

1. WYKŁAD 1: GRUPY I IZOMORFIZMY GRUP. PODGRUPY, PODGRUPY GENEROWANE PRZEZ ZBIÓR.

1.1. Grupy i izomorfizmy grup.

Definicja 1.1. Niech A będzie niepustym zbiorem. **Działaniem wewnętrznym** (lub, krótko, działaniem) w zbiorze A nazywamy funkcję $*$: $A \times A \rightarrow A$. Niech ponadto B będzie niepustym zbiorem. **Działaniem zewnętrznym** w zbiorze A nazywamy funkcję $*$: $B \times A \rightarrow A$.

Uwaga 1.1. To, że w zbiorze A określono działanie wewnętrzne $*$ w szczególności oznacza, że:

- (1) $\forall x, y \in A[* (x, y) \text{ istnieje}]$,
- (2) $\forall x, y \in A[* (x, y) \in A]$.

Zamiast $*(x, y)$ będziemy na ogół pisać $x * y$. Podobnie, jeśli $B \neq \emptyset$, to to, że w zbiorze A określono działanie zewnętrzne \diamond w szczególności oznacza, że:

- (1) $\forall a \in B \forall x \in A[\diamond(a, x) \text{ istnieje}]$,
- (2) $\forall a \in B \forall x \in A[\diamond(a, x) \in A]$.

Zamiast $\diamond(a, x)$ będziemy na ogół pisać $a \diamond x$. Na tym wykładzie będziemy zajmować się prawie wyłącznie działaniami wewnętrznymi.

Przykłady:

- (1) Dodawanie liczb naturalnych jest działaniem w zbiorze \mathbb{N} . Zauważmy, że dodawanie możemy formalnie zdefiniować rekurencyjnie jako funkcję $d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ warunkiem:

$$d(x, y) = \begin{cases} d(x, 0) = x \\ d(x, S(y)) = S(d(x, y)), \end{cases}$$

gdzie $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ oznacza funkcję następnika liczb naturalnych. Symbol “+” dla oznaczenia dodawania wprowadził w 1489 roku Johannes Widmann.

- (2) Mnożenie liczb naturalnych jest działaniem w zbiorze \mathbb{N} . Podobnie jak dodawanie, mnożenie możemy zdefiniować rekurencyjnie jako funkcję $m : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ daną warunkiem:

$$m(x, y) = \begin{cases} m(x, 0) = 0, \\ m(x, S(y)) = m(x, y) + x, \end{cases}$$

gdzie, jak poprzednio, $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ oznacza funkcję następnika liczb naturalnych. Znak “ \times ” dla oznaczenia mnożenia wprowadził w 1631 roku William Oughtred, zaś symbol “ \cdot ” zaproponował Gottfried Wilhelm von Leibniz w roku 1698.

- (3) Odejmowanie i dzielenie nie są działaniami w zbiorze \mathbb{N} : $3 - 5 \notin \mathbb{N}$ oraz $1 \div 2 \notin \mathbb{N}$. Z drugiej strony, odejmowanie jest działaniem w \mathbb{Z} , a dzielenie jest działaniem w $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$.
- (4) Mnożenie wektorów na płaszczyźnie przez skalary rzeczywiste jest przykładem działania zewnętrznego.

Definicja 1.2. Niech A będzie niepustym zbiorem, a $*$ i \circ działaniami w A .

- (1) Mówimy, że $*$ jest **łącznie**, jeżeli

$$\forall x, y, z \in A[x * (y * z) = (x * y) * z].$$

- (2) Mówimy, że $*$ jest **przemienne**, jeżeli

$$\forall x, y \in A[x * y = y * x].$$

(3) Mówimy, że $*$ ma element neutralny e , jeżeli

$$\forall x \in A [x * e = e * x = x].$$

(4) Mówimy, że y jest elementem odwrotnym do x , jeżeli

$$x * y = y * x = e.$$

(5) Mówimy, że \circ jest rozdzielne względem $*$, jeżeli

$$\forall x, y, z \in A [x \circ (y * z) = x \circ y * x \circ z].$$

Przykłady:

- (5) Dodawanie i mnożenie liczb naturalnych są łączne i przemienne. 0 jest elementem neutralnym dodawania, a 1 jest elementem neutralnym mnożenia. Ponadto mnożenie jest rozdzielne względem dodawania. 1 nie ma elementu odwrotnego względem dodawania, a 2 nie ma elementu odwrotnego względem mnożenia.
- (6) Rozważmy dodawanie i mnożenie liczb całkowitych. Każda liczba całkowita ma element odwrotny względem dodawania, ale 2 nie ma elementu odwrotnego względem mnożenia.
- (7) Rozważmy dodawanie i mnożenie liczb wymiernych. Każda liczba wymierna ma element odwrotny względem dodawania i każda niezerowa liczba wymierna ma element odwrotny względem mnożenia.
- (8) Rozważmy dowolny niepusty zbiór X i rodzinę A wszystkich funkcji $f : X \rightarrow X$ oraz działanie składania funkcji. Jest to działanie łączne, ale nie jest przemienne. Funkcja identycznościowa $X \ni x \mapsto x \in X$ jest elementem neutralnym tego działania, a jedyne funkcje, które mają elementy odwrotne, to funkcje różnowartościowe.

Definicja 1.3. (1) **Algebrą** nazywamy ciąg $(A, *_1, \dots, *_n, B_1, \dots, B_m, \cdot_1, \dots, \cdot_m)$, gdzie A jest niepustym zbiorem, $*_1, \dots, *_n$ działaniami wewnętrznymi w zbiorze A , a \cdot_1, \dots, \cdot_m działaniami zewnętrznymi w zbiorze A (wraz z odpowiadającymi im zbiorami B_1, \dots, B_m).

(2) **Grupą** nazywamy algebrę $(G, *)$, gdzie $*$ jest łączne, ma element neutralny i każdy element w zbiorze G ma element odwrotny. Jeżeli ponadto $*$ jest przemienne, to grupę $(G, *)$ nazywamy przemienne (lub abelową).

Przykłady:

(9) Przykładami algebr znanymi z wykładu z algebry liniowej są ciała, czyli algebry $(F, +, \cdot)$, gdzie $+$ i \cdot są działaniami łącznymi, przemiennymi, mającymi elementy neutralne, odpowiednio, 0 i 1 oraz takie, że każdy element zbiorów, odpowiednio, F i F^* ma element odwrotny.

Przykładami algebr, w których występują działania zewnętrzne, są przestrzenie liniowe, czyli algebry $(V, +, F, \cdot)$, gdzie $+$ jest działaniem wewnętrznym zbioru F , które jest łączne, przemienne, ma element neutralny i względem którego każdy element zbioru V ma element odwrotny, natomiast $\cdot : F \times V \rightarrow V$ jest pewnym działaniem zewnętrznym, przy czym F jest ciałem.

(10) **Grupy liczbowe.** $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$ są przykładami grup przemiennych. $(\mathbb{N}, +)$ nie jest grupą. Podobnie (\mathbb{Q}^*, \cdot) , (\mathbb{R}^*, \cdot) , (\mathbb{C}^*, \cdot) , gdzie $A^* = A \setminus \{0\}$, są grupami przemiennymi. (\mathbb{N}^*, \cdot) i (\mathbb{Z}^*, \cdot) nie są grupami.

(11) **Grupy pochodzące od ciała.** Uogólniając poprzedni przykład, dla dowolnego ciała $(F, +, \cdot)$ algebry $(F, +)$ oraz (F^*, \cdot) są grupami przemiennymi.

