

# Ciało liczb zespolonych

## Twierdzenie:

Niech  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ . W zbiorze  $\mathbb{C}$  określamy dodawanie:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

oraz mnożenie:

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Wówczas  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  jest ciałem, w którym elementem neutralnym dodawania jest  $(0, 0)$ , a elementem neutralnym mnożenia jest  $(1, 0)$ .

## Dowód:

Pokażemy dla przykładu, że każdy  $\neq (0, 0)$  element ma element odwrotny względem mnożenia.

Niech  $(0, 0) \neq (a, b) \in \mathbb{C}$ .

Rozważmy element:

$$\left( \frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right) \in \mathbb{C}.$$

Wówczas

$$(a, b) \cdot \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right) = \left( \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}, \frac{ab - ab}{a^2 + b^2} \right) = (1, 0).$$

## Definicja:

Ciało  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  nazywamy **ciałem liczb zespolonych**.

Zwyczajowo piszemy  $a + ib$  zamiast  $(a, b)$  oraz  $a$  zamiast  $(a, 0)$ .

Liczbę  $a$  nazywamy **częścią rzeczywistą** liczby  $a + bi$  i oznaczamy  $\Re(a + bi)$ .

Liczbę  $b$  nazywamy **częścią urojoną** liczby  $a + bi$  i oznaczamy  $\Im(a + bi)$ .

## Przykłady:

1. Sprawdzamy, że:

$$(1 - i) + (4 + 7i) = 5 + 6i,$$

$$(-1 + 3i) \cdot (2 - 5i) =$$

$$((-1) \cdot 2 - 3 \cdot (-5)) + ((-1) \cdot (-5) + 3 \cdot 2)i = 13 + 11i,$$

$$\frac{-1+3i}{2+5i} = (-1 + 3i) \cdot (2 + 5i)^{-1} = (-1 + 3i) \cdot \left(\frac{-1}{29} + \frac{-3}{29}i\right) = \frac{10}{29}.$$

2. Podobnie sprawdzamy, że  $i \cdot i = -1$ .

## Uwaga:

Ponieważ, jak zauważyliśmy,  $i \cdot i = -1$ , intuicyjnie przyjmujemy  $\sqrt{-1} = i$ .

## Definicja:

Niech  $z = a + bi \in \mathbb{C}$ .

**Liczbą sprzężoną** z liczbą  $z$  nazywamy liczbę  $\bar{z} = a - bi$ .

## Przykład:

3. Wprost z definicji widzimy, że  $\overline{1 + 2i} = 1 - 2i$ .

## Twierdzenie:

Niech  $z, w \in \mathbb{C}$ . Wówczas:

1.  $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ ,

2.  $\overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}$ ,

3.  $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ ,

4.  $\overline{\frac{z}{w}} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$ , o ile  $w \neq 0$ .

## Dowód:

Pokażemy dla przykładu własność (4).

Niech  $z = a + bi$ ,  $w = c + di$ .

Wówczas

$$\frac{z}{w} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2} = \frac{ca + bd}{c^2 + d^2} + \frac{cb - ad}{c^2 + d^2}i,$$

skąd

$$\overline{\frac{z}{w}} = \frac{ca + bd}{c^2 + d^2} - \frac{cb - ad}{c^2 + d^2}i.$$

Z drugiej strony

$$\frac{\overline{z}}{\overline{w}} = \frac{a - bi}{c - di} = \frac{(a - bi)(c + di)}{c^2 + d^2} = \frac{ca + bd}{c^2 + d^2} - \frac{cb - ad}{c^2 + d^2}i.$$

## Definicja:

Niech  $z = a + bi \in \mathbb{C}$ .

**Wartością bezwzględną (albo modułem)** liczby  $z$  nazywamy liczbę rzeczywistą  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

## Przykład:

4. Wprost z definicji widzimy, że  $|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ .

## Twierdzenie:

Niech  $z, w \in \mathbb{C}$ . Wówczas:

1.  $|z - w|$  = odległość między punktami  $z$  i  $w$ ,
2.  $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ ,
3.  $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ .

## Dowód:

Niech  $z = a + bi$ ,  $w = c + di$ .

