

2.2. Ciało liczb zespolonych.

Twierdzenie 2.3. Niech $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. W zbiorze \mathbb{C} określamy dodawanie:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

oraz mnożenie:

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Wówczas $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ jest ciałem, w którym elementem neutralnym dodawania jest $(0, 0)$, a elementem neutralnym mnożenia jest $(1, 0)$.

Dowód. Pokażemy dla przykładu, że każdy $\neq (0, 0)$ element ma element odwrotny względem mnożenia. Niech $(0, 0) \neq (a, b) \in \mathbb{C}$. Rozważmy element:

$$\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right) \in \mathbb{C}.$$

Wówczas

$$(a, b) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right) = \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}, \frac{ab - ab}{a^2 + b^2} \right) = (1, 0).$$

□

Definicja 2.4. Ciało $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ nazywamy **ciałem liczb zespolonych**. Zwyczajowo piszemy $a+ib$ zamiast (a, b) oraz a zamiast $(a, 0)$. Liczbę a nazywamy **częścią rzeczywistą** liczby $a+bi$ i oznaczamy $\Re(a+bi)$. Liczbę b nazywamy **częścią urojoną** liczby $a+bi$ i oznaczamy $\Im(a+bi)$.

Przykłady:

- (1) Sprawdzamy, że $(1 - i) + (4 + 7i) = 5 + 6i$, $(-1 + 3i) \cdot (2 - 5i) = ((-1) \cdot 2 - 3 \cdot (-5)) + ((-1) \cdot (-5) + 3 \cdot 2)i = 13 + 11i$ oraz $\frac{-1+3i}{2+5i} = (-1 + 3i) \cdot (2 + 5i)^{-1} = (-1 + 3i) \cdot \left(\frac{-1}{29} + \frac{-3}{29}i\right) = \frac{10}{29}$.
- (2) Podobnie sprawdzamy, że $i \cdot i = -1$.

Uwaga 2.5. Ponieważ, jak zauważyliśmy, $i \cdot i = -1$, intuicyjnie przyjmujemy $\sqrt{-1} = i$.

Definicja 2.6. Niech $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Liczbą sprzężoną z liczbą z nazywamy liczbę $\bar{z} = a - bi$.

Przykład:

- (3) Wprost z definicji widzimy, że $\overline{1 + 2i} = 1 - 2i$.

Twierdzenie 2.7. Niech $z, w \in \mathbb{C}$. Wówczas:

- (1) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$,
- (2) $\overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}$,

$$(3) \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w},$$

$$(4) \overline{\frac{z}{w}} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}, \text{ o ile } w \neq 0.$$

Dowód. Pokażemy dla przykładu własność (4). Niech $z = a + bi$, $w = c + di$. Wówczas

$$\frac{z}{w} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2} = \frac{ca + bd}{c^2 + d^2} + \frac{cb - ad}{c^2 + d^2}i,$$

skąd

$$\overline{\frac{z}{w}} = \frac{ca + bd}{c^2 + d^2} - \frac{cb - ad}{c^2 + d^2}i.$$

Z drugiej strony

$$\frac{\overline{z}}{\overline{w}} = \frac{a - bi}{c - di} = \frac{(a - bi)(c + di)}{c^2 + d^2} = \frac{ca + bd}{c^2 + d^2} - \frac{cb - ad}{c^2 + d^2}i.$$

□

Definicja 2.8. Niech $z = a + bi \in \mathbb{C}$. **Wartością bezwzględną** (albo **modułem**) liczby z nazywamy liczbę rzeczywistą $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Przykład:

$$(4) \text{ Wprost z definicji widzimy, że } |3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

Twierdzenie 2.9. Niech $z, w \in \mathbb{C}$. Wówczas:

$$(1) |z - w| = \text{odległość między punktami } z \text{ i } w,$$

$$(2) |z \cdot w| = |z| \cdot |w|,$$

$$(3) |z|^2 = z \cdot \overline{z}.$$

Dowód. Niech $z = a + bi$, $w = c + di$.

