Paweł Gładki

Elementy algebry abstrakcyjnej A

http://www.math.us.edu.pl/ ~ pgladki/

Konsultacje:

Środa, 14:00-15:00, p. 527, Bankowa 14

Jeżeli chcesz spotkać się z prowadzącym podczas konsultacji, postaraj się powiadomić go o tym przed lub po zajęciach, zadzwoń do jego pokoju, lub wyślij mu emaila.

Zasady zaliczania przedmiotu:

- 2 kolokwia, każde warte 15 punktów,
- 2 sprawdziany, każdy warty 6 punktów,
- aktywność na zajęciach, warta 3 punkty,
- egzamin, warty 55 punktów.

Do egzaminu przystępują tylko te osoby, które uzyskają zaliczenie z ćwiczeń.

Warunkiem zaliczenia ćwiczeń jest zdobycie co najmniej 25 punktów.

Warunkiem zdania egzaminu jest zdobycie co najmniej 60 punktów.

Każde kolokwium będzie trwało 90 minut, każdy sprawdzian 20 minut, a egzamin końcowy 180 minut.

Sprawdziany odbędą się na zajęciach w tygodniach:

- **14–20 marca**
- **9–15 maja**

Kolokwia odbędą się na zajęciach w tygodniach:

- **11-17 kwietnia**
- **30 maja –5 czerwca**

Egzamin odbędzie się

- **22 czerwca.**

Plan wykładu:

02.24 Grupy i izomorfizmy grup. Podgrupy, podgrupy generowane przez zbiór.

03.02 Warstwy grupy względem podgrupy. Twierdzenie Lagrange'a. Rząd elementu grupy. Grupy cykliczne.

03.09 Homomorfizmy grup, podgrupy normalne. Grupa ilorazowa, twierdzenie o homomorfizmie.

03.16 Grupy permutacji.

03.23 Pojęcie pierścienia. Podpierścienie, podpierścienie generowane przez zbiór. Specjalne typy elementów pierścienia.

03.30 Homomorfizmy pierścieni, ideały pierścieni. Ideały generowane przez zbiór. Ideały pierwsze i maksymalne.

04.06 Konstrukcja pierścienia wielomianów jednej zmiennej. Wartość wielomianu, pierwiastki wielomianu, funckja wielomianowa. Wielokrotne pierwiastki wielomianów. Różniczkowanie wielomianów.

04.13 Wielomiany wielu zmiennych. Wielomiany symetryczne.

04.20 Lokalizacja pierścienia względem zbioru multyplikatywnego. Pierścienie lokalne.

04.27 Podstawowe pojęcia teorii podzielności.

05.04 Podciała, podciała generowane przez zbiór, rozszerzenia ciał. Charakterystyka pierścienia i ciała, ciała proste i klasyfikacja ciał prostych.

05.11 Rozszerzenie ciała o pierwiastek wielomianu. Ciało rozkładu wielomianu. Ciało algebraicznie domknięte.

05.18 Baza i stopień rozszerzenia. Elementy algebraiczne i przestępne. Rozszerzenia algebraiczne i skończone. Algebraiczne domkniecie ciała.

05.25 Ciała skończone.

06.01 Struktura grupy elementów odwracalnych ciała skończonego.

Literatura:

1. Białynicki-Birula, *Algebra,* PWN, Warszawa 2009.
2. A.I. Kostrykin, *Wstęp do algebry,* PWN, Warszawa 2004.
3. W. Marzantowski, P. Zarzycki, *Elementarna teoria liczb,* PWN, Warszawa 2006.
4. A. Iwaszkiewicz-Rudoszańska, *Wstęp do algebry i teorii liczb,* Wydawnictwo UAM, Poznań 2009.
5. A. Mostowski, M. Stark, *Elementy algebry wyższej,* PWN, Warszawa 1968.
6. W. Narkiewicz, *Teoria liczb,* PWN, Warszawa 2003.
7. W. Sierpiński, *Arytmetyka teoretyczna,* PWN, Warszawa 1967.

Grupy i izomorfizmy grup.

Definicja

Niech A będzie niepustym zbiorem.

Działaniem wewnętrznym *(lub, krótko, działaniem) w zbiorze A nazywamy funkcję $* : A \times A \to A$.*

Niech ponadto B będzie niepustym zbiorem.