1. Wprost z definicji modułu:

$$|z - w| = |(a - c) + (b - d)i| = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2},$$

co, z kolei, jest dokładnie równe odległości między punktami o współrzędnych  $(a, b)$  i  $(c, d)$ .

2. Podobnie jak w punkcie (1) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} |z \cdot w| &= |(ac - bd) + (ad + bc)i| \\ &= \sqrt{a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2} \\ &= \sqrt{a^2(c^2 + d^2) + b^2(c^2 + d^2)} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2} \\ &= |z| \cdot |w|. \end{aligned}$$

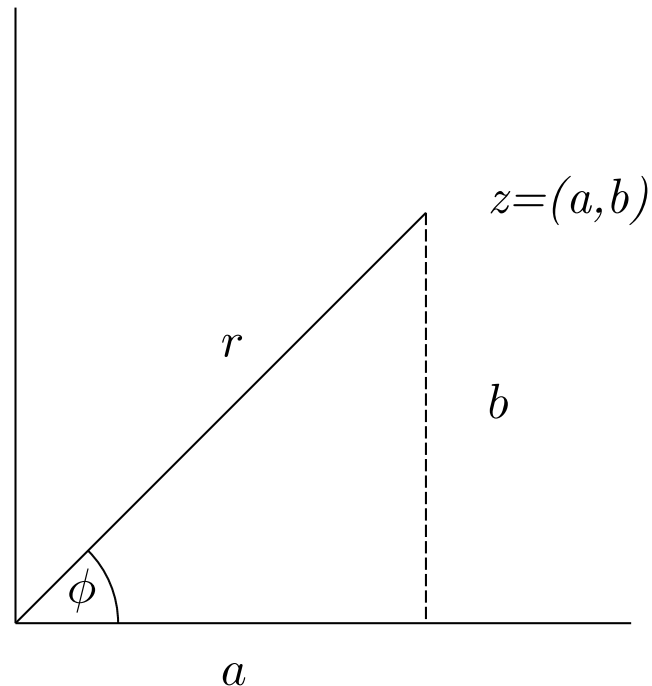
3. Podobnie jak w poprzednich punktach:

$$|z|^2 = a^2 + b^2 = (a + bi) \cdot (a - bi) = z \cdot \bar{z}.$$

## Definicja:

Niech  $z = a + bi \in \mathbb{C}$ .

Niech  $(r, \phi)$  będą takimi liczbami, że  $a = r \cos \phi$ ,  $b = r \sin \phi$ :



(tj. niech  $(r, \phi)$  będą współrzędnymi biegunowymi punktu  $(a, b)$ ),  
a więc niech

$$z = r \cos \phi + ir \sin \phi = r(\cos \phi + i \sin \phi).$$

Przedstawienie to nazywamy **postacią trygonometryczną**  $z$ .

Kąt skierowany  $\phi$  nazywamy **argumentem**  $z$  i oznaczamy  $\arg(z)$ .

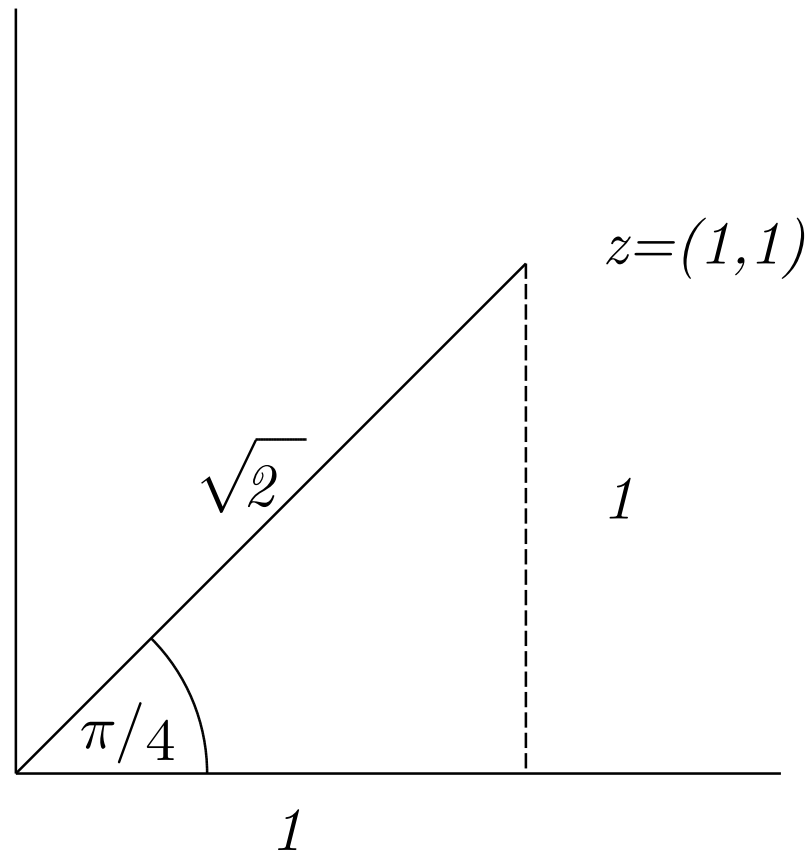
Kąt skierowany  $\theta \in [0, 2\pi)$  taki, że

