

1. ZESTAW ZADAŃ 3: CIĄGI DOKŁADNE.

(1) Niech  $R$  będzie pierścieniem. Udowodnić, że ciąg lewych  $R$ -modułów i homomorfizmów

$$0 \rightarrow N_1 \xrightarrow{f} N_2 \xrightarrow{g} N_3 \rightarrow 0$$

jest dokładny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego lewego  $R$ -modułu  $M$  ciąg:

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(M, N_1) \xrightarrow{\bar{f}} \text{Hom}_R(M, N_2) \xrightarrow{\bar{g}} \text{Hom}_R(M, N_3) \rightarrow 0$$

jest ciągiem dokładnym grup abelowych, gdzie odwzorowania  $\bar{f} : \text{Hom}_R(M, N_1) \rightarrow \text{Hom}_R(M, N_2)$  i  $\bar{g} : \text{Hom}_R(M, N_2) \rightarrow \text{Hom}_R(M, N_3)$  dane są wzorami

$$\bar{f}(\phi) = f \circ \phi \text{ oraz } \bar{g}(\psi) = g \circ \psi.$$

(2) Niech  $R$  będzie pierścieniem. Udowodnić, że jeżeli w diagramie przemiennym

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 & \xrightarrow{g} & M_3 \\ & & & & \downarrow v & & \downarrow w \\ 0 & \longrightarrow & N_1 & \xrightarrow{f'} & N_2 & \xrightarrow{g'} & N_3 \end{array}$$

wiersze są ciągami dokładnymi, to istnieje dokładnie jeden homomorfizm  $u : M_1 \rightarrow N_1$  taki, że diagram

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 & \xrightarrow{g} & M_3 \\ & & \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w \\ 0 & \longrightarrow & N_1 & \xrightarrow{f'} & N_2 & \xrightarrow{g'} & N_3 \end{array}$$

jest przemienny.

(3) Niech  $R$  będzie pierścieniem, niech w diagramie przemiennym

$$\begin{array}{ccccccc} M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 & \xrightarrow{g} & M_3 & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & & \\ N_1 & \xrightarrow{f'} & N_2 & \xrightarrow{g'} & N_3 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

wiersze będą ciągami dokładnymi. Udowodnić, że jeżeli  $u$  i  $w$  są surjekcjami, to wówczas również  $v$  jest surjekcją.

**Zadanie domowe:** zadania 1, 2 i 3 należy rozwiązać na następne zajęcia.