Działaniem zewnętrznym *w zbiorze A nazywamy funkcję $* : B \times A \to A$.*

Uwaga

To, że w zbiorze A określono działanie wewnętrzne $*$ w szczególności oznacza, że:

1. $\forall x, y \in A[*(x, y)$ *istnieje*$]$,
2. $\forall x, y \in A[*(x, y) \in A]$.

Zamiast $*(x, y)$ będziemy na ogół pisać $x * y$.

Podobnie, jeśli $B \neq \emptyset$, to to, że w zbiorze A określono działanie zewnętrzne $\diamond$ w szczególności oznacza, że:

1. $\forall a \in B \forall x \in A[\diamond(a, x)$ *istnieje*$]$,
2. $\forall a \in B \forall x \in A[\diamond(a, x) \in A]$.

Zamiast $\diamond(a, x)$ będziemy na ogół pisać $a \diamond x$.

Na tym wykładzie będziemy zajmować się prawie wyłącznie działaniami wewnętrznymi.

Przykłady:

1. Dodawanie liczb naturalnych jest działaniem w zbiorze $\mathbb{N}$. Zauważmy, że dodawanie możemy formalnie zdefiniować rekurencyjnie jako funkcję $d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ warunkiem:

$$d(x, y) = \begin{cases} d(x, 0) = x \\ d(x, S(y)) = S(d(x, y)), \end{cases}$$

gdzie $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ oznacza funkcję następnika liczb naturalnych.

Symbol "+" dla oznaczenia dodawania wprowadził w 1489 roku Johannes Widmann.

2. Mnożenie liczb naturalnych jest działaniem w zbiorze $\mathbb{N}$. Podobnie jak dodawanie, mnożenie możemy zdefiniować rekurencyjnie jako funkcję $m : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ daną warunkiem:

$$m(x, y) = \begin{cases} m(x, 0) = 0, \\ m(x, S(y)) = m(x, y) + x, \end{cases}$$

gdzie, jak poprzednio, $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ oznacza funkcję następnika liczb naturalnych.

Znak "$\times$" dla oznaczenia mnożenia wprowadził w 1631 roku William Oughtred, zaś symbol "$\cdot$" zaproponował Gottfried Wilhelm von Leibniz w roku 1698.

3. Odejmowanie i dzielenie nie są działaniami w zbiorze $\mathbb{N}$: $3 - 5 \notin \mathbb{N}$ oraz $1 \div 2 \notin \mathbb{N}$.

   Z drugiej strony, odejmowanie jest działaniem w $\mathbb{Z}$, a dzielenie jest działaniem w $\mathbb{Q}\backslash\{0\}$.

4. Mnożenie wektorów na płaszczyźnie przez skalary rzeczywiste jest przykładem działania zewnętrznego.

Definicja

Niech A będzie niepustym zbiorem, $a * i \circ$ działaniami w A.

1. *Mówimy, że $*$ jest* **łączne**, *jeżeli*

$$\forall x, y, z \in A[x * (y * z) = (x * y) * z].$$

2. *Mówimy, że $*$ jest* **przemienne**, *jeżeli*

$$\forall x, y \in A[x * y = y * x].$$

3. *Mówimy, że $*$ ma* **element neutralny** *e, jeżeli*

$$\forall x \in A[x * e = e * x = x].$$

4. *Mówimy, że y jest* **elementem odwrotnym** *do x, jeżeli*

$$x * y = y * x = e.$$

5. *Mówimy, że $\circ$ jest* **rozdzielne** *względem $*$, jeżeli*

$$\forall x, y, z \in A[x \circ (y * z) = x \circ y * x \circ z].$$

Przykłady:

5. Dodawanie i mnożenie liczb naturalnych są łączne i przemienne.

   0 jest elementem neutralnym dodawania, a 1 jest elementem neutralnym mnożenia.

   Ponadto mnożenie jest rozdzielne względem dodawania.

   1 nie ma elementu odwrotnego względem dodawania, a 2 nie ma elementu odwrotnego względem mnożenia.

6. Rozważmy dodawanie i mnożenie liczb całkowitych.

   Każda liczba całkowita ma element odwrotny względem dodawania, ale 2 nie ma elementu odwrotnego względem mnożenia.

7. Rozważmy dodawanie i mnożenie liczb wymiernych.

   Każda liczba wymierna ma element odwrotny względem dodawania i każda niezerowa liczba wymierna ma element odwrotny względem mnożenia.