$$\cos \theta = \cos \arg(z) \text{ i } \sin \theta = \sin \arg(z)$$

nazywamy **argumentem głównym** liczby  $z$  i oznaczamy  $\text{Arg}(z)$ .

## Przykłady:

5. Rozważmy liczbę  $z = 1 + i$ , czyli punkt o współrzędnych  $(1, 1)$  na płaszczyźnie zespolonej:



Z rysunku łatwo odczytujemy, że  $r = \sqrt{2}$ , zaś przykładowa wartość kąta  $\phi$  to  $\frac{\pi}{4}$ .

W szczególności argument główny liczby  $z = 1 + i$  to  $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{4}$ . Argumentami  $\arg(z)$  tej liczby mogą też być, na przykład, liczby  $\frac{9\pi}{4}$ ,  $\frac{17\pi}{4}$ ,  $\frac{25\pi}{4}$  itd. jako że

$$\sin \frac{\pi}{4} = \sin \frac{9\pi}{4} = \sin \frac{17\pi}{4} = \sin \frac{25\pi}{4}$$

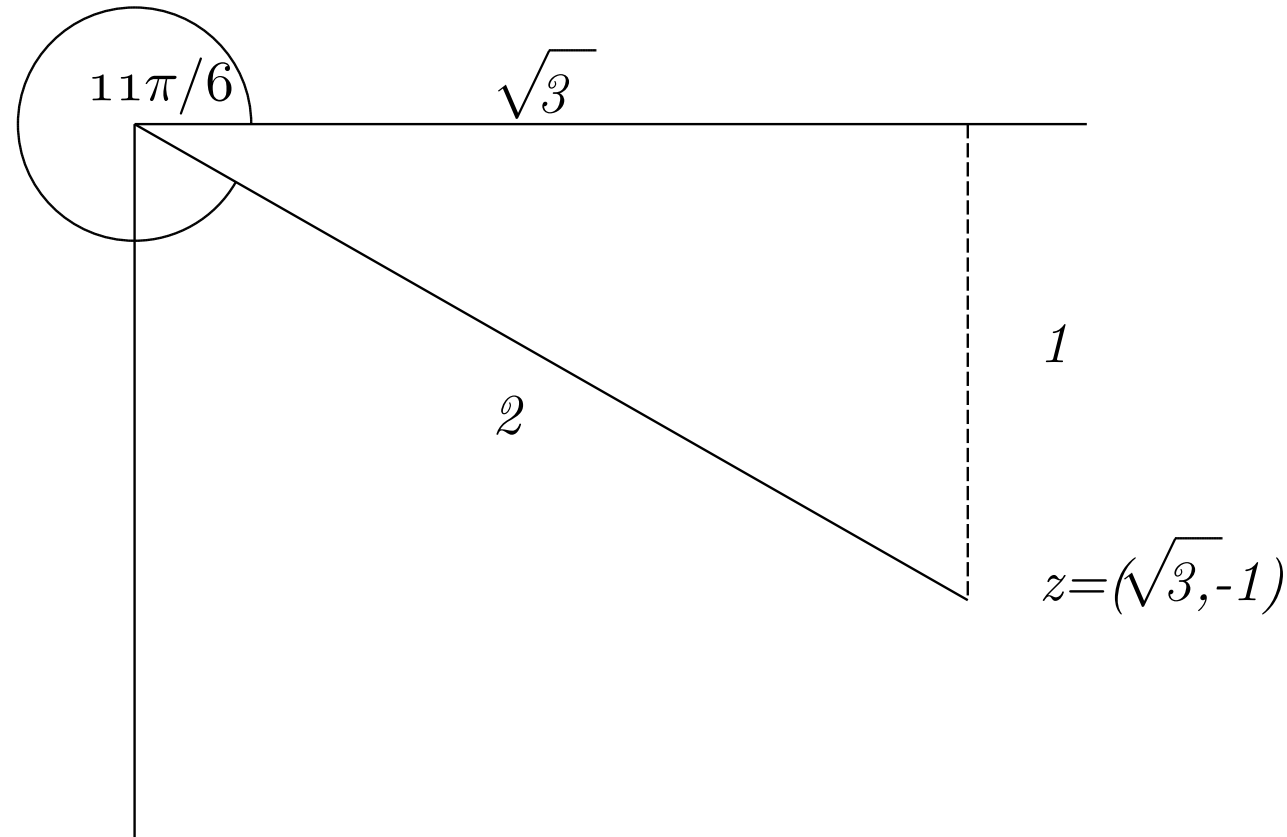
i równocześnie

$$\cos \frac{\pi}{4} = \cos \frac{9\pi}{4} = \cos \frac{17\pi}{4} = \cos \frac{25\pi}{4}.$$

Tym samym przykładowe postaci trygonometryczne liczby  $z = 1 + i$  to

$$z = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left( \cos \frac{9\pi}{4} + i \sin \frac{9\pi}{4} \right) = \dots$$

6. Rozważmy liczbę  $z = \sqrt{3} - i$ , czyli punkt o współrzędnych  $(\sqrt{3}, -1)$  na płaszczyźnie zespolonej:



Z rysunku łatwo odczytujemy, że  $r = 2$ , zaś przykładowa wartość kąta  $\phi$  to  $\frac{11\pi}{6}$ .