(12) **Grupy reszt.** Niech $n \in \mathbb{N}$ i oznaczmy przez $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$. W zbiorze \mathbb{Z}_n definiujemy dodawanie modulo n :

$$x \oplus_n y = \text{reszta z dzielenia } x + y \text{ przez } n$$

oraz **mnożenie modulo n** :

$$x \otimes_n y = \text{reszta z dzielenia } x \cdot y \text{ przez } n.$$

Niech ponadto

$$U(\mathbb{Z}_n) = \{k \in \mathbb{Z}_n : \text{NWD}(k, n) = 1\}.$$

(\mathbb{Z}_n, \oplus_n) i $(U(\mathbb{Z}_n), \otimes_n)$ są przykładami grup przemiennych. $(\mathbb{Z}_n^*, \otimes_n)$ na ogół nie jest grupą, chyba że n jest liczbą pierwszą – wówczas $\mathbb{Z}_n^* = U(\mathbb{Z}_n)$.

- (13) **Grupy macierzy.** Niech F będzie dowolnym ciałem, niech $M(n, F)$ oznacza zbiór macierzy kwadratowych stopnia n o współczynnikach z ciała F . $(M(n, F), +)$ jest grupą przemienną, przy czym $+$ oznacza tu dodawanie macierzy.

Niech

$$GL(n, F) = \{A \in M(n, F) : \det A \neq 0\}.$$

$(GL(n, F), \cdot)$ jest grupą, która na ogół nie jest przemienna, przy czym \cdot oznacza tu mnożenie macierzy. Grupę tę nazywamy **grupą liniową stopnia n** nad ciałem F .

Niech

$$SL(n, F) = \{A \in M(n, F) : \det A = 1\}.$$

$(SL(n, F), \cdot)$ jest grupą, która na ogół nie jest przemienna. Grupę tę nazywamy **specjalną grupą liniową stopnia n** nad ciałem F .

- (14) **Grupy związane z przestrzenią liniową.** Niech V będzie przestrzenią liniową. $(V, +)$ jest grupą przemienną, przy czym $+$ oznacza tu dodawanie wektorów.

Oznaczmy przez $Aut(V)$ zbiór automorfizmów liniowych przestrzeni V . $(Aut(V), \circ)$ jest grupą, która na ogół nie jest przemienna, przy czym \circ jest tu działaniem składania przekształceń liniowych.

Założmy, że w przestrzeni V zdefiniowaliśmy funkcjonał dwuliniowy ξ określający na V strukturę przestrzeni euklidesowej. Oznaczmy przez $O(V)$ zbiór automorfizmów ortogonalnych przestrzeni V . $(O(V), \circ)$ jest grupą, która na ogół nie jest przemienna. Grupę tę nazywamy **grupą ortogonalną przestrzeni (V, ξ)** .

- (15) **Grupy funkcji.** Niech $(G, *)$ będzie grupą, niech $X \neq \emptyset$. W rodzinie funkcji

$$G^X = \{f : X \rightarrow G : f \text{ jest funkcją}\}$$

definiujemy działanie

$$(f \diamond g)(x) = f(x) * g(x).$$

(G^X, \diamond) jest grupą, która jest przemienna, gdy G jest przemienna.

- (16) **Grupy zadane tabelkami Cayleya.** Działania w grupach często wygodnie jest zapisywać w tabelkach Cayleya. Na przykład tabelka działań w grupie $(\mathbb{Z}_5^*, \otimes_5)$ wygląda następująco:

\otimes_5	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

Przykładem grupy zadanej przez tabelkę Cayleya, która nie ma odpowiednika wśród grup liczbowych, jest **grupa czwórkowa Kleina** (K_4, \cdot) , gdzie $K_4 = \{a, b, c, d\}$ oraz działanie \cdot zdefiniowane

jest następująco:

·	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

(17) **Grupy przekształceń.** Niech $X \neq \emptyset$, niech

$$S(X) = \{f : X \rightarrow X : f \text{ jest bijekcją}\}.$$

$(S(X), \circ)$ jest grupą, która na ogół nie jest przemienna, przy czym \circ oznacza tu działanie składania funkcji. Jeśli $X = \{1, 2, \dots, n\}$, to grupę $S(X)$ oznaczamy przez $S(n)$ i nazywamy **grupą symetryczną stopnia n** albo **grupą permutacji stopnia n** . Dla grup symetrycznych przyjmujemy następującą notację: jeśli $\sigma \in S(n)$ i $\sigma(1) = i_1, \dots, \sigma(n) = i_n$, to piszemy