8. Rozważmy dowolny niepusty zbiór X i rodzinę A wszystkich funkcji $f : X \to X$ oraz działanie składania funkcji.

   Jest to działanie łączne, ale nie jest przemienne.

   Funkcja identycznościowa $X \ni x \mapsto x \in X$ jest elementem neutralnym tego działania, a jedyne funkcje, które mają elementy odwrotne, to funkcje różnowartościowe.

Definicja

1. **Algebrą** *nazywamy ciąg*

$$(A, *_1, \ldots, *_n, B_1, \ldots, B_m, \cdot_1, \ldots, \cdot_m),$$

gdzie A jest niepustym zbiorem,$*_1, \ldots, *_n$ działaniami wewnętrznymi w zbiorze A, a $\cdot_1, \ldots, \cdot_m$ działaniami zewnętrznymi w zbiorze A (wraz z odpowiadającymi im zbiorami $B_1, \ldots, B_m$).

2. **Grupą** *nazywamy algebrę $(G, *)$, gdzie $*$ jest łączne, ma element neutralny i każdy element w zbiorze G ma element odwrotny.*

   Jeżeli ponadto $*$ jest przemienne, to grupę $(G, *)$ nazywamy przemienną (lub abelową).

Przykłady:

9. Przykładami algebr znanymi z wykładu z algebry liniowej są ciała, czyli algebry $(F, +, \cdot)$, gdzie $+$ i $\cdot$ są działaniami łącznymi, przemiennymi, mającymi elementy neutralne, odpowiednio, 0 i 1 oraz takie, że każdy element zbiorów, odpowiednio, F i F^* ma element odwrotny.

   Przykładami algebr, w których występują działania zewnętrzne, są przestrzenie liniowe, czyli algebry $(V, +, F, \cdot)$, gdzie $+$ jest działaniem wewnętrznym zbioru F, które jest łączne, przemienne, ma element neutralny i względem którego każdy element zbioru V ma element odwrotny, natomiast $\cdot : F \times V \to V$ jest pewnym działaniem zewnętrznym, przy czym F jest ciałem.

10. **Grupy liczbowe.** $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +)$ są przykładami grup przemiennych. $(\mathbb{N}, +)$ nie jest grupą.

    Podobnie $(\mathbb{Q}^*, \cdot), (\mathbb{R}^*, \cdot), (\mathbb{C}^*, \cdot)$, gdzie $A^* = A \backslash \{0\}$, są grupami przemiennymi. $(\mathbb{N}^*, \cdot)$ i $(\mathbb{Z}^*, \cdot)$ nie są grupami.

11. **Grupy pochodzące od ciała.** Uogólniając poprzedni przykład, dla dowolnego ciała $(F, +, \cdot)$ algebry $(F, +)$ oraz $(F^*, \cdot)$ są grupami przemiennymi.

12. **Grupy reszt.** Niech $n \in \mathbb{N}$ i oznaczmy przez $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$. W zbiorze $\mathbb{Z}_n$ definiujemy **dodawanie modulo** n:

$$x \oplus_n y = \text{ reszta z dzielenia } x + y \text{ przez } n$$

oraz **mnożenie modulo** n:

$$x \otimes_n y = \text{ reszta z dzielenia } x \cdot y \text{ przez } n.$$

Niech ponadto

$$U(\mathbb{Z}_n) = \{k \in \mathbb{Z}_n : NWD(k, n) = 1\}.$$

$(\mathbb{Z}_n, \oplus_n)$ i $(U(\mathbb{Z}_n), \otimes_n)$ są przykładami grup przemiennych. $(\mathbb{Z}_n^*, \otimes_n)$ na ogół nie jest grupą, chyba że n jest liczbą pierwszą – wówczas $\mathbb{Z}_n^* = U(\mathbb{Z}_n)$.

13. **Grupy macierzy.** Niech F będzie dowolnym ciałem, niech $M(n, F)$ oznacza zbiór macierzy kwadratowych stopnia n o współczynnikach z ciała F.

$(M(n, F), +)$ jest grupą przemienną, przy czym $+$ oznacza tu dodawanie macierzy.

Niech

$$GL(n, F) = \{A \in M(n, F) : \det A \neq 0\}.$$

$(GL(n, F), \cdot)$ jest grupą, która na ogół nie jest przemienna, przy czym $\cdot$ oznacza tu mnożenie macierzy.

