Zestaw zadań 9: Wielomiany symetryczne, konstrukcja pierścienia ułamków względem zbioru multyplikatywnego.

(1) Dany wielomian z pierścienia $\mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3]$ wyrazić przez wielomiany symetryczne podstawowe:
  (a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$,
  (b) $x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2$,
  (c) $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$,
  (d) $x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2$.

(2) Dany wielomian z pierścienia $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ wyrazić przez wielomiany symetryczne podstawowe:
  (a) $(3x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + 3x_2 + x_3)(x_1 + x_2 + 3x_3)$,
  (b) $(x_1^{+}x_2^2)(x_1^2 + x_3^2)(x_2^2 + x_3^2)$,
  (c) $(x_1^2 + x_2 + x_3)(x_1 + x_2^2 + x_3)(x_1 + x_2 + x_3^2)$.

(3) Dany wielomian z pierścienia $\mathbb{Z}_2[x_1, x_2, x_3]$ wyrazić przez wielomiany symetryczne podstawowe:
  (a) $(x_1x_2 + x_3)(x_1x_3 + x_2)(x_2x_3 + x_1)$,
  (b) $(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_3^2)(x_2^2 + x_3^2)$,
  (c) $x_1^8 + x_2^8 + x_3^8$.

(4) Obliczyć $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2$, gdzie x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 są pierwiastkami wielomianu $x^5 - 5x^4 + 6x^3 - 7x^2 + 8x - 9 \in \mathbb{C}[x]$.

(5) Obliczyć $x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3$, gdzie x_1, x_2, x_3, x_4 są pierwiastkami wielomianu $x^4-6x^3+5x^2+2x+7 \in \mathbb{C}[x]$.

(6) Znaleźć wielomian unormowany $f \in \mathbb{C}[x]$ wiedząc, że $\deg f = 3$ oraz że pierwiastki x_1, x_2, x_3 wielomianu f są kwadratami pierwiastków wielomianu $x^3 - 3x^2 + 4x - 1$.

(7) W ciele $\mathbb{Z}_{11}$ rozwiązać układ równań:
  (a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2 \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 2, \end{cases}$
  (b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 1 \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0, \end{cases}$
  (c) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2 = 5 \\ x_1x_2x_3 = 3, \end{cases}$
  (d) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 7 \\ (x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3) = 8, \end{cases}$
  (e) $\begin{cases} x_1x_2 + x_1x_3x_2x_3 = 1 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2 \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0. \end{cases}$

(8) Sprawdzić, że dany podzbiór S dziedziny całkowitości A jest podzbiorem multyplikatywnym:
  (a) A dowolne, $S = A \setminus \{0\}$,
  (b) A dowolne, $S = 1 + I$, gdzie I jest ideałem właściwym pierścienia A,
  (c) $A = \mathbb{Z}$, $S = \{n \in \mathbb{Z} : p \nmid n\}$, gdzie p jest ustaloną liczbą pierwszą,
  (d) $A = \mathbb{Z}$, $S = \{n \in \mathbb{Z} : n = m^k, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$, gdzie m jest ustaloną liczbą naturalną.

(9) Udowodnić, że jeśli $S = \{10^k : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$, to $S^{-1}\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}[\frac{1}{10}]$.

(10) Sprawdziś, że $S = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ jest podzbiorem multyplikatywnym pierścienia $\mathbb{Z}[\frac{1}{6}]$ i udowodnić, że $S^{-1}\mathbb{Z}[\frac{1}{6}] \cong \mathbb{Q}$.

(11) Udowodnić, że jeśli $S = \{3^k : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$, to $S^{-1}\mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \cong \mathbb{Z}[\frac{1}{6}]$.

(12) Niech $A = \mathbb{Z}[\frac{1}{10}]$ i $S = \{6^k : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Znaleźć najmniejszą liczbę naturalną n, dla której zachodzi związek $S^{-1}A \cong \mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$.

(13) Udowodnić, że jeśli $S = \{2^k : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$, to $S^{-1}\mathbb{Z}[x] \cong \mathbb{Z}[\frac{1}{2}][x]$.

(14) Udowodnić, że ciało ułamków pierścienia $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ jest izomorficzne z ciałem $\mathbb{Q}(\sqrt{5}) = \{a + b\sqrt{5} : a, b \in \mathbb{Q}\}$.

(15) Udowodnić, że ciało ułamków pierścienia $\mathbb{Z}[i]$ jest izomorficzne z ciałem $\mathbb{Q}(i) = \{a+bi : a, b \in \mathbb{Q}\}$.

(16) Udowodnić, że ciało ułamków pierścienia $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ jest izomorficzne z ciałem $\mathbb{Q}$.