W szczególności argument główny liczby  $z = \sqrt{3} - i$  to

$$\text{Arg}(z) = \frac{11\pi}{6}.$$

Argumentami  $\arg(z)$  tej liczby mogą też być, na przykład, liczby  $\frac{23\pi}{6}$ ,  $\frac{35\pi}{6}$ ,  $\frac{47\pi}{6}$  itd. jako że

$$\sin \frac{11\pi}{6} = \sin \frac{23\pi}{6} = \sin \frac{35\pi}{6} = \sin \frac{47\pi}{6}$$

i równocześnie

$$\cos \frac{11\pi}{6} = \cos \frac{23\pi}{6} = \cos \frac{35\pi}{6} = \cos \frac{47\pi}{6}.$$

Tym samym przykładowe postaci trygonometryczne liczby  $z = \sqrt{3} - i$  to

$$z = 2 \left( \cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right) = 2 \left( \cos \frac{23\pi}{6} + i \sin \frac{23\pi}{6} \right) = \dots$$

## Twierdzenie:

Niech  $z_1 = r_1(\cos \phi_1 + i \sin \phi_1)$ ,  $z_2 = r_2(\cos \phi_2 + i \sin \phi_2) \in \mathbb{C}$ .

Wówczas:

1.  $z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2)],$
2.  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\phi_1 - \phi_2) + i \sin(\phi_1 - \phi_2)],$  o ile  $z_2 \neq 0,$
3.  $\frac{1}{z_1} = \frac{1}{r_1} (\cos \phi_1 - i \sin \phi_1),$  o ile  $z_1 \neq 0.$

## Dowód:

Wzory te wynikają wprost ze wzorów na sumy i różnice funkcji trygonometrycznych znane ze szkoły średniej.

