightarrow[\text{na}]{} A$.

7.41. Dowieść, że $\overline{\overline{A}} = \aleph_0$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją funkcj[…] g i f takie, że $f\colon A \xrightarrow[\text{na}]{} \mathcal{N}$ i $g\colon \mathcal{N} \xrightarrow[\text{na}]{} A$.

7.42. Dowieść, że zbiór punktów na prostej jest mocy $\mathfrak{c}$.

Dowieść bez pomocy tzw. Cantora-Bernsteina, że $A \sim B$ (zad. 7.43-7.50)[…]

7.43. A, B dowolne dwa odcinki otwarte.

7.44. A, B dowolne dwa odcinki domknięte.

7.45. A odcinek otwarty, B — odcinek z jednym końcem.

7.46. A, B dowolne dwa okręgi.

7.47 A, B dowolne dwa koła.

7.48. A — prosta, B odcinek otwarty.

7.49. A — prosta, B odcinek domknięty.

7.50. A — półprosta domknięta, B prosta.

7.51. Dowieść, że zbiór punktów płaszczyzny jest mocy $\mathfrak{c}$.

7.52. Dowieść, że jeśli A i B są zbiorami mocy $\mathfrak{c}$, to $A \cup B$ i $A \times B$ są również zbiorami mocy $\mathfrak{c}$.

7.53. Dowieść, że jeśli A jest zbiorem przeliczalnym, a B zbiore[…] mocy $\mathfrak{c}$, to $A \cup B$, $B - A$, $B \dot{-} A$ są zbiorami mocy $\mathfrak{c}$.

7.54. Co można powiedzieć o mocy zbioru $A \times B$, jeśli wiadomo, że $\overline{\overline{A}} = \mathfrak{c}$, a B jest zbiorem przeliczalnym?

7.55. Dowieść, że jeśli $\{A_t\}_{t \in \mathscr{R}}$ jest rodziną mocy $\mathfrak{c}$ zbiorów przeliczalnych, rozłącznych i niepustych, to $\bigcup_{t \in \mathscr{R}} A_t$ ma moc $\mathfrak{c}$.

7.56. Dowieść, że jeśli moc każdego ze zbiorów A_t $(t \in \mathscr{R})$ wynosi $\mathfrak{c}$, to zbiór $\bigcup_{t \in \mathscr{R}} A_t$ ma również moc $\mathfrak{c}$.

Sprawdzić, czy następujące zbiory mają moc $\mathfrak{c}$ (zad. 7.57-7.74).

7.57. $\{x \in \mathscr{R} : -1 < x < 1\}$.

7.58. $\{x \in \mathscr{R} : \bigvee_{n \in \mathscr{N}} x^n \in \mathscr{W}\}$.

7.59. $\{x \in \mathscr{R} : 0 \leqslant x\}$.

7.60. $\{x \in \mathscr{R} : x < 0\}$.

7.61. $\{\langle x, y\rangle : x \in \mathscr{R} \wedge y \in \mathscr{R} \wedge x^2 = y\}$.

7.62. $\{\langle x, y\rangle : x \in \mathscr{R} \wedge y \in \mathscr{R} \wedge x = y\}$.

7.63. $\{\langle x, y\rangle : x^2+y^2 = 1 \wedge x \in \mathscr{R} \wedge y \in \mathscr{R}\}$.

7.64. $\{\langle x, y\rangle : x \in \mathscr{R} \wedge y \in \mathscr{R} \wedge y = f(x)\}$, gdzie f jest dowolną, ale ustaloną funkcją taką, że $f : \mathscr{R} \to \mathscr{R}$.

7.65. $\{\langle x, y\rangle : x \in \mathscr{R} \wedge y \in \mathscr{R} \wedge \bigvee_{w \in \mathscr{W}} x-y = w\}$.

7.66. $\{\langle x, y\rangle : x \in \mathscr{R} \wedge y \in \mathscr{R} \wedge x < 1\}$.

7.67. $\{x, y\rangle : x \in \mathscr{R} \wedge y \in \mathscr{R} \wedge x^2 = 4\}$.

7.68. $\{\langle x, y\rangle : x \in \mathscr{R} \wedge y \in \mathscr{W} \wedge x^2 = 4\}$.

7.69. $\{\langle x, y\rangle : x \in \mathscr{R} \wedge y \in \mathscr{R} \wedge x < 0 \wedge y < 0\}$.

7.70. $\{\langle x, y\rangle : x \in \mathscr{R} \wedge y \in \mathscr{R} \wedge 0 \leqslant x < 1 \wedge 0 \leqslant y < 1\}$.

7.71. $\{\langle x, y\rangle \in \mathscr{R}^2 : x \cdot y < 1\}$.

7.72. $\{\langle x, y\rangle \in \mathscr{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$.

7.73. $\{\langle x, y, z\rangle \in \mathscr{R}^3 : x = y = z\}$.

7.74. $\{\langle x, y, z\rangle \in \mathscr{R}^3 : 0 \leqslant x < 1 \wedge 0 \leqslant y < 1 \wedge 0 \leqslant z < 1\}$.