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}.$$

Na przykład dla $n = 3$ elementy grupy $S(3)$ to następujące funkcje:

$$\begin{array}{l} id_3 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad o_1 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad o_2 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ s_1 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad s_2 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad s_3 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Tym samym tabelka działań w grupie $S(3)$ wygląda następująco:

o	id_3	o_1	o_2	s_1	s_2	s_3
id_3	id_3	o_1	o_2	s_1	s_2	s_3
o_1	o_1	o_2	id_3	s_2	s_3	s_1
o_2	o_2	id_3	o_1	s_3	s_1	s_2
s_1	s_1	s_3	s_2	id_3	o_2	o_1
s_2	s_2	s_1	s_3	o_1	id_3	o_2
s_3	s_3	s_2	s_1	o_2	o_1	id_3

. Widzimy, że jest to przykład grupy nieprzemiennej: $s_1 \circ o_1 = s_2$, ale $o_1 \circ s_1 = s_3$.

(18) **Grupy izometrii własnych n -kąta foremnego.** Dla $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$, oznaczmy przez $D(n)$ zbiór izometrii własnych n -kąta foremnego. $(D(n), \circ)$ jest grupą. Na przykład grupa $D(3)$ składa się z

następujących izometrii trójkąta równobocznego:

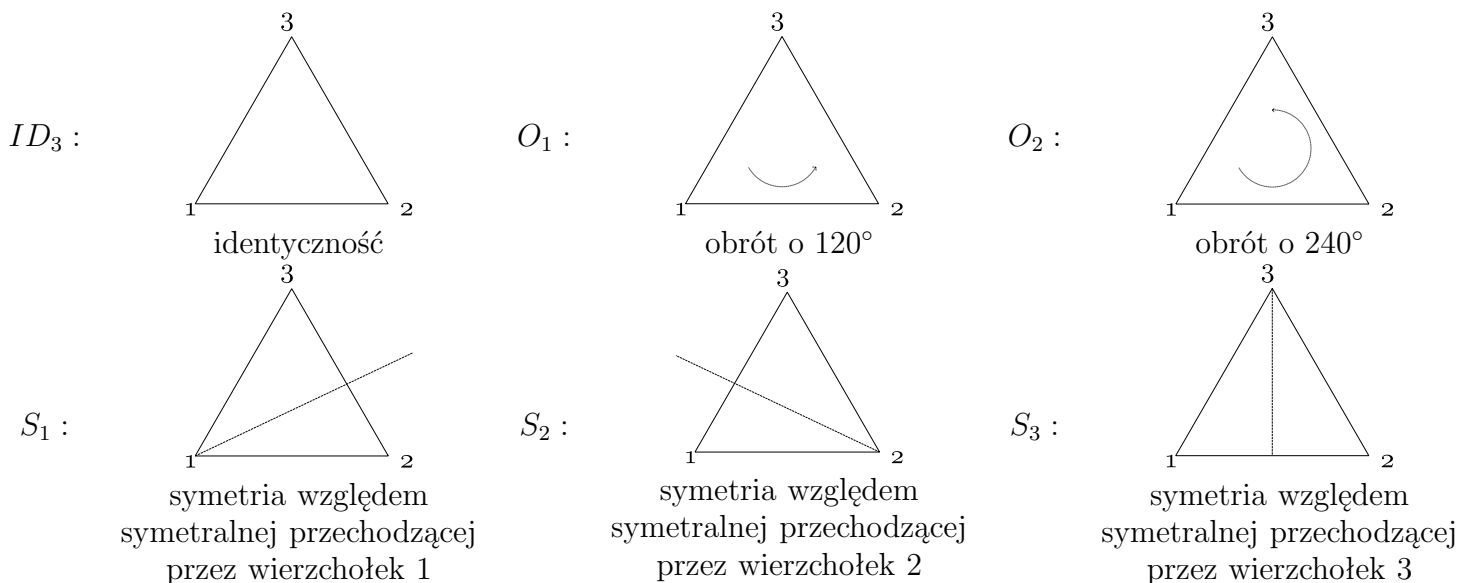


Tabela działań w grupie $D(3)$ wygląda zatem następująco:

\circ	ID_3	O_1	O_2	S_1	S_2	S_3
ID_3	ID_3	O_1	O_2	S_1	S_2	S_3
O_1	O_1	O_2	ID_3	S_2	S_3	S_1
O_2	O_2	ID_3	O_1	S_3	S_1	S_2
S_1	S_1	S_3	S_2	ID_3	O_2	O_1
S_2	S_2	S_1	S_3	O_1	ID_3	O_2
S_3	S_3	S_2	S_1	O_2	O_1	ID_3

- (19) **Skończony produkt grup.** Niech $(G_1, *_1), \dots, (G_n, *_n)$ będą grupami. W produkcie kartezjańskim $G = G_1 \times \dots \times G_n$ definiujemy działanie “po współrzędnych”:

$$(a_1, \dots, a_n) * (b_1, \dots, b_n) = (a_1 *_1 b_1, \dots, a_n *_n b_n).$$

$(G, *)$ jest grupą. Jako przykład rozważmy grupy (\mathbb{Z}_2, \oplus_2) i (\mathbb{Z}_2, \oplus_2) . Wówczas

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$$

i tabelka działań wygląda następująco:

$*$	$(0, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 0)$	$(1, 1)$
$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 0)$	$(1, 1)$
$(0, 1)$	$(0, 1)$	$(0, 0)$	$(1, 1)$	$(1, 0)$
$(1, 0)$	$(1, 0)$	$(1, 1)$	$(0, 0)$	$(0, 1)$
$(1, 1)$	$(1, 1)$	$(1, 0)$	$(0, 1)$	$(0, 0)$

Definicja 1.4. Niech $(G_1, *_1)$ i $(G_2, *_2)$ będą grupami. Funkcję $f : G_1 \rightarrow G_2$ nazywamy **izomorfizmem grup**, jeżeli jest bijekcją i spełniony jest warunek

$$\forall x, y \in G_1 [f(x *_1 y) = f(x) *_2 f(y)].$$

Jeżeli istnieje izomorfizm $f : G_1 \rightarrow G_2$, to grupy G_1 i G_2 nazywamy **izomorficznymi**, co oznaczamy przez $G_1 \cong G_2$.

Przykłady:

(20) Grupy $S(3)$ i $D(3)$ są izomorficzne. Istotnie, rozważmy funkcję $f : S(3) \rightarrow D(3)$, którą, dla wygody oznaczeń, zdefiniujemy tabelką jako:

σ	id_3	o_1	o_2	s_1	s_2	s_3
$f(\sigma)$	ID_3	O_1	O_2	S_1	S_2	S_3

Oczywiście jest to bijekcja. Porównując tabelki działań w $S(3)$ i $D(3)$ widzimy, że jest to też izomorfizm grup.

(21) Grupy K_4 i $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ są izomorficzne. Istotnie, izomorfizm ustala funkcja $f : K_4 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ dana tabelką

x	a	b	c	d
$f(x)$	$(0, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 0)$	$(1, 1)$

W dowolnej grupie $(G, *)$ wprowadzamy oznaczenie

$$\prod_{i=1}^n x_i = x_1 * \dots * x_n.$$

W szczególności $\prod_{i=1}^n x = x^n$. Tradycyjnie używamy w teorii grup dwóch równoległych terminologii, addytywnej i mnożymy, według następującego schematu:

Definicja	Notacja addytywna	Notacja mnożymy
działanie	$+$ dodawanie suma	\cdot mnożenie iloczyn
element neutralny	0 zero	1 jedynka
potęga	nx wielokrotność	x^n potęga
element odwrotny	$-x$ element przeciwny	x^{-1} element odwrotny

Twierdzenie 1.1. Niech $(G, *)$ będzie grupą. Wówczas:

- (1) element neutralny e jest wyznaczony jednoznacznie;
- (2) $\prod_{i=1}^m x_i * \prod_{j=m+1}^{m+n} x_j = \prod_{k=1}^{m+n} x_k$, dla $x_1, \dots, x_{m+n} \in G$;
- (3) $x^{m+n} = x^m x^n$, dla $x \in G$;
- (4) $(x^m)^n = x^{mn}$, dla $x \in G$;
- (5) element odwrotny jest wyznaczony jednoznacznie;
- (6) $(x_1^{n_1} * \dots * x_k^{n_k})^{-1} = x_k^{-n_k} * \dots * x_1^{-n_1}$, dla $x_1, \dots, x_k \in G$;
- (7) $(x^{-1})^{-1} = x$, dla $x \in G$;
- (8) $(x^{-1} * y * x)^n = x^{-1} * y^n * x$, dla $x, y \in G$;
- (9) jeżeli $x * y = x * z$, to $y = z$ oraz jeżeli $y * x = z * x$, to $y = z$ (**prawo skracania**).

Dowód. Udowodnimy dla przykładu część (1): jeśli e i e' są dwoma elementami neutralnymi, to wówczas

$$e = e * e' = e'$$

□

1.2. Podgrupy, podgrupy generowane przez zbiór.

Definicja 1.5. Niech (G, \cdot) będzie grupą. Podzbiór $H \neq \emptyset$ zbioru G nazywamy **podgrupą** grupy G (piszemy $H < G$), gdy $(H, \cdot \upharpoonright_{H \times H})$ jest grupą.

Przykłady:

- (1) $\mathbb{Z} < \mathbb{R}$ z dodawaniem;
- (2) $\mathbb{R}^* < \mathbb{C}^*$ z mnożeniem;
- (3) $SL(n, F) < GL(n, F)$ z mnożeniem macierzy;
- (4) \mathbb{Z}_n nie jest podgrupą grupy \mathbb{Z} .

Twierdzenie 1.2. Niech $\emptyset \neq H \subset G$ i niech (G, \cdot) będzie grupą. Następujące warunki są równoważne:

- (1) $H < G$;
- (2) H ma następujące własności:
 - $1_G \in H$,
 - $\forall x, y \in H(xy \in H)$,
 - $\forall x \in H(x^{-1} \in H)$;
- (3) H ma następującą własność:
 - $\forall x, y \in H(xy^{-1} \in H)$.

Dowód. Równoważność (1) \Leftrightarrow (2) jest oczywista. Dla dowodu implikacji (2) \Rightarrow (3) ustalmy $x, y \in H$. Mamy, że $y^{-1} \in H$, więc $xy^{-1} \in H$. Pozostaje udowodnić implikację (3) \Rightarrow (1). Ponieważ $H \neq \emptyset$, więc istnieje $x \in H$. Stąd

$$1_G = xx^{-1} \in H.$$

Dalej:

$$x^{-1} = 1_G x^{-1} \in H.$$

Ustalmy $x, y \in H$. Wówczas $y^{-1} \in H$, a zatem:

$$xy = x(y^{-1})^{-1} \in H.$$

□

Przykłady:

- (5) Zauważmy, że $\mu_n(\mathbb{C}) = \{z \in \mathbb{C}^* : z^n = 1\} < \mathbb{C}^*$. Istotnie, ustalmy $z_1, z_2 \in \mu_n(\mathbb{C})$, a zatem niech $z_1^n = 1$ i $z_2^n = 1$. Wówczas $(z_1 z_2^{-1})^n = (z_1^n z_2^{-n}) = \frac{z_1^n}{z_2^n} = \frac{1}{1} = 1$, czyli $z_1 z_2^{-1} \in \mu_n(\mathbb{C})$.
- (6) Zauważmy, że $\{0, 2, 4\} < \mathbb{Z}_6$ z dodawaniem. Istotnie, $0 \in \{0, 2, 4\}$, dodawanie na każdej parze nie wychodzi poza zbiór $\{0, 2, 4\}$ oraz 0 jest elementem symetrycznym dla 0, 2 dla 4 i 4 dla 2.
- (7) Zauważmy, że $2\mathbb{Z} = \{2k : k \in \mathbb{Z}\} < \mathbb{Z}$ z dodawaniem. Istotnie, ustalmy $x, y \in 2\mathbb{Z}$, a zatem niech $x = 2k$ i $y = 2l$. Wówczas $x - y = 2k - 2l = 2(k - l)$, czyli $x - y \in 2\mathbb{Z}$.
- (8) Zauważmy, że jeśli G jest dowolną grupą, to