Grupę tę nazywamy **grupą liniową stopnia** n nad ciałem F.

Niech

$$SL(n, F) = \{A \in M(n, F) : \det A = 1\}.$$

$(SL(n, F), \cdot)$ jest grupą, która na ogół nie jest przemienna.

Grupę tę nazywamy **specjalną grupą liniową stopnia** n nad ciałem F.

14. **Grupy związane z przestrzenią liniową.** Niech V będzie przestrzenią liniową. $(V, +)$ jest grupą przemienną, przy czym $+$ oznacza tu dodawanie wektorów.

    Oznaczmy przez $Aut(V)$ zbiór automorfizmów liniowych przestrzeni V.

    $(Aut(V), \circ)$ jest grupą, która na ogół nie jest przemienna, przy czym $\circ$ jest tu działaniem składania przekształceń liniowych.

    Załóżmy, że w przestrzeni V zdefiniowaliśmy funkcjonał dwuliniowy ξ określający na V strukturę przestrzeni euklidesowej.

    Oznaczmy przez $O(V)$ zbiór automorfizmów ortogonalnych przestrzeni V.

    $(O(V), \circ)$ jest grupą, która na ogół nie jest przemienna.

    Grupę tę nazywamy **grupą ortogonalną przestrzeni** (V, ξ)**.**

15. **Grupy funkcji.** Niech $(G, *)$ będzie grupą, niech $X \neq \emptyset$. W rodzinie funkcji

$$G^X = \{f : X \to G : f \text{ jest funkcją}\}$$

definiujemy działanie

$$(f \diamond g)(x) = f(x) * g(x).$$

$(G^X, \diamond)$ jest grupą, która jest przemienna, gdy G jest przemienna.

16. **Grupy zadane tabelkami Cayleya.** Działania w grupach często wygodnie jest zapisywać w tabelkach Cayleya.

Na przykład tabelka działań w grupie $(\mathbb{Z}_5^*, \otimes_5)$ wygląda następująco:

$\otimes_5$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

Przykładem grupy zadanej przez tabelkę Cayleya, która nie ma odpowiednika wśród grup liczbowych, jest **grupa czwórkowa Kleina** $(K_4, \cdot)$, gdzie $K_4 = \{a, b, c, d\}$ oraz działanie $\cdot$ zdefiniowane jest następująco:

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

17. **Grupy przekształceń.** Niech $X \neq \emptyset$, niech

$$S(X) = \{f : X \to X : f \text{ jest bijekcją}\}.$$

$(S(X), \circ)$ jest grupą, która na ogół nie jest przemienna, przy czym $\circ$ oznacza tu działanie składania funkcji.

Jeśli $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, to grupę $S(X)$ oznaczamy przez $S(n)$ i nazywamy **grupą symetryczną stopnia** n albo **grupą permutacji stopnia** n.

Dla grup symetrycznych przyjmujemy następującą notację: jeśli $\sigma \in S(n)$ i $\sigma(1) = i_1, \ldots, \sigma(n) = i_n$, to piszemy

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}.$$

Na przykład dla $n = 3$ elementy grupy $S(3)$ to następujące funkcje:

$$id_3 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad o_1 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad o_2 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$s_1 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad s_2 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad s_3 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Tym samym tabelka działań w grupie $S(3)$ wygląda następująco:

$\circ$	id_3	o_1	o_2	s_1	s_2	s_3
id_3	id_3	o_1	o_2	s_1	s_2	s_3
o_1	o_1	o_2	id_3	s_2	s_3	s_1
o_2	o_2	id_3	o_1	s_3	s_1	s_2
s_1	s_1	s_3	s_2	id_3	o_2	o_1
s_2	s_2	s_1	s_3	o_1	id_3	o_2
s_3	s_3	s_2	s_1	o_2	o_1	id_3

Widzimy, że jest to przykład grupy nieprzemiennej:

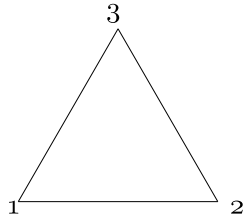
$$s_1 \circ o_1 = s_2 \text{ ale } o_1 \circ s_1 = s_3.$$

18. **Grupy izometrii własnych n-kąta foremnego.** Dla $n \geqslant 3$, $n \in \mathbb{N}$, oznaczmy przez $D(n)$ zbiór izometrii własnych n-kąta foremnego.