(1) Wprost z definicji modułu:

$$|z - w| = |(a - c) + (b - d)i| = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2},$$

co, z kolei, jest dokładnie równe odległości między punktami o współrzędnych (a, b) i (c, d) .

(2) Podobnie jak w punkcie (1) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} |z \cdot w| &= |(ac - bd) + (ad + bc)i| = \sqrt{a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2} \\ &= \sqrt{a^2(c^2 + d^2) + b^2(c^2 + d^2)} = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2} = |z| \cdot |w|. \end{aligned}$$

(3) Podobnie jak w poprzednich punktach:

$$|z|^2 = a^2 + b^2 = (a + bi) \cdot (a - bi) = z \cdot \overline{z}.$$

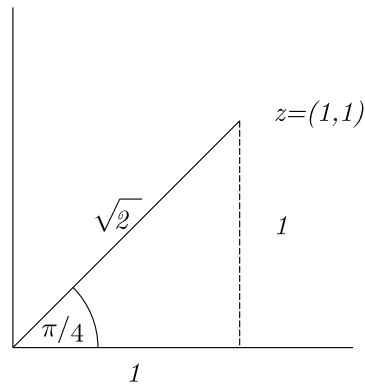
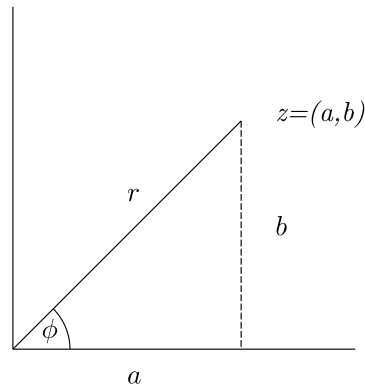
□

Definicja 2.10. Niech $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Niech (r, ϕ) będą takimi liczbami, że $a = r \cos \phi$, $b = r \sin \phi$:

(tj. niech (r, ϕ) będą współrzędnymi biegunowymi punktu (a, b)), a więc niech $z = r \cos \phi + ir \sin \phi = r(\cos \phi + i \sin \phi)$. Przedstawienie to nazywamy **postacią trygonometryczną** liczby z . Kąt skierowany ϕ nazywamy **argumentem** liczby z i oznaczamy $\arg(z)$. Kąt skierowany $\theta \in [0, 2\pi)$ taki, że $\cos \theta = \cos \arg(z)$ i $\sin \theta = \sin \arg(z)$ nazywamy **argumentem głównym** liczby z i oznaczamy $\text{Arg}(z)$.

Przykłady:

(5) Rozważmy liczbę $z = 1 + i$, czyli punkt o współrzędnych $(1, 1)$ na płaszczyźnie zespolonej:



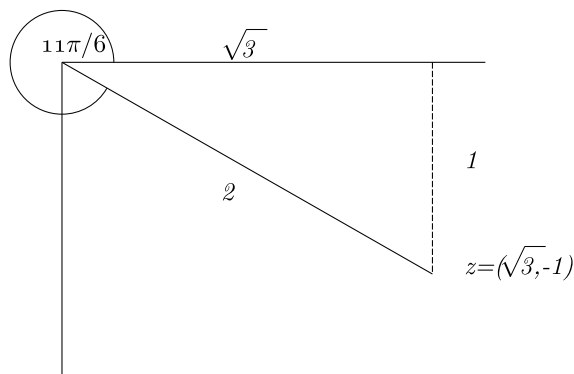
Z rysunku łatwo odczytujemy, że $r = \sqrt{2}$, zaś przykładowa wartość kąta ϕ to $\frac{\pi}{4}$. W szczególności argument główny liczby $z = 1 + i$ to $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{4}$. Argumentami $\arg(z)$ tej liczby mogą też być, na przykład, liczby $\frac{9\pi}{4}$, $\frac{17\pi}{4}$, $\frac{25\pi}{4}$ itd. jako że

$$\sin \frac{\pi}{4} = \sin \frac{9\pi}{4} = \sin \frac{17\pi}{4} = \sin \frac{25\pi}{4} \text{ i równocześnie } \cos \frac{\pi}{4} = \cos \frac{9\pi}{4} = \cos \frac{17\pi}{4} = \cos \frac{25\pi}{4}.$$

