Homomorfizmy modułów.
Moduł ilorazowy, twierdzenie o homomorfizmie.

Definicja:

Niech R będzie pierścieniem, M, N lewymi R-modułami.

1. Odwzorowanie $\phi : M \to N$ nazywamy **homomorfizmem**, jeśli:
   - $\forall m_1, m_2 \in M [\phi(m_1 + m_2) = \phi(m_1) + \phi(m_2)]$,
   - $\forall a \in R \forall m \in M [\phi(am) = a\phi(m)]$.

   Zbiór wszystkich homomorfizmów modułu M w N oznaczamy $Hom_R(M, N)$.

2. Homomorfizm $\phi : M \to N$ nazywamy **monomorfizmem kategoryjnym modułów,** jeśli dla dowolnych lewego R-modułu K i homomorfizmów $\psi_1, \psi_2 : K \to M$:

$$\text{jeśli } \phi \circ \psi_1 = \phi \circ \psi_2 \text{ to } \psi_1 = \psi_2.$$

3. Homomorfizm $\phi : M \to N$ nazywamy **epimorfizmem kategoryjnym modułów,** jeśli dla dowolnych lewego R-modułu K i homomorfizmów $\psi_1, \psi_2 : N \to K$:

$$\text{jeśli } \psi_1 \circ \phi = \psi_2 \circ \phi \text{ to } \psi_1 = \psi_2.$$

4. Homomorfizm $\phi : M \to N$ nazywamy **izomorfizmem,** jeśli jest różnowartościowy i surjektywny. Dwa moduły M i N nazywamy **izomorficznymi,** jeśli istnieje między nimi izomorfizm, co oznaczamy przez $M \cong N$.
5. Jeśli $\phi : M \to N$ jest homomorfizmem, to zbiór $\phi^{-1}(0_N)$ nazywamy **jądrem** i oznaczamy $\ker \phi$, a zbiór $\phi(M)$ **obrazem** i oznaczamy $\operatorname{im} \phi$.

Przykłady:

1. Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem F, $\phi : V \to W$ przekształceniem liniowym. Wówczas ϕ jest homomorfizmem modułów.
2. Niech A, B będą grupami abelowymi, $\phi : A \to B$ homomorfizmem grup. Wówczas ϕ jest homomorfizmem modułów.
3. Niech M, N będą lewymi R-modułami, $\phi : M \to N$ niech będzie dane wzorem $\phi(m) = 0_N$. Wówczas ϕ jest homomorfizmem modułów, nazywamy go **homomorfizmem zerowym.**

Twierdzenie

Niech R będzie pierścieniem, M, N lewymi R-modułami, $\phi : M \to N$ homomorfizmem modułów. Wówczas:

1. $\ker\phi < M$, $\operatorname{im}\phi < N$;
2. *ϕ jest homomorfizmem różnowartościowym wtedy i tylko wtedy, gdy* $\ker\phi = \{0_M\}$;
3. *ϕ jest homomorfizmem surjektywnym wtedy i tylko wtedy, gdy* $\operatorname{im}\phi = N$;
4. *ϕ jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje homomorfizm $\psi : N \to M$ taki, że*
$$\phi \circ \psi = id_N \text{ oraz } \psi \circ \phi = id_M;$$
5. *ϕ jest homomorfizmem różnowartościowym wtedy i tylko wtedy, gdy jest monomorfizmem kategoryjnym modułów;*
6. *ϕ jest homomorfizmem surjektywnym wtedy i tylko wtedy, gdy jest epimorfizmem kategoryjnym modułów.*

Dowód jest bardzo podobny do dowodu analogicznego rezultatu dla grup, w związku z czym pozostawiamy go Czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.

Twierdzenie

Niech R będzie pierścieniem, M, N lewymi R-modułami, $\phi : M \to N$ homomorfizmem modułów, niech $M_1 < M$, $N_1 < N$. Wówczas:

1. $\phi(M_1) < N$;
2. $\phi^{-1}(N_1) < M$.

Dowód jest bardzo podobny do dowodu analogicznego rezultatu dla grup, w związku z czym pozostawiamy go Czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.

Twierdzenie (lemat o odpowiedniości między podmodułami)

Niech R będzie pierścieniem, M, N lewymi R-modułami, $\pi : M \to N$ homomorfizmem surjektywnym modułów i niech $K = \ker \pi$. Oznaczmy

$$\mathcal{M} = \{M_1 : M_1 < M \text{ oraz } K \subset M_1\}, \mathcal{N} = \{N_1 : N_1 < N\}.$$

Wówczas odwzorowania

$$\phi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}, \phi(M_1) = \pi(M_1),$$

$$\psi : \mathcal{N} \to \mathcal{N}, \psi(N_1) = \pi^{-1}(N)1)$$

są wzajemnie odwrotne.

Dowód jest bardzo podobny do dowodu analogicznego rezultatu dla grup, w związku z czym pozostawiamy go Czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.

Definicja

Niech R będzie pierścieniem, $M_1, \ldots, M_n, N$ lewymi R-modułami. Odwzorowanie $\phi : M_1 \times \ldots \times M_n \to N$ nazywamy **homomorfizmem n-liniowym,** *jeśli dla każdego $i \in \{1, \ldots, n\}$:*

1. *dla $m_1 \in M_1, \ldots, m_i, m_i' \in M_i, \ldots, m_n \in M_n$:*

$$\begin{aligned} &\phi(m_1, \ldots, m_{i-1}, m_i + m_i', m_{i+1}, \ldots, m_n) \\ &\quad = \phi(m_1, \ldots, m_{i-1}, m_i, m_{i+1}, \ldots, m_n) \\ &\quad + \phi(m_1, \ldots, m_{i-1}, m_i', m_{i+1}, \ldots, m_n), \end{aligned}$$

2. *dla $m_1 \in M_1, \ldots, m_n \in M_n$ oraz $a \in R$:*

$$\begin{aligned} &\phi(m_1, \ldots, m_{i-1}, am_i, m_{i+1}, \ldots, m_n) \\ &\quad = a\phi(m_1, \ldots, m_{i-1}, m_i, m_{i+1}, \ldots, m_n). \end{aligned}$$

Definicja i uwaga

Niech R będzie pierścieniem, M lewym R-modułem, $N < M$. Oznaczmy

$$m + N = \{m + n : n \in N\},$$

$$M/N = \{m + N : m \in M\}$$

i w zbiorze M/N określmy działania dodowania i mnożenia zewnętrznego:

$$(m_1 + N) + (m_2 + N) = (m_1 + m_2) + N,$$

$$a(m + N) = am + N.$$

Wówczas M/N jest lewym R-modułem, nazywamy go **modułem ilorazowym** *M względem N.*

Dowód jest bardzo podobny do dowodu analogicznego rezultatu dla grup, w związku z czym pozostawiamy go Czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.

Przykłady:

4. Niech V będzie przestrzenią wektorową nad ciałem F, niech $W < V$. Wówczas przestrzeń ilorazowa V/W jest modułem ilorazowym.
5. Niech A będzie grupą abelową, niech $B < A$. Wówczas grupa ilorazowa A/B jest modułem ilorazowym.
6. Niech R będzie pierścieniem, niech $I \lhd R$. Wówczas pierścień ilorazowy R/I jest modułem ilorazowym.

Definicja i uwaga

Niech R będzie pierścieniem, M lewym R-modułem, $N < M$. Wówczas odwzorowanie $\kappa : M \to M/N$ dane wzorem $\kappa(m) = m + N$ jest homomorfizmem surjektywnym oraz $\ker \kappa = N$. *Nazywamy go* **epimorfizmem kanonicznym.**

Dowód jest bardzo podobny do dowodu analogicznego rezultatu dla grup, w związku z czym pozostawiamy go Czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.

Wniosek

Niech R będzie pierścieniem, M lewym R-modułem, $N \subset M$. Wówczas $N < M$ wtedy i tylko wtedy, gdy N jest jądrem pewnego homomorfizmu.

Dowód jest bardzo podobny do dowodu analogicznego rezultatu dla grup, w związku z czym pozostawiamy go Czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.

Twierdzenie (o homomorfizmie)

Niech R będzie pierścieniem, M, N_1, N_2 lewymi R-modułami, $\phi_1 : M \to N_1$ homomorfizmem surjektywnym, $\phi_2 : M \to N_2$ homomorfizmem.

1. *Jeśli istnieje homomorfizm $\psi : N_1 \to N_2$ taki, że $\psi \circ \phi_1 = \phi_2$, to $\ker \phi_1 \subset \ker \phi_2$.*
2. *Jeśli $\ker \phi_1 \subset \ker \phi_2$, to istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\psi : N_1 \to N_2$ taki, że $\psi \circ \phi_1 = \phi_2$. Ponadto wówczas $\operatorname{im} \psi = \operatorname{im} \phi_2$ oraz $\ker \psi = \phi_1(\ker \phi_2)$.*
   Inaczej: diagram

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "\phi_1"'] \arrow[dr, "\phi_2"] \arrow[d, phantom, "\text{"na"}"] & \\ N_1 \arrow[rr, dashed, "\psi"'] & & N_2 \end{tikzcd}$$

   jest przemienny.

Dowód jest bardzo podobny do dowodu analogicznego rezultatu dla grup, w związku z czym pozostawiamy go Czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.

Wniosek

Niech R *będzie pierścieniem,* M, N_1, N_2 *lewymi* R*-modułami,* $\phi_1 : M \to N_1$ *homomorfizmem surjektywnym,* $\phi_2 : M \to N_2$ *homomorfizmem. Niech ponadto* $\ker \phi_1 \subset \ker \phi_2$*. Wówczas istnieje dokładnie jeden homomorfizm* $\psi : N_1 \to N_2$ *taki, że* $\psi \circ \phi_1 = \phi_2$ *oraz:*

1. *jeśli* ϕ_2 *jest surjektywny, to* ψ *jest surjektywny;*
2. *jeśli* $\ker \phi_1 = \ker \phi_2$*, to* ψ *jest różnowartościowy;*
3. *jeśli* ϕ_2 *jest surjektywny i* $\ker \phi_1 = \ker \phi_2$*, to* ψ *jest izomorfizmem.*

Dowód jest bardzo podobny do dowodu analogicznego rezultatu dla grup, w związku z czym pozostawiamy go Czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.

Wniosek (twierdzenie o homomorfizmie dla modułów ilorazowych)

Niech R będzie pierścieniem, M, N lewymi R-modułami, $K < M$, $\phi : M \to N$ homomorfizmem.

1. *Jeśli istnieje homomorfizm $\psi : M/K \to N$ taki, że $\psi \circ \kappa = \phi$ (gdzie $\kappa : M \to M/N$ oznacza epimorfizm kanoniczny), to $K \subset \ker \phi$.*
2. *Jeśli $K \subset \ker \phi$, to istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\psi : M/K \to N$ taki, że $\psi \circ \kappa = \phi$. Ponadto wówczas $\operatorname{im} \psi = \operatorname{im} \phi$ oraz $\ker \psi = \kappa(\ker \phi)$.*
   Inaczej: diagram

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "\kappa"'] \arrow[dr, "\phi"] \arrow[d, phantom, "\text{"na"}"] & \\ M/K \arrow[rr, dashed, "\psi"'] & & N \end{tikzcd}$$

   jest przemienny.

Dowód jest bardzo podobny do dowodu analogicznego rezultatu dla grup, w związku z czym pozostawiamy go Czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.

Wniosek

Niech R będzie pierścieniem, M, N lewymi R-modułami, $K < M$, $\phi : M \to N$ homomorfizmem. Niech ponadto $K \subset \ker \phi$. Wówczas istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\psi : M/K \to N$ taki, że $\psi \circ \kappa = \phi$ (gdzie $\kappa : M \to M/N$ oznacza epimorfizm kanoniczny) oraz

1. *jeśli ϕ jest surjektywny, to ψ jest surjektywny;*
2. *jeśli $K = \ker \phi$, to ψ jest różnowartościowy;*
3. *jeśli ϕ jest surjektywny i $K = \ker \phi$, to ψ jest izomorfizmem.*

Twierdzenie (I twierdzenie Noether-Dedekinda o izomorfizmie)

Niech R będzie pierścieniem, M, N lewymi R-modułami, $\phi : M \to N$ homomorfizmem. Wówczas

$$\operatorname{im} \phi \cong M / \ker \phi.$$

Twierdzenie (II twierdzenie Noether-Dedekinda o izomorfizmie)

Niech R będzie pierścieniem, M lewym R-modułem, $N_1, N_2 < M$. Wówczas

$$N_1/N_1 \cap N_2 \cong (N_1 + N_2)/N_2.$$

Dowód jest bardzo podobny do dowodu analogicznego rezultatu dla grup, w związku z czym pozostawiamy go Czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.

Twierdzenie (II twierdzenie Noether-Dedekinda o izomorfizmie)

Niech R będzie pierścieniem, M lewym R-modułem, $N_1, N_2 < M$, $N_1 \subset N_2$. Wówczas

$$M/N_2 \cong (M/N_1)/(N_2/N_1).$$

Dowód jest bardzo podobny do dowodu analogicznego rezultatu dla grup, w związku z czym pozostawiamy go Czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.

Twierdzenie (o klasyfikacji unitarnych modułów cyklicznych)

Niech R będzie pierścieniem z jedynką, M lewym unitarnym R-modułem cyklicznym. Wówczas $M \cong R/I$, gdzie $I \lhd R$ jest pewnym ideałem lewostronnym.

Dowód jest bardzo podobny do dowodu analogicznego rezultatu dla grup, w związku z czym pozostawiamy go Czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.