    $(D(n), \circ)$ jest grupą.

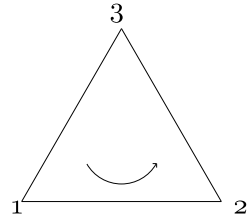
Na przykład grupa $D(3)$ składa się z następujących izometrii trójkąta równobocznego:

ID_3 :



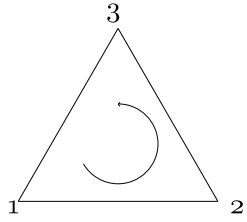
identyczność

O_1 :



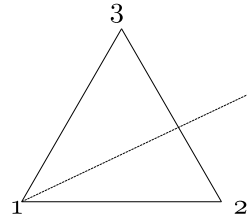
obrót o 120°

O_2 :



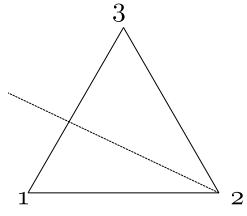
obrót o 240°

S_1 :



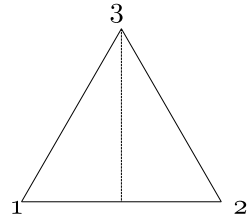
symetria względem symetralnej przechodzącej przez wierzchołek 1

S_2 :



symetria względem symetralnej przechodzącej przez wierzchołek 2

S_3 :



symetria względem symetralnej przechodzącej przez wierzchołek 3

Tabelka działań w grupie $D(3)$ wygląda zatem następująco:

$\circ$	ID_3	O_1	O_2	S_1	S_2	S_3
ID_3	ID_3	O_1	O_2	S_1	S_2	S_3
O_1	O_1	O_2	ID_3	S_2	S_3	S_1
O_2	O_2	ID_3	O_1	S_3	S_1	S_2
S_1	S_1	S_3	S_2	ID_3	O_2	O_1
S_2	S_2	S_1	S_3	O_1	ID_3	O_2
S_3	S_3	S_2	S_1	O_2	O_1	ID_3

.

19. **Skończony produkt grup.** Niech $(G_1, *_1), \ldots, (G_n, *_n)$ będą grupami.

W produkcie kartezjańskim $G = G_1 \times \ldots \times G_n$ definiujemy działanie "po współrzędnych":

$$(a_1, \ldots, a_n) * (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 *_1 b_1, \ldots, a_n *_n b_n).$$

$(G, *)$ jest grupą.

Jako przykład rozważmy grupy $(\mathbb{Z}_2, \oplus_2)$ i $(\mathbb{Z}_2, \oplus_2)$. Wówczas

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$$

i tablelka działań wygląda następująco:

$*$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$(0,1)$	$(0,1)$	$(0,0)$	$(1,1)$	$(1,0)$
$(1,0)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(0,0)$	$(0,1)$
$(1,1)$	$(1,1)$	$(1,0)$	$(0,1)$	$(0,0)$

Definicja

Niech $(G_1, *_1)$ *i* $(G_2, *_2)$ *będą grupami.*

Funkcję $f : G_1 \to G_2$ *nazywamy* **izomorfizmem grup**, *jeżeli jest bijekcją i spełniony jest warunek*

$$\forall x, y \in G_1 [f(x *_1 y) = f(x) *_2 f(y)].$$

Jeżeli istnieje izomorfizm $f : G_1 \to G_2$, *to grupy* G_1 *i* G_2 *nazywamy* **izomorficznymi,** *co oznaczamy przez* $G_1 \cong G_2$.

Przykłady:

20. Grupy $S(3)$ i $D(3)$ są izomorficzne.

    Istotnie, rozważmy funkcję $f : S(3) \to D(3)$, którą, dla wygody oznaczeń, zdefiniujemy tabelką jako:

σ	id_3	o_1	o_2	s_1	s_2	s_3
$f(\sigma)$	ID_3	O_1	O_2	S_1	S_2	S_3

    Oczywiście jest to bijekcja.

    Porównując tabelki działań w $S(3)$ i $D(3)$ widzimy, że jest to też izomorfizm grup.

21. Grupy K_4 i $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ są izomorficzne.

Istotnie, izomorfizm ustala funkcja $f : K_4 \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ dana tabelką

x	a	b	c	d
$f(x)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$

W dowolnej grupie $(G, *)$ wprowadzamy oznaczenie

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 * \ldots * x_n.$$

W szczególności $\prod_{i=1}^{n} x = x^n$.