Tym samym przykładowe postaci trygonometryczne liczby $z = 1 + i$ to

$$z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{9\pi}{4} + i \sin \frac{9\pi}{4} \right) = \dots$$

(6) Rozważmy liczbę $z = \sqrt{3} - i$, czyli punkt o współrzędnych $(\sqrt{3}, -1)$ na płaszczyźnie zespolonej:



Z rysunku łatwo odczytujemy, że $r = 2$, zaś przykładowa wartość kąta ϕ to $\frac{11\pi}{6}$. W szczególności argument główny liczby $z = \sqrt{3} - i$ to $\text{Arg}(z) = \frac{11\pi}{6}$. Argumentami $\arg(z)$ tej liczby mogą też być, na przykład, liczby $\frac{23\pi}{6}$, $\frac{35\pi}{6}$, $\frac{47\pi}{6}$ itd. jako że

$$\sin \frac{11\pi}{6} = \sin \frac{23\pi}{6} = \sin \frac{35\pi}{6} = \sin \frac{47\pi}{6} \text{ i równocześnie } \cos \frac{11\pi}{6} = \cos \frac{23\pi}{6} = \cos \frac{35\pi}{6} = \cos \frac{47\pi}{6}.$$

Tym samym przykładowe postaci trygonometryczne liczby $z = \sqrt{3} - i$ to

$$z = 2 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right) = 2 \left(\cos \frac{23\pi}{6} + i \sin \frac{23\pi}{6} \right) = \dots$$

Twierdzenie 2.11. Niech $z_1 = r_1(\cos \phi_1 + i \sin \phi_1)$, $z_2 = r_2(\cos \phi_2 + i \sin \phi_2) \in \mathbb{C}$. Wówczas:

- (1) $z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2)]$,
- (2) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\phi_1 - \phi_2) + i \sin(\phi_1 - \phi_2)]$, o ile $z_2 \neq 0$,
- (3) $\frac{1}{z_1} = \frac{1}{r_1} (\cos \phi_1 - i \sin \phi_1)$, o ile $z_1 \neq 0$.

Dowód. Wzory te wynikają wprost ze wzorów na sumy i różnice funkcji trygonometrycznych znane ze szkoły średniej. Udowodnimy dla przykładu własność (1):

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 [(\cos \phi_1 + i \sin \phi_1)(\cos \phi_2 + i \sin \phi_2)] \\ &= r_1 r_2 [(\cos \phi_1 \cos \phi_2 - \sin \phi_1 \sin \phi_2) + i(\cos \phi_1 \sin \phi_2 + \sin \phi_1 \cos \phi_2)] \\ &= r_1 r_2 [\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2)]. \end{aligned}$$

□

Przykład:

- (7) Rozważmy postać trygonometryczną liczby $(1+i)(\sqrt{3}-i)$. W poprzednich przykładach sprawdziliśmy, że

$$1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

oraz

$$\sqrt{3}-i = 2 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right).$$

Wobec tego postać trygonometryczna liczby $(1+i)(\sqrt{3}-i)$ to:

$$2\sqrt{2} \left(\cos \frac{25\pi}{12} + i \sin \frac{25\pi}{12} \right).$$

Zauważmy przy tym, że

$$\frac{25\pi}{12} = \frac{24\pi}{12} + \frac{\pi}{12} = 2\pi + \frac{\pi}{12}$$

wobec czego

$$\cos \frac{24\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{12} \text{ oraz } \sin \frac{24\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{12}$$

i liczbę $(1+i)(\sqrt{3}-i)$ możemy też zapisać jako

$$(1+i)(\sqrt{3}-i) = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right).$$

Tym samym posługując się postacią trygonometryczną liczb zespolonych możemy wyznaczyć dokładne wartości funkcji trygonometrycznych kąta $\frac{\pi}{12}$. Istotnie:

$$\begin{aligned}(1+i)(\sqrt{3}-i) &= (\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)i \\ &= 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}i \right) \\ &= 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i \right),\end{aligned}$$

co po porównaniu z postacią trygonometryczną liczby $(1+i)(\sqrt{3}-i)$ daje

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \text{ oraz } \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Wniosek 2.12 (de Moivre). Niech $z = r(\cos \phi + i \sin \phi) \in \mathbb{C}$, niech $n \in \mathbb{N}$. Wówczas $z^n = r^n(\cos n\phi + i \sin n\phi)$.