$$\{1_G\} < G \text{ oraz } G < G.$$

Podgrupy te nazywamy **podgrupami niewłaściwymi**, wszystkie pozostałe – **podgrupami właściwymi**.

Twierdzenie 1.3. Niech $\mathcal{R} = \{H_i : i \in I\}$ będzie rodziną podgrup grupy G ;

- (1) $\bigcap_{i \in I} H_i$ jest podgrupą grupy G ,
- (2) $\bigcup_{i \in I} H_i$ jest podgrupą grupy G , o ile \mathcal{R} jest łańcuchem.

Dowód. (1) Oznaczmy $F = \bigcap_{i \in I} H_i$. Ustalmy $x, y \in F$. Wtedy

$$\forall i \in I(x, y \in H_i),$$

a zatem

$$\forall i \in I(xy^{-1} \in H_i),$$

czyli $xy^{-1} \in F$.

(2) Oznaczmy $F = \bigcup_{i \in I} H_i$. Ustalmy $x, y \in F$. Wtedy

$$\exists i_0 \in I(x, y \in H_{i_0}),$$

a zatem

$$\exists i_0 \in I(xy^{-1} \in H_{i_0}),$$

czyli $xy^{-1} \in F$. □

Definicja 1.6. Niech (G, \cdot) będzie grupą oraz $A \subset G$ pewnym zbiorem. Najmniejszą w sensie inkluzji podgrupę grupy G zawierającą zbiór A (tj. przekrój wszystkich podgrup grupy G zawierających A) nazywamy **podgrupą generowaną przez A** i oznaczamy $\langle A \rangle$.

Uwaga 1.2. Podgrupa grupy G generowana przez zbiór A ma następujące własności:

- (1) $\langle A \rangle < G$,
- (2) $A \subset \langle A \rangle$,
- (3) jeśli $H < G$ oraz $A \subset H$, to wtedy $\langle A \rangle < H$.

Definicja 1.7. Każdy zbiór A o tej własności, że $\langle A \rangle = G$ nazywamy **zbiorem generatorów grupy G** . Jeśli $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ to oznaczamy

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle = \langle A \rangle.$$

Mówimy, że grupa jest **skończenie generowana**, gdy istnieją elementy $g_1, \dots, g_n \in G$ takie, że

$$G = \langle g_1, \dots, g_n \rangle.$$

Uwaga 1.3. W szczególności grupa skończenie generowana nie musi być skończona, na przykład $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$.

Twierdzenie 1.4 (o postaci elementów podgrupy generowanej przez zbiór). Niech (G, \cdot) będzie grupą, niech $A \subset G$. Wówczas

$$\langle A \rangle = \{a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_n^{k_n} : n \in \mathbb{N}, k_i \in \mathbb{Z}, a_i \in A\}.$$

Dowód. Oznaczmy

$$A_1 = \{a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_n^{k_n} : n \in \mathbb{N}, k_i \in \mathbb{Z}, a_i \in A\}.$$

Pokażemy, że $A_1 < G$.