Tradycyjnie używamy w teorii grup dwóch równoległych terminologii, addytywnej i multyplikatywnej, według następującego schematu:

Definicja	Notacja addytywna	Notacja multyplikatywna
działanie	$+$ dodawanie suma	$\cdot$ mnożenie iloczyn
element neutralny	0 zero	1 jedynka
potęga	nx wielokrotność	x^n potęga
element odwrotny	$-x$ element przeciwny	x^{-1} element odwrotny

Twierdzenie

Niech $(G, *)$ będzie grupą. Wówczas:

1. *element neutralny e jest wyznaczony jednoznacznie;*
2. $\prod_{i=1}^{m} x_i * \prod_{j=m+1}^{m+n} x_j = \prod_{k=1}^{m+n} x_k$, *dla* $x_1, \ldots, x_{m+n} \in G$;
3. $x^{m+n} = x^m x^n$, *dla* $x \in G$;
4. $(x^m)^n = x^{mn}$, *dla* $x \in G$;
5. *element odwrotny jest wyznaczony jednoznacznie;*
6. $(x_1^{n_1} * \ldots * x_k^{n_k})^{-1} = x_k^{-n_k} * \ldots * x_1^{-n_1}$, *dla* $x_1, \ldots, x_k \in G$;
7. $(x^{-1})^{-1} = x$, *dla* $x \in G$;
8. $(x^{-1} * y * x)^n = x^{-1} * y^n * x$, *dla* $x, y \in G$;
9. *jeżeli* $x * y = x * z$, *to* $y = z$ *oraz jeżeli* $y * x = z * x$, *to* $y = z$ (**prawo skracania**).

Dowód.

Udowodnimy dla przykładu część (1):

jeśli e i e' są dwoma elementami neutralnymi, to wówczas

$$e = e * e' = e'$$

. □

Podgrupy, podgrupy generowane przez zbiór.

Definicja

Niech $(G, \cdot)$ *będzie grupą.*

Podzbiór $H \neq \emptyset$ *zbioru* G *nazywamy* **podgrupą** *grupy* G *(piszemy* $H < G$*), gdy* $(H, \cdot\restriction_{H\times H})$ *jest grupą.*

Przykłady:

1. $\mathbb{Z} < \mathbb{R}$ z dodawaniem;
2. $\mathbb{R}^* < \mathbb{C}^*$ z mnożeniem;
3. $SL(n, F) < SL(n, F)$ z mnożeniem macierzy;
4. $\mathbb{Z}_n$ nie jest podgrupą grupy $\mathbb{Z}$.

Twierdzenie

Niech $\varnothing \neq H \subset G$ *i niech* $(G, \cdot)$ *będzie grupą.*

Następujące warunki są równoważne:

1. $H < G$;
2. H *ma następujące własności:*
   - $1_G \in H$,
   - $\forall x, y \in H (xy \in H)$,
   - $\forall x \in H (x^{-1} \in H)$;
3. H *ma następującą własność:*
   - $\forall x, y \in H (xy^{-1} \in H)$.

Dowód.

Równoważność (1) $\Leftrightarrow$ (2) jest oczywista.

Dla dowodu implikacji (2) $\Rightarrow$ (3) ustalmy $x, y \in H$.

Mamy, że $y^{-1} \in H$, więc $xy^{-1} \in H$.

Pozostaje udowodnić implikację (3) $\Rightarrow$ (1).

Ponieważ $H \neq \emptyset$, więc istnieje $x \in H$.

Stąd

$$1_G = xx^{-1} \in H.$$

Dalej:

$$x^{-1} = 1_G x^{-1} \in H.$$

Ustalmy $x, y \in H$.

Wówczas $y^{-1} \in H$, a zatem:

$$xy = x(y^{-1})^{-1} \in H.$$

Przykłady:

5. Zauważmy, że $\mu_n(\mathbb{C}) = \{z \in \mathbb{C}^* : z^n = 1\} < \mathbb{C}^*$.

   Istotnie, ustalmy $z_1, z_2 \in \mu_n(\mathbb{C})$, a zatem niech $z_1^n = 1$ i $z_2^n = 1$.

   Wówczas $(z_1 z_2^{-1})^n = (\frac{z_1}{z_2})^n = \frac{z_1^n}{z_2^n} = \frac{1}{1} = 1$, czyli $z_1 z_2^{-1} \in \mu_n(\mathbb{C})$.