Przykład:

(8) Przy pomocy wzorów de Moivre'a potęgowanie potrafi być naprawdę szybkie. Obliczmy dla przykładu $(1+i)^{10}$. Sprawdziliśmy już, że

$$1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

Wobec tego

$$(1+i)^{10} = 32 \left(\cos \frac{10\pi}{4} + i \sin \frac{10\pi}{4} \right).$$

Ale z drugiej strony

$$\frac{10\pi}{4} = \frac{8\pi}{4} + \frac{2\pi}{4} = 2\pi + \frac{\pi}{2}$$

i wobec tego

$$\cos \frac{10\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{2} \text{ oraz } \sin \frac{10\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{2}$$

i liczbę $(1+i)^{10}$ możemy zapisać jako

$$(1+i)^{10} = 32 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 32(0+i) = 32i.$$

Twierdzenie 2.13. Niech $z = r(\cos \phi + i \sin \phi) \in \mathbb{C}$, niech $n \in \mathbb{N}$. Wówczas z ma n różnych pierwiastków stopnia n danych wzorem

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\phi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\phi + 2k\pi}{n} \right),$$

gdzie $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Dowód. Niech $w \in \mathbb{C}$ będzie taką liczbą, że $w^n = z$ i niech

$$w = s(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Wówczas $s^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) = r(\cos \phi + i \sin \phi)$, skąd $s = \sqrt[n]{r}$ oraz

$$\cos n\theta = \cos \phi \text{ i } \sin n\theta = \sin \phi.$$

Tym samym, wobec okresowości funkcji \cos i \sin

$$n\theta = \phi + 2k\pi, \text{ dla } k \in \mathbb{N},$$

a więc $\theta = \frac{\phi + 2k\pi}{n}$, dla $k \in \mathbb{N}$. Zauważmy jednak, że dla $k \geq n$:

$$\frac{\phi + 2k\pi}{n} = \frac{\phi + 2(n + \ell)\pi}{n} = \frac{\phi + 2n\pi + 2\ell\pi}{n} = 2\pi + \frac{\phi + 2\ell\pi}{n},$$

skąd $\cos \frac{\phi + 2k\pi}{n} = \cos \frac{\phi + 2\ell\pi}{n}$ i $\sin \frac{\phi + 2k\pi}{n} = \sin \frac{\phi + 2\ell\pi}{n}$. Wobec tego otrzymujemy tylko n różnych liczb i wystarczy rozpatrywać $k \in \{0, \dots, n-1\}$. \square

Przykład:

(9) Wyznamy wszystkie pierwiastki stopnia 6 z liczby -2 . Sprawdzamy, że

$$-2 = 2(-1 + 0i) = 2(\cos \pi + i \sin \pi).$$

Wobec tego pierwiastki stopnia 6 z -2 wyrażą się następującymi wzorami:

$$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt[6]{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) \\ w_1 &= \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{3\pi}{6} + i \sin \frac{3\pi}{6} \right) = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = \sqrt[6]{2} (0 + i1) = \sqrt[6]{2}i \\ w_2 &= \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = \sqrt[6]{2} \left[\cos \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) \right] = \\ &= \sqrt[6]{2} \left(-\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt[6]{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) \\ w_3 &= \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right) = \sqrt[6]{2} \left[\cos \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) \right] = \\ &= \sqrt[6]{2} \left(-\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt[6]{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) \\ w_4 &= \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{9\pi}{6} + i \sin \frac{9\pi}{6} \right) = \sqrt[6]{2} [\cos (2\pi + \pi) + i \sin (2\pi + \pi)] = \\ &= \sqrt[6]{2} (\cos \pi + i \sin \pi) = \sqrt[6]{2} (-1 + i0) = -\sqrt[6]{2} \\ w_5 &= \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right) = \sqrt[6]{2} \left[\cos \left(2\pi - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(2\pi - \frac{\pi}{6} \right) \right] = \\ &= \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt[6]{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