7.75. Dowieść, że dla dowolnego $n > 0$, zbiór $\mathscr{R}^n$ ma moc $\mathfrak{c}$.

7.76. Dowieść, że jeśli dla każdego $n \in \mathscr{N}$, $A_n = \{0, 1\}$, to $\underset{n \in \mathscr{N}}{P} A_n$ ma moc $\mathfrak{c}$.

7.77. Dana jest rodzina zbiorów przeliczalnych A_n taka, że wszystkie zbiory A_n z wyjątkiem skończonej ilości są skończone.

7.78. Dowieść, że jeśli $X \subset Y$, to $\overline{\overline{X}} \leqslant \overline{\overline{Y}}$

7.79. Dowieść, że dla dowolnych liczb kardynalnych $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2$ $\mathfrak{m}_3$

a) $\mathfrak{m}_1 \leqslant \mathfrak{m}_1$

b) $\mathfrak{m}_1 \leqslant \mathfrak{m}_2 \wedge \mathfrak{m}_2 \leqslant \mathfrak{m}_3 \Rightarrow \mathfrak{m}_1 \leqslant \mathfrak{m}_3$.

7.80. Dowieść, że $\overline{\overline{X}} \leqslant \overline{\overline{Y}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki $Y_1 \subset$ że $X \sim Y_1$

7.81. Dowieść, że $\overline{\overline{X}} \leqslant \overline{\overline{Y}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje f takie, f $X \xrightarrow{1-1} Y$

7.82. Dowieść, że $\overline{\overline{X}} \leqslant \overline{\overline{Y}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje f takie, że $f \cdot Y \underset{\text{na}}{\rightarrow} X$.

7.83. Dowieść, że jeśli X jest zbiorem takim, że $\overline{\overline{X}} > n$ dla dowolnego n, to $\overline{\overline{X \cup \{a\}}} = \overline{\overline{X}}$ dla dowolnego a.

7.84. Dowieść, że jeśli $\overline{\overline{X}} \geqslant \aleph_0$, to dla dowolnego a mamy $\overline{\overline{X \cup \{a\}}} = \overline{\overline{X}}$

7.85. Dowieść, że jeśli $\{A_n\}_{n \in \mathcal{N}}$ jest rodziną zbiorów niepustych taką, że zbiór $\{n \in \mathcal{N} \ \overline{\overline{A}}_n \leqslant \aleph_0 \wedge \overline{\overline{A}}_n \geqslant 2\}$ nie jest skończony, to $\overline{\overline{\underset{n \in \mathcal{N}}{P} A_n}} \geqslant \mathfrak{c}$

Kiedy $\overline{\overline{\underset{n \in \mathcal{N}}{P} A_n}} = \mathfrak{c}$?

Przypomnijmy, że przez ${}^{A}B$ oznaczamy zbiór odwzorowań f $A \rightarrow B$. Tak więc $f \in {}^{A}B \Leftrightarrow f$ $A \rightarrow B$. Często zbiór ten oznacza się także jako B^A. W szczególności, gdy $B = \{0, 1\}$ zamiast B^A (ew. ${}^{A}B$) piszemy 2^A

7.86. Dowieść, że $2^A \sim \mathscr{P}(A)$.

7.87. Dowieść, że jeśli A skończone i $\overline{\overline{B}} \geqslant \aleph_0$, to ${}^{B}A \sim 2^B$.

7.88. Dowieść, że jeśli $A_1 \sim B_1$ i $A_2 \sim B_2$, to ${}^{A_1}A_2 \sim {}^{B_1}B_2$.

7.89. Dowieść, że jeśli A i B są rozłączne, to dla dowolnego C mamy ${}^{(A \cup B)}C \sim ({}^{A}C) \times ({}^{B}C)$.

7.90. Dowieść, że ${}^{C}(A \times B) \sim {}^{C}(A) \times ({}^{C}B)$.

7.91. Dowieść, że $\overline{\overline{{}^{\mathcal{N}}\mathcal{N}}} = \mathfrak{c}$.

7.92. Dowieść, że jeśli $\{A_t\}_{t \in \mathscr{R}}$ jest rodziną zbiorów takich, że $\overline{\overline{A}}_t \geqslant 2$ dla każdego $t \in \mathscr{R}$, to $\overline{\overline{\underset{t \in T}{P} A_t}} > \mathfrak{c}$.

7.93. Czy istnieje zbiór X taki, że $\overline{\overline{\mathscr{P}(X)}} = \aleph_0$?

7.94. Dowieść, że jeśli $\overline{\overline{X}} = \aleph_0$, to $\overline{\overline{\mathscr{P}(X)}} = \mathfrak{c}$.

7.95. Dowieść, że nie istnieje zbiór X i funkcja f taka, że $f: X \underset{\text{na}}{\rightarrow} \mathscr{P}(X)$

7.96. Dowieść, że $\overline{\overline{X}} < \overline{\overline{\mathcal{P}(X)}}$.

7.97. Dowieść, że nie istnieje zbiór wszystkich zbiorów.

7.98. Dowieść, że liczb kardynalnych jest nieskończenie wiele.

7.99. Dowieść, że jeśli $A_1 \subset B \subset A_2$ i $A_1 \sim A_2$, to $A_1 \sim B$ i $B \sim A_2$.

7.100. Dowieść, że jeśli istnieje taka funkcja różnowartościowa $f \subset A \times A$, że $f * A \subset B \wedge B \subset A$, to $A \sim B$.