6. Zauważmy, że $\{0, 2, 4\} < \mathbb{Z}_6$ z dodawaniem.

   Istotnie, $0 \in \{0, 2, 4\}$, dodawanie na każdej parze nie wychodzi poza zbiór $\{0, 2, 4\}$ oraz 0 jest elementem symetrycznym dla 0, 2 dla 4 i 4 dla 2.

7. Zauważmy, że $2\mathbb{Z} = \{2k : k \in \mathbb{Z}\} < \mathbb{Z}$ z dodawaniem.
   Istotnie, ustalmy $x, y \in 2\mathbb{Z}$, a zatem niech $x = 2k$ i $y = 2l$.
   Wówczas $x - y = 2k - 2l = 2(k - l)$, czyli $x - y \in 2\mathbb{Z}$.
8. Zauważmy, że jeśli G jest dowolną grupą, to

$$\{1_G\} < G \text{ oraz } G < G.$$

   Podgrupy te nazywamy **podgrupami niewłaściwymi,**
   wszystkie pozostałe – **podgrupami właściwymi.**

Twierdzenie

Niech $\mathcal{R} = \{H_i : i \in I\}$ *będzie rodziną podgrup grupy* G*;*

1. $\bigcap_{i\in I} H_i$ *jest podgrupą grupy* G*,*
2. $\bigcup_{i\in I} H_i$ *jest podgrupą grupy* G*, o ile* $\mathcal{R}$ *jest łańcuchem.*

Dowód.

1. Oznaczmy $F = \bigcap_{i \in I} H_i$. Ustalmy $x, y \in F$.

   Wtedy

   $$\forall i \in I (x, y \in H_i),$$

   a zatem

   $$\forall i \in I (xy^{-1} \in H_i),$$

   czyli $xy^{-1} \in F$.

2. Oznaczmy $F = \bigcup_{i \in I} H_i$.

   Ustalmy $x, y \in F$.

   Wtedy

   $$\exists i_0 \in I (x, y \in H_{i_0}),$$

   a zatem

   $$\exists i_0 \in I (xy^{-1} \in H_{i_0}),$$

   czyli $xy^{-1} \in F$.

Definicja

Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą oraz $A \subset G$ pewnym zbiorem.

Najmniejszą w sensie inkluzji podgrupę grupy G zawierającą zbiór A (tj. przekrój wszystkich podgrup grupy G zawierających A) nazywamy **podgrupą generowaną przez** *A i oznaczamy $\langle A \rangle$.*

Uwaga

Podgrupa grupy G generowana przez zbiór A ma następujące własności:

1. $\langle A \rangle < G$,
2. $A \subset \langle A \rangle$,
3. *jeśli* $H < G$ *oraz* $A \subset H$, *to wtedy* $\langle A \rangle < H$.

Definicja

Każdy zbiór A o tej własności, że $\langle A \rangle = G$ nazywamy **zbiorem generatorów** *grupy G.*

Jeśli $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ to oznaczamy

$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle = \langle A \rangle.$$

Mówimy, że grupa jest **skończenie generowana**, *gdy istnieją elementy $g_1, \ldots, g_n \in G$ takie, że*

$$G = \langle g_1, \ldots, g_n \rangle.$$

Uwaga

W szczególności grupa skończenie generowana nie musi być skończona, na przykład $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$.

Twierdzenie (o postaci elementów podgrupy generowanej przez zbiór)

Niech $(G, \cdot)$ *będzie grupą, niech* $A \subset G$.

Wówczas

$$\langle A \rangle = \{a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_n^{k_n} : n \in \mathbb{N}, k_i \in \mathbb{Z}, a_i \in A\}.$$

Dowód:

Oznaczmy

$$A_1 = \{a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_n^{k_n} : n \in \mathbb{N}, k_i \in \mathbb{Z}, a_i \in A\}.$$

Pokażemy, że $A_1 < G$.

Zauważmy, że $1_G \in A_1$:

Istotnie, weźmy $a_1 \in A$.

Wtedy z definicji potęgi $a_1^0 = 1_G \in A_1$.

Zauważmy dalej, że dla $x, y \in A_1$ zachodzi $xy \in A_1$:

Istotnie, ustalmy $x = a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_n^{k_n}$, $y = b_1^{l_1} b_2^{l_2} \dots b_m^{l_m}$, $n, m \in \mathbb{N}$, $k_i, l_i \in \mathbb{Z}$, $a_i, b_i \in A$.

Mamy:

$$xy = a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_n^{k_n} b_1^{l_1} b_2^{l_2} \dots b_m^{l_m} \in A_1.$$

Na koniec zauważmy, że dla $x \in A_1$ zachodzi $x^{-1} \in A_1$:

Istotnie, ustalmy $x = a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_n^{k_n}$, $n \in \mathbb{N}$, $k_i \in \mathbb{Z}$, $a_i \in A$.

Mamy:

$$x^{-1} = (a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_n^{k_n})^{-1} = a_n^{-k_n} a_{n-1}^{-k_{n-1}} \dots a_1^{-k_1} \in A_1.$$

Pozostaje pokazać, że $A_1 = \langle A \rangle$.

Inkluzja ($\supset$) jest oczywista, pozostaje wykazać inkluzję ($\subset$).

Dowód prowadzimy przez indukcję względem n.

Dla $n = 1$ ustalmy $a_1 \in A$.

Z definicji podgrupy, $a_1^{k_1}$ należy do wszystkich podgrup zawierających a_1, a więc i zbiór A, zatem z definicji $a_1^{k_1} \in \langle A \rangle$.

Załóżmy, że twierdzenie zachodzi dla pewnej ustalonej liczby $n > 1$, a więc że dla $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$, $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}$ zachodzi

$$a_1^{k_1} \ldots a_n^{k_n} \in \langle A \rangle.$$

Wówczas dla dla $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1} \in A$, $k_1, \ldots, k_n, k_{n+1} \in \mathbb{Z}$ zachodzi

$$\underbrace{a_1^{k_1} \ldots a_n^{k_n}}_{\in \langle A \rangle} \underbrace{a_{n+1}^{k_{n+1}}}_{\in \langle A \rangle} \in \langle A \rangle.$$

Wniosek

1. *Niech G będzie grupą oraz niech $a \in G$.*

   Wówczas

   $$\langle a \rangle = \{a^k : k \in \mathbb{Z}\}.$$

2. *Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą abelową oraz niech $\{a_1, \ldots, a_n\} \subset G$.*

   Wówczas

   $$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle = \{a_1^{k_1} \ldots a_n^{k_n} : k_i \in \mathbb{Z}\}.$$

Przykłady:

9. $\langle 1 \rangle = \mathbb{Z}$;
10. $\langle 1 \rangle = \mathbb{Z}_n$, $n \in \mathbb{N}$;
11. $\langle 2, 3 \rangle = \{2k + 3l : k, l \in \mathbb{Z}\} < \mathbb{Z}$;
12. $\langle 4, 5 \rangle = \{4^n 5^m : n, m \in \mathbb{Z}\} < \mathbb{R}^*$;

13. W grupie $D(3) = \{ID_3, O_1, O_2, S_1, S_2, S_3\}$ mamy:

$$\begin{aligned}
\langle ID_3 \rangle &= \{ID_3\}, \\
\langle O_1 \rangle &= \{ID_3, O_1, O_2\}, \\
\langle O_2 \rangle &= \{ID_3, O_1, O_2\}, \\
\langle S_1 \rangle &= \{ID_3, S_1\}, \\
\langle S_2 \rangle &= \{ID_3, S_2\}, \\
\langle S_3 \rangle &= \{ID_3, S_3\}, \\
\langle O_1, S_1 \rangle &= D(3);
\end{aligned}$$

14. $\mathbb{Q}^* = \langle \{ \pm p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n} : n \in \mathbb{N}, k_i \in \mathbb{Z}, p_i \in \mathbb{P} \} \rangle$, gdzie $\mathbb{P}$ oznacza zbiór liczb pierwszych;

15. W grupie $GL(n,F)$ rozważmy macierze postaci

$$T_{ij}(a) = \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \\ \quad\quad\quad\quad\quad i \quad\quad\quad\quad j \end{array}$$

oraz

$$O_i(a) = \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \\ \quad\quad\quad\quad i \end{array}$$

zwane, odpowiednio, **transwekcjami** oraz **dylatacjami.**

Wówczas

$$GL(n, F) = \langle \{T_{ij}(a), O_i(b) : a, b \in F, i, j \in \{1, \ldots, n\}\} \rangle.$$