Udowodnimy dla przykładu własność (1):

$$\begin{aligned}z_1 z_2 &= r_1 r_2 [(\cos \phi_1 + i \sin \phi_1)(\cos \phi_2 + i \sin \phi_2)] \\ &= r_1 r_2 [(\cos \phi_1 \cos \phi_2 - \sin \phi_1 \sin \phi_2)] \\ &\quad + i(\cos \phi_1 \sin \phi_2 + \sin \phi_1 \cos \phi_2)] \\ &= r_1 r_2 [\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2)].\end{aligned}$$

## Przykład:

7. Rozważmy postać trygonometryczną liczby  $(1 + i)(\sqrt{3} - i)$ .  
W poprzednich przykładach sprawdziliśmy, że

$$1 + i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

oraz

$$\sqrt{3} - i = 2 \left( \cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right).$$

Wobec tego postać trygonometryczna liczby  $(1 + i)(\sqrt{3} - i)$   
to:

$$2\sqrt{2} \left( \cos \frac{25\pi}{12} + i \sin \frac{25\pi}{12} \right).$$

Zauważmy przy tym, że

$$\frac{25\pi}{12} = \frac{24\pi}{12} + \frac{\pi}{12} = 2\pi + \frac{\pi}{12}$$

wobec czego

$$\cos \frac{24\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{12} \text{ oraz } \sin \frac{24\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{12}$$

i liczbę  $(1 + i)(\sqrt{3} - i)$  możemy też zapisać jako

$$(1 + i)(\sqrt{3} - i) = 2\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}\right).$$

Tym samym posługując się postacią trygonometryczną liczb zespolonych możemy wyznaczyć dokładne wartości funkcji trygonometrycznych kąta  $\frac{\pi}{12}$ . Istotnie:

$$\begin{aligned}(1 + i)(\sqrt{3} - i) &= (\sqrt{3} + 1) + (\sqrt{3} - 1)i \\ &= 2\sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}i \right) \\ &= 2\sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}i \right),\end{aligned}$$

co po porównaniu z postacią trygonometryczną liczby  $(1 + i)(\sqrt{3} - i)$  daje

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \text{ oraz } \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

**Wniosek (wzory de Moivre'a):**

Niech  $z = r(\cos \phi + i \sin \phi) \in \mathbb{C}$ , niech  $n \in \mathbb{N}$ .  
Wówczas  $z^n = r^n(\cos n\phi + i \sin n\phi)$ .

## Przykład:

8. Przy pomocy wzorów de Moivre'a potęgowanie potrafi być naprawdę szybkie.

Obliczmy dla przykładu  $(1 + i)^{10}$ .

Sprawdziliśmy już, że

$$1 + i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

Wobec tego

$$(1 + i)^{10} = 32 \left( \cos \frac{10\pi}{4} + i \sin \frac{10\pi}{4} \right).$$

Ale z drugiej strony

$$\frac{10\pi}{4} = \frac{8\pi}{4} + \frac{2\pi}{4} = 2\pi + \frac{\pi}{2}$$

i wobec tego

$$\cos \frac{10\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{2} \text{ oraz } \sin \frac{10\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{2}$$

i liczbę  $(1 + i)^{10}$  możemy zapisać jako

$$(1 + i)^{10} = 32 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 32(0 + 1i) = 32i.$$

## Twierdzenie:

Niech  $z = r(\cos \phi + i \sin \phi) \in \mathbb{C}$ , niech  $n \in \mathbb{N}$ .

Wówczas  $z$  ma  $n$  różnych pierwiastków stopnia  $n$  danych wzorem

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\phi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\phi + 2k\pi}{n} \right),$$

gdzie  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ .

## Dowód:

Niech  $w \in \mathbb{C}$  będzie taką liczbą, że  $w^n = z$  i niech

$$w = s(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Wówczas  $s^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) = r(\cos \phi + i \sin \phi)$ , skąd  $s = \sqrt[n]{r}$  oraz

$$\cos n\theta = \cos \phi \text{ i } \sin n\theta = \sin \phi.$$

Tym samym, wobec okresowości funkcji  $\cos$  i  $\sin$

$$n\theta = \phi + 2k\pi, \text{ dla } k \in \mathbb{N},$$

a więc  $\theta = \frac{\phi + 2k\pi}{n}$ , dla  $k \in \mathbb{N}$ .