Zauważmy, że $1_G \in A_1$: istotnie, weźmy $a_1 \in A$. Wtedy z definicji potęgi $a_1^0 = 1_G \in A_1$. Zauważmy dalej, że dla $x, y \in A_1$ zachodzi $xy \in A_1$: istotnie, ustalmy $x = a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_n^{k_n}$, $y = b_1^{l_1} b_2^{l_2} \dots b_m^{l_m}$, $n, m \in \mathbb{N}$, $k_i, l_i \in \mathbb{Z}$, $a_i, b_i \in A$. Mamy:

$$xy = a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_n^{k_n} b_1^{l_1} b_2^{l_2} \dots b_m^{l_m} \in A_1.$$

Na koniec zauważmy, że dla $x \in A_1$ zachodzi $x^{-1} \in A_1$: istotnie, ustalmy $x = a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_n^{k_n}$, $n \in \mathbb{N}$, $k_i \in \mathbb{Z}$, $a_i \in A$. Mamy:

$$x^{-1} = (a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_n^{k_n})^{-1} = a_n^{-k_n} a_{n-1}^{-k_{n-1}} \dots a_1^{-k_1} \in A_1.$$

Pozostaje pokazać, że $A_1 = \langle A \rangle$. Inkluzja (\supset) jest oczywista, pozostaje wykazać inkluzję (\subset). Dowód prowadzimy przez indukcję względem n . Dla $n = 1$ ustalmy $a_1 \in A$. Z definicji podgrupy, $a_1^{k_1}$ należy do wszystkich podgrup zawierających a_1 , a więc i zbiór A , zatem z definicji $a_1^{k_1} \in \langle A \rangle$.

Założmy, że twierdzenie zachodzi dla pewnej ustalonej liczby $n > 1$, a więc że dla $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$, $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$ zachodzi

$$a_1^{k_1} \dots a_n^{k_n} \in \langle A \rangle.$$

Wówczas dla $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1} \in A$, $k_1, \dots, k_n, k_{n+1} \in \mathbb{Z}$ zachodzi

$$\underbrace{a_1^{k_1} \dots a_n^{k_n}}_{\in \langle A \rangle} \underbrace{a_{n+1}^{k_{n+1}}}_{\in \langle A \rangle} \in \langle A \rangle.$$

□

Wniosek 1.1. (1) Niech G będzie grupą oraz niech $a \in G$. Wówczas

$$\langle a \rangle = \{a^k : k \in \mathbb{Z}\}.$$

(2) Niech (G, \cdot) będzie grupą abelową oraz niech $\{a_1, \dots, a_n\} \subset G$. Wówczas

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle = \{a_1^{k_1} \dots a_n^{k_n} : k_i \in \mathbb{Z}\}.$$

Przykłady:

- (9) $\langle 1 \rangle = \mathbb{Z}$;
 (10) $\langle 1 \rangle = \mathbb{Z}_n$, $n \in \mathbb{N}$;
 (11) $\langle 2, 3 \rangle = \{2k + 3l : k, l \in \mathbb{Z}\} < \mathbb{Z}$;
 (12) $\langle 4, 5 \rangle = \{4^n 5^m : n, m \in \mathbb{Z}\} < \mathbb{R}^*$;
 (13) W grupie $D(3) = \{ID_3, O_1, O_2, S_1, S_2, S_3\}$ mamy:

$$\begin{aligned} \langle ID_3 \rangle &= \{ID_3\}, \\ \langle O_1 \rangle &= \{ID_3, O_1, O_2\}, \\ \langle O_2 \rangle &= \{ID_3, O_1, O_2\}, \\ \langle S_1 \rangle &= \{ID_3, S_1\}, \\ \langle S_2 \rangle &= \{ID_3, S_2\}, \\ \langle S_3 \rangle &= \{ID_3, S_3\}, \\ \langle O_1, S_1 \rangle &= D(3); \end{aligned}$$

(14) $\mathbb{Q}^* = \langle \{\pm p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n} : n \in \mathbb{N}, k_i \in \mathbb{Z}, p_i \in \mathbb{P}\} \rangle$, gdzie \mathbb{P} oznacza zbiór liczb pierwszych;

(15) W grupie $GL(n, F)$ rozważmy macierze postaci

$$T_{ij}(a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \quad \text{oraz } O_i(a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} i \end{matrix}$$

zwane, odpowiednio, **transwekcjami** oraz **dylatacjami**. Wówczas

$$GL(n, F) = \langle \{T_{ij}(a), O_i(b) : a, b \in F, i, j \in \{1, \dots, n\}\} \rangle.$$