3. Wykład 3: Wolne grupy abelowe.

Definicja 3.1. *Grupę abelową* $(F, +)$ *nazywamy* **wolną grupą abelową,** *gdy* $F = \sum_{i\in I}\langle f_i\rangle$, *gdzie* $r(f_i) = +\infty$, $i \in I$. *Rodzinę* $\{f_i : i \in I\}$ *nazywamy* **bazą** *(lub* **zbiorem wolnych generatorów***) wolnej grupy abelowej* F.

Twierdzenie 3.1. (1) *Niech* F *będzie wolną grupą abelową z bazą* $\{f_i : i \in I\}$. *Każdy element* $f \in F$ *ma jednoznaczne przedstawienie postaci*

$$f = \sum_{i\in I} x_i f_i,$$

gdzie $x_i \in \mathbb{Z}$ *oraz* $x_i = 0$ *dla prawie wszystkich* $i \in I$.

(2) *Istnieje wolna grupa abelowa o bazie dowolnej mocy.*

(3) *Każde dwie wolne grupy abelowe o bazach równej mocy są izomorficzne.*

Dowód. (1) Teza wynika wprost z definicji koproduktu grup abelowych.

(2) Ustalmy liczbę kardynalną $\mathfrak{m}$ i niech I będzie takim zbiorem, że $|I| = \mathfrak{m}$. Wówczas grupa $\sum_{i\in I}\mathbb{Z}$ jest wolną grupą abelową.

(3) Ustalmy wolne grupy abelowe F i G o bazach $\{f_i : i \in I\}$ i $\{g_j : j \in J\}$, odpowiednio, gdzie $|I| = |J|$. Istnieje wówczas zbiór K taki, że $\{f_i : i \in I\} = \{f_k : k \in K\}$ oraz $\{g_j : j \in J\} = \{g_k : k \in K\}$ i możemy zdefiniować odwzorowanie $\phi : F \to G$ wzorem

$$\phi(\sum_{k\in K} x_k f_k) = x_k g_k.$$

Bez trudu sprawdzamy, że ϕ jest homomorfizmem i bijekcją, a więc izomorfizmem.

□

Twierdzenie 3.2. *Dowolne dwie bazy wolnej grupy abelowej są tej samej mocy.*

Dowód. Ustalmy wolną grupę abelową F z bazą $\{f_i : i \in I\}$. Oznaczmy $nF = \{nf : f \in F\}$. Zauważmy, że nF jest wolną grupą abelową, dla $n \in \mathbb{N}$: istotnie, dla ustalonego $n \in \mathbb{N}$ bez trudu widzimy, że $nF = \sum_{i\in I}\langle nf_i\rangle$ oraz $r(nf_i) = \infty$, $i \in I$.

Ustalmy liczbę pierwszą p i rozważmy grupę ilorazową F/pF. Zdefiniujmy działanie $\cdot : \mathbb{Z}_p \times F/pF \to F/pF$ wzorem

$$x \cdot (f + pF) = xf + pF, \text{ dla } x \in \mathbb{Z}_p, f + pF \in F/pF.$$

Łatwo sprawdzamy, że F/pF jest przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{Z}_p$. Pokażemy, że $\{f_i + pF : i \in I\}$ jest bazą przestrzeni F/pF.

Oczywiście $\{f_i + pF : i \in I\}$ jest układem generatorów dla F/pF i wystarczy pokazać, że jest też układem liniowo niezależnym. Ustalmy $n \in N$ i załóżmy, że dla pewnych $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}_p$ zachodzi

$$x_1(f_{i_1} + pF) + \ldots + x_n(f_{i_n} + pF) = 0 + pF.$$

Wówczas $x_1 f_{i_1} + \ldots + x_n f_{i_n} \in pF$, czyli dla pewnych $y_{j_1}, \ldots, y_{j_m} \in \mathbb{Z}_p$:

$$x_1 f_{i_1} + \ldots + x_n f_{i_n} = y_{j_1} p f_{j_1} + \ldots + y_{j_m} p f_{j_m},$$

skąd $n = m$, $i_1 = j_1, \ldots, i_n = j_n$ oraz

$$x_1 = y_1 p, \ldots, x_n = y_n p,$$

czyli $x_1 = \ldots = x_n = 0$ w $\mathbb{Z}_p$.

Ponieważ moc dowolnych dwóch baz przestrzeni liniowej jest taka sama, więc i moc dowolnych dwóch baz wolnej grupy abelowej jest taka sama. □

Definicja 3.2. *Niech F będzie wolną grupą abelową. Moc dowolnej jej bazy nazywamy* **rangą** *wolnej grupy abelowej i oznaczamy* $\mathrm{rank} F$.

Wniosek 3.1. *Dowolne dwie wolne grupy abelowe są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy mają równe rangi.*

Twierdzenie 3.3 (własność uniwersalna wolnych grup abelowych)**.** *Niech $(F, +)$ będzie grupą abelową. Wówczas F jest wolną grupą abelową o bazie $\{f_i : i \in I\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej grupy abelowej H i jej rodziny elementów $\{h_i : i \in I\}$ istnieje homomorfizm $h : F \to H$ taki, że $h(f_i) = h_i$.*

Dowód. $(\Rightarrow)$: Zdefiniujmy odwzorowanie $h : F \to H$ wzorem

$$h(\sum_{i \in I} x_i f_i) = \sum_{i \in I} x_i h_i,$$

gdzie $x_i \in \mathbb{Z}$ oraz $x_i = 0$ dla prawie wszystkich $i \in I$, zaś w grupie H przyjęliśmy notację addytywną. Bez trudu sprawdzamy, że h jest dobrze określonym homomorfizmem o żądanych własnościach.