Zauważmy jednak, że dla  $k \geq n$ :

$$\frac{\phi + 2k\pi}{n} = \frac{\phi + 2(n + \ell)\pi}{n} = \frac{\phi + 2n\pi + 2\ell\pi}{n} = 2\pi + \frac{\phi + 2\ell\pi}{n},$$

skąd

$$\cos \frac{\phi + 2k\pi}{n} = \cos \frac{\phi + 2\ell\pi}{n} \text{ i } \sin \frac{\phi + 2k\pi}{n} = \sin \frac{\phi + 2\ell\pi}{n}.$$

Wobec tego otrzymujemy tylko  $n$  różnych liczb i wystarczy rozpatrywać  $k \in \{0, \dots, n - 1\}$ .

## Przykład:

9. Wyznamy wszystkie pierwiastki stopnia 6 z liczby  $-2$ .  
Sprawdzamy, że

$$-2 = 2(-1 + 0i) = 2(\cos \pi + i \sin \pi).$$

Wobec tego pierwiastki stopnia 6 z  $-2$  wyrażą się następującymi wzorami:

$$w_0 = \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt[6]{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right)$$

$$\begin{aligned} w_1 &= \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{3\pi}{6} + i \sin \frac{3\pi}{6} \right) = \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \sqrt[6]{2} (0 + i1) = \sqrt[6]{2} i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}w_2 &= \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) \\&= \sqrt[6]{2} \left[ \cos \left( \pi - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( \pi - \frac{\pi}{6} \right) \right] \\&= \sqrt[6]{2} \left( -\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt[6]{2} \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) \\w_3 &= \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right) \\&= \sqrt[6]{2} \left[ \cos \left( \pi + \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( \pi + \frac{\pi}{6} \right) \right] \\&= \sqrt[6]{2} \left( -\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt[6]{2} \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}w_4 &= \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{9\pi}{6} + i \sin \frac{9\pi}{6} \right) \\&= \sqrt[6]{2} [\cos (2\pi + \pi) + i \sin (2\pi + \pi)] \\&= \sqrt[6]{2} (\cos \pi + i \sin \pi) = \sqrt[6]{2} (-1 + i0) = -\sqrt[6]{2} \\w_5 &= \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right) \\&= \sqrt[6]{2} \left[ \cos \left( 2\pi - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( 2\pi - \frac{\pi}{6} \right) \right] \\&= \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt[6]{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right).\end{aligned}$$

$$\cos(\phi_1 + \phi_2) = \cos \phi_1 \cos \phi_2 - \sin \phi_1 \sin \phi_2$$

$$\sin(\phi_1 + \phi_2) = \cos \phi_1 \sin \phi_2 + \sin \phi_1 \cos \phi_2$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

# Układy równań liniowych

## Definicja:

Niech  $F$  będzie ciałem.

**Układem  $m$  równań liniowych** o niewiadomych  $x_1, \dots, x_n$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$ , o współczynnikach z ciała  $F$  nazywamy układ równań postaci:

$$\mathcal{U} : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

gdzie  $a_{ij}, b_j \in F$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$ .

Układ ten nazywamy **jednorodnym**, gdy  $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$ .

## Definicja:

Niech  $F$  będzie ciałem.

Wielomian  $f \in F[x_1, \dots, x_n]$  nazywamy **formą stopnia  $m$** , gdy jest sumą jednomianów stopnia  $m$  lub wielomianem zerowym.

Zbiór form stopnia  $m$  z pierścienia  $F[x_1, \dots, x_n]$  będziemy oznaczali przez  $F_h[x_1, \dots, x_n]_m$ .

Formy stopnia 1 będziemy nazywali **formami liniowymi**.

Formy stopnia 2 będziemy nazywami **formami kwadratowymi**.

## Uwaga:

Niech  $F$  będzie ciałem, niech  $\mathcal{U}$  będzie układem  $m$  równań liniowych o  $n$  niewiadomych i współczynnikach z  $F$ .

Lewe strony równań należących do  $\mathcal{U}$  są formami liniowymi ze zbioru  $F_h[x_1, \dots, x_n]_1$ , a prawe elementami ciała  $F$ .

## Definicja:

Niech  $F$  będzie ciałem, niech

$$\mathcal{U} : \begin{cases} l_1 = b_1 \\ l_2 = b_2 \\ \vdots \\ l_m = b_m \end{cases}$$

będzie układem równań liniowych,  $l_1, \dots, l_m \in F_h[x_1, \dots, x_n]_1$ ,  
 $b_1, \dots, b_m \in F$ .