3. WYKŁAD 3

3.1. Układy równań liniowych.

Definicja 3.1. Niech F będzie ciałem. **Układem m równań liniowych** o niewiadomych x_1, \dots, x_n , $m, n \in \mathbb{N}$, o współczynnikach z ciała F nazywamy układ równań postaci:

$$\mathcal{U} : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

gdzie $a_{ij}, b_j \in F$, $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$. Układ ten nazywamy **jednorodnym**, gdy $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$.

Definicja 3.2. Niech F będzie ciałem. Wielomian $f \in F[x_1, \dots, x_n]$ nazywamy **formą stopnia m** , gdy jest sumą jednomianów stopnia m lub wielomianem zerowym. Zbiór form stopnia m z pierścienia $F[x_1, \dots, x_n]$ będziemy oznaczali przez $F_h[x_1, \dots, x_n]_m$. Formy stopnia 1 będziemy nazywali **formami liniowymi**. Formy stopnia 2 będziemy nazywaliśmy **formami kwadratowymi**.

Uwaga 3.3. Niech F będzie ciałem, niech \mathcal{U} będzie układem m równań liniowych o n niewiadomych i współczynnikach z F . Lewe strony równań należących do \mathcal{U} są formami liniowymi ze zbioru $F_h[x_1, \dots, x_n]_1$, a prawe elementami ciała F .

Definicja 3.4. Niech F będzie ciałem, niech

$$\mathcal{U} : \begin{cases} l_1 = b_1 \\ l_2 = b_2 \\ \vdots \\ l_m = b_m \end{cases}$$

będzie układem równań liniowych, $l_1, \dots, l_m \in F_h[x_1, \dots, x_n]_1$, $b_1, \dots, b_m \in F$. Każde równanie liniowe:

$$a_1l_1 + a_2l_2 + \dots + a_ml_m = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_mb_m,$$

gdzie $a_1, \dots, a_m \in F$, nazywamy **kombinacją liniową** równań danego układu. **Rozwiązaniem** układu \mathcal{U} nazywamy każdy taki ciąg (a_1, \dots, a_n) elementów ciała F , że

$$l_i(a_1, \dots, a_n) = b_i,$$

dla $i \in \{1, \dots, m\}$.

Uwaga 3.5. Każde rozwiązanie układu równań liniowych jest rozwiązaniem każdego równania będącego kombinacją liniową równań tego układu.

Definicja 3.6. Dwa układy równań \mathcal{U}_1 i \mathcal{U}_2 nazywamy **równoważnymi** gdy każde równanie układu \mathcal{U}_1 jest kombinacją liniową równań układu \mathcal{U}_2 i vice versa.

Uwaga 3.7. Równoważne układy równań mają identyczne zbiory rozwiązań.

Definicja 3.8. Układ równań nazywamy **sprzecznym** gdy równanie $0 = 1$ jest kombinacją liniową równań tego układu.

Wniosek 3.9. Spreczny układ równań nie ma rozwiązań.