$(\Leftarrow)$: Załóżmy, że dla dowolnej grupy abelowej H i jej rodziny elementów $\{h_i : i \in I\}$ istnieje homomorfizm $h : F \to H$ taki, że $h(f_i) = h_i$. Wobec Twierdzenia 3.1 (3) istnieje wolna grupa abelowa B o bazie $\{h_i : i \in I\}$. Homomorfizm h jest wtedy izomorfizmem wolnych grup abelowych, a więc w szczególności F jest wolna. □

Twierdzenie 3.4. *Każda grupa abelowa jest homomorficznym obrazem pewnej wolnej grupy abelowej.*

Dowód. Pokażemy, że dla każdej grupy abelowej A istnieje wolna grupa abelowa F i jej podgrupa H taka, że $A \cong F/H$. Niech $\{a_i : i\imath I\}$ będzie zbiorem generatorów grupy A. Wobec Twierdzenia 3.1 (3) istnieje wolna grupa abelowa F o bazie $\{a_i : i \in I\}$. Wobec Twierdzenia 3.3 istnieje homomorfizm $h : F \to A$, który w tym wypadku będzie surjekcją. Niech $H = \ker h$. Wówczas $H < F$ i stosując twierdzenie o izomorfizmie otrzymujemy, że $A \cong F/H$. □

Twierdzenie 3.5. *Podgrupa wolnej grupy abelowej jest wolną grupą abelową.*

Lemat 3.1. *Niech $(F, +)$ będzie grupą abelową. Wówczas F jest wolną grupą abelową wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje rosnący ciąg podgrup*

$$\{0\} = N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq \ldots \subsetneq N_\alpha \subsetneq \ldots \subsetneq N_\gamma = F, \alpha, \gamma \in Ord$$

taki, że dla dowolnych $\alpha < \gamma$

$$N_{\alpha+1}/N_\alpha \cong \mathbb{Z}.$$

Dowód. $(\Leftarrow)$: Niech F będzie grupą abelową i niech

$$\{0\} = N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq \ldots \subsetneq N_\alpha \subsetneq \ldots \subsetneq N_\gamma = F, \alpha, \gamma \in Ord$$

będzie takim rosnącym ciągiem podgrup, że dla dowolnych $\alpha < \gamma$

$$N_{\alpha+1}/N_\alpha \cong \mathbb{Z}.$$

Niech dla $\alpha < \gamma$ element $a_{\alpha+1} \in N_{\alpha+1}$ będzie taki, że

$$N_{\alpha+1}/N_\alpha = \langle a_{\alpha+1} + N_\alpha \rangle.$$

Stosując indukcję pozaskończoną, pokażemy, że $F = \sum_{\alpha<\gamma} \langle a_{\alpha+1} \rangle$. Dla $\gamma = 1$ teza jest oczywista. Dla $\gamma > 1$ załóżmy, że dla wszystkich $\alpha < \gamma$ twierdzenie jest prawdziwe. Ustalmy $0 \neq g \in F$. Niech $\beta \in Ord$ będzie taką liczbą, że $g \in N_\beta$ i $g \notin N_{\beta-1}$. Ponieważ $N_\beta/N_{\beta-1} = \langle a_\beta + N_{\beta-1} \rangle$, więc istnieją liczba $n \in \mathbb{N}$

i element $g_1 \in N_{\beta-1}$ takie, że $g = na_\beta + g_1$. Ponieważ $\beta - 1 < \gamma$, więc na mocy założenia indukcyjnego istnieje dokładnie jedno przedstawienie

$$g_1 = n_1 a_1 + \ldots + n_{\beta-1} a_{\beta-1},$$

gdzie $n_\alpha \in \mathbb{Z}$ i $n_\alpha = 0$ dla prawie wszystkich $\alpha < \beta - 1$. Stąd

$$g = n_1 a_1 + \ldots + n_{\beta-1} a_{\beta-1} + n a_\beta.$$

Pozostaje sprawdzić, że $r(a_{\alpha+1}) = \infty$, $\alpha < \gamma$. Przypuśćmy, że $r(a_{\beta+1}) < \infty$, dla pewnego $\beta < \gamma$. Wówczas $r(a_{\beta+1} + N_\beta) < \infty$ i $\mathbb{Z} \cong N_{\beta+1}/N_\beta \supsetneq \langle a_{\beta+1} + N_\beta \rangle$, wbrew wyborowi $a_{\beta+1}$.

($\Rightarrow$) : Niech F będzie wolną grupą abelową o bazie $\{f_\alpha : \alpha < \gamma\}$. Definiujemy ciąg:

- $N_0 = \{0\}$,
- $N_{\alpha+1} = \langle f_{\alpha+1} + N_\alpha \rangle$, gdy α nie jest graniczna,
- $N_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} N_\beta$, gdy α jest graniczna.

Wówczas $\{0\} = N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq \ldots \subsetneq N_\alpha \subsetneq \ldots \subsetneq N_\gamma$ jest rosnącym ciągiem podgrup i $N_{\alpha+1}/N_\alpha \cong \mathbb{Z}$. □

Przechodzimy teraz do dowodu twierdzenia.

Dowód. Niech F będzie wolną grupą abelową, niech $A