Każde równanie liniowe:

$$a_1 l_1 + a_2 l_2 + \dots + a_m l_m = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_m b_m,$$

gdzie  $a_1, \dots, a_m \in F$ , nazywamy **kombinacją liniową** równań danego układu.

**Rozwiązaniem** układu  $\mathcal{U}$  nazywamy każdy taki ciąg  $(a_1, \dots, a_n)$  elementów ciała  $F$ , że

$$l_i(a_1, \dots, a_n) = b_i,$$

dla  $i \in \{1, \dots, m\}$ .

## **Uwaga:**

Każde rozwiązanie układu równań liniowych jest rozwiązaniem każdego równania będącego kombinacją liniową równań tego układu.

## Definicja:

Dwa układy równań  $\mathcal{U}_1$  i  $\mathcal{U}_2$  nazywamy **równoważnymi** gdy każde równanie układu  $\mathcal{U}_1$  jest kombinacją liniową równań układu  $\mathcal{U}_2$  i vice versa.

**Uwaga:**

Równoważne układy równań mają identyczne zbiory rozwiązań.

## Definicja:

Układ równań nazywamy **sprzecznym** gdy równanie  $0 = 1$  jest kombinacją liniową równań tego układu.

**Wniosek:**

Sprzeczny układ równań nie ma rozwiązań.

Rozważmy układ równań:

$$\mathcal{U} : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Podamy metodę rozwiązania tego układu przez **eliminację Gaussa**.

**Etap I** sprowadzenie do **postaci trójkątnej**.

Wybieramy równanie i niewiadomą o niezerowym współczynniku i nazywamy ją **niewiadomą bazową** 1 kroku.

Założmy, że jest nią  $x_1$  ze współczynnikiem  $a_{11} \neq 0$ .  
Mnożymy wybrane równanie (u nas równanie pierwsze) przez  $\frac{a_{21}}{a_{11}}$  i odejmujemy od drugiego równania.





**Etap III** zapisujemy rozwiązanie przenosząc parametry na prawą stronę i dzieląc przez współczynniki przy  $x_1, \dots, x_r$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{array} \right. = \begin{array}{l} \frac{\overline{b_1}}{\overline{a_{11}}} - \frac{\overline{a_{1,r+1}}}{\overline{a_{11}}} x_{r+1} - \dots - \frac{\overline{a_{1n}}}{\overline{a_{11}}} x_n \\ \frac{\widetilde{b_2}}{\widetilde{a_{22}}} - \frac{\widetilde{a_{2,r+1}}}{\widetilde{a_{22}}} x_{r+1} - \dots - \frac{\widetilde{a_{2n}}}{\widetilde{a_{22}}} x_n \\ \vdots \\ \frac{\widetilde{b_r}}{\widetilde{a_{rr}}} - \frac{\widetilde{a_{r,r+1}}}{\widetilde{a_{rr}}} x_{r+1} - \dots - \frac{\widetilde{a_{rn}}}{\widetilde{a_{rr}}} x_n. \end{array}$$

## Przykład:

1. Rozważmy układ:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 11 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 6 \end{cases}$$

o współczynnikach z ciała  $\mathbb{Q}$ .

## Uwaga:

Chcąc zaoszczędzić czas układy równań zapisujemy jako **macierze**, czyli prostokątne tabliczki liczb, które są odpowiednimi współczynnikami w odpowiednich równaniach.

## Przykłady:

2. Rozważmy układ:

$$\begin{cases} x + 4y + 2z + 5t = 0 \\ 2x + y + z + 4t = 0 \\ 3x + 5y + 3z + 2t = 0 \\ x + 4y + 4z + 2t = 0 \end{cases}$$

o współczynnikach z ciała  $\mathbb{Z}_7$ .

3. Rozważmy układ równań:

$$\begin{cases} (-2 - 4i)x + (-2 - 6i)y + (3 + 4i)z + (-2 - i)t = 0 \\ 2ix - 2iy + z - t = 0 \end{cases}$$

o współczynnikach z ciała  $\mathbb{C}$ .