(1) Rozważmy układ:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 11 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 6 \end{cases}$$

o współczynnikach z ciała \mathbb{Q} . Zaczynamy od sprowadzenia układu do postaci trójkątnej. Jako niewiadomą bazową pierwszego kroku wybieramy x_1 w pierwszym równaniu, a następnie przepisujemy to równanie bez zmian, zaś od drugiego równania odejmujemy pierwsze pomnożone przez 3, od trzeciego pierwsze pomnożone przez 1, a od czwartego pierwsze pomnożone przez 2:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 11 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 6 \end{array} \right. \begin{array}{l} | -3 \cdot I \\ | -I \\ | -2 \cdot I \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 4 \\ -4x_3 + 2x_4 = -7 \\ 4x_3 - 2x_4 = 7 \\ -8x_3 + x_4 + x_5 = -2 \end{array} \right.$$

Jako niewiadomą bazową drugiego kroku wybieramy x_3 w drugim równaniu, a następnie przepisujemy pierwsze dwa równania bez zmian, zaś do trzeciego dodajemy drugie, a od czwartego odejmujemy drugie pomnożone przez 2:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 4 \\ -4x_3 + 2x_4 = -7 \\ 4x_3 - 2x_4 = 7 \\ -8x_3 + x_4 + x_5 = -2 \end{array} \right. \begin{array}{l} | +II \\ | -2 \cdot II \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 4 \\ -4x_3 + 2x_4 = -7 \\ 0 = 0 \\ -3x_4 + x_5 = 12 \end{array} \right.$$

Trzecie równanie jest równaniem tożsamościowym, możemy więc je pominąć w dalszych rozważaniach. Jako niewiadomą bazową trzeciego kroku wybieramy x_5 w ostatnim równaniu. Tym samym sprowadziliśmy układ równań do postaci trójkątnej, w której x_1, x_3, x_5 są niewiadomymi bazowymi, a x_2, x_4 parametrami:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 3x_3 + x_5 + 2x_2 - 2x_4 = 4 \\ -4x_3 + 2x_4 = -7 \\ x_5 - 3x_4 = 12 \end{array} \right.$$

Następnie sprowadzamy układ do postaci diagonalnej. W pierwszym kroku rozważamy niewiadomą bazową x_5 w ostatnim równaniu i eliminujemy ją z pozostałych równań odejmując od pierwszego równania trzecie:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 3x_3 + x_5 + 2x_2 - 2x_4 = 4 \\ -4x_3 + 2x_4 = -7 \\ x_5 - 3x_4 = 12 \end{array} \right. \begin{array}{l} | -III \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 3x_3 + 2x_2 + x_4 = -8 \\ -4x_3 + 2x_4 = -7 \\ x_5 - 3x_4 = 12 \end{array} \right.$$

W drugim kroku rozważamy niewiadomą bazową x_3 w drugim równaniu i eliminujemy ją z pozostałych równań dodając do pierwszego równania drugie pomnożone przez $\frac{3}{4}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 3x_3 + 2x_2 + x_4 = -8 \\ -4x_3 + 2x_4 = -7 \\ x_5 - 3x_4 = 12 \end{array} \right. \begin{array}{l} | +\frac{3}{4} \cdot II \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + \frac{5}{2}x_4 = -\frac{53}{4} \\ -4x_3 + 2x_4 = -7 \\ x_5 - 3x_4 = 12 \end{array} \right.$$

Tym samym sprowadziliśmy układ równań do postaci diagonalnej. Pozostaje zapisać rozwiązanie, przenosimy zatem wszystkie wyrażenia zawierające parametry na prawą stronę, pozostawiając na lewej stronie wyrażenia zawierające niewiadome bazowe, a następnie dzielimy występujące w

układzie równania przez współczynniki występujące przy niewiadomych bazowych, co sprowadza się do podzielenia drugiego równania przez -4 :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \quad \quad \quad = -\frac{53}{4} \quad -2x_2 \quad -\frac{5}{2}x_4 \\ \quad -4x_3 \quad \quad = -7 \quad \quad \quad -2x_4 \\ \quad \quad \quad x_5 = 12 \quad \quad \quad \quad +3x_4 \end{array} \right. \quad | : (-4) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 \quad \quad \quad = -\frac{53}{4} \quad -2x_2 \quad -\frac{5}{2}x_4 \\ \quad x_3 \quad \quad \quad = \frac{7}{4} \quad \quad \quad +\frac{1}{2}x_4 \\ \quad \quad \quad x_5 = 12 \quad \quad \quad \quad +3x_4 \end{array} \right.$$

Dobrze jest uwzględnić w zapisie rozwiązania występujące w nim parametry tak, aby rozwiązanie układu równań o 5 niewiadomych było istotnie pięcioelementowym ciągiem $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = -\frac{53}{4} \quad -2x_2 \quad -\frac{5}{2}x_4 \\ x_2 = \quad \quad \quad x_2 \\ x_3 = \frac{7}{4} \quad \quad \quad +\frac{1}{2}x_4 \\ x_4 = \quad \quad \quad x_4 \\ x_5 = 12 \quad \quad \quad +3x_4 \end{array} \right.$$

Uwaga 3.10. Chcąc zaoszczędzić czas układy równań zapisujemy jako **macierze**, czyli prostokątne tabliczki liczb, które są odpowiednimi współczynnikami w odpowiednich równaniach.

Przykład:

(2) Rozważmy układ:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 4y + 2z + 5t = 0 \\ 2x + y + z + 4t = 0 \\ 3x + 5y + 3z + 2t = 0 \\ x + 4y + 4z + 2t = 0 \end{array} \right.$$

o współczynnikach z ciała \mathbb{Z}_7 . Zapisujemy go w notacji macierzowej, a następnie rozwiązujemy wykonując odpowiednie operacje na wierszach macierzy:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 2 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 2 & 0 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} -2 \cdot w_1 \\ -3 \cdot w_1 \\ -w_1 \end{array} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} -w_2 \\ +3 \cdot w_2 \end{array} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad +3 \cdot w_2$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 0 \end{array} \right]$$

Na tym etapie wygodnie jest wrócić do tradycyjnej notacji. Pozostaje zapisać rozwiązanie układu:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 4y \quad \quad +t = 0 \\ \quad \quad \quad 4z + 6t = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \quad +3y \quad +6t \\ 4z = 0 \quad \quad \quad +t \end{array} \right. \quad | : 4 \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \quad +3y \quad +6t \\ z = 0 \quad \quad \quad +2t \end{array} \right.$$

czyli po uwzględnieniu parametrów:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 3y \quad +6t \\ y = y \\ z = \quad \quad 2t \\ t = \quad \quad t \end{array} \right.$$

(3) Rozważmy układ równań:

$$\begin{cases} (-2 - 4i)x + (-2 - 6i)y + (3 + 4i)z + (-2 - i)t = 0 \\ 2ix - 2iy + z - t = 0 \end{cases}$$

o współczynnikach z ciała \mathbb{C} . Otrzymujemy kolejno:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cccc|c} -2 - 4i & -2 - 6i & 3 + 4i & -2 - i & 0 \\ 2i & -2i & 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \quad -(3 + 4i) \cdot w_2 & \left[\begin{array}{cccc|c} 6 - 10i & -10 & 0 & 1 + 3i & 0 \\ 2i & -2i & 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \quad -\frac{1}{5}i \cdot w_1 \\ & \left[\begin{array}{cccc|c} 6 - 10i & -10 & 0 & 1 + 3i & 0 \\ -2 + \frac{4}{5}i & 0 & 1 & -\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i & 0 \end{array} \right] \quad : (-10) & \left[\begin{array}{cccc|c} -\frac{3}{5} + i & 1 & 0 & -\frac{1}{10} - \frac{3}{10}i & 0 \\ -2 + \frac{4}{5}i & 0 & 1 & -\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

a zatem

$$\begin{cases} (-\frac{3}{5} + i)x + y + (-\frac{1}{10} - \frac{3}{10}i)t = 0 \\ (-2 + \frac{4}{5}i)x + z + (-\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i)t = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = (\frac{3}{5} - i)x + (\frac{1}{10} + \frac{3}{10}i)t \\ z = (2 - \frac{4}{5}i)x + (\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i)t \end{cases}$$

czyli po uwzględnieniu parametrów:

$$\begin{cases} x = x \\ y = (\frac{3}{5} - i)x + (\frac{1}{10} + \frac{3}{10}i)t \\ z = (2 - \frac{4}{5}i)x + (\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i)t \\ t = t. \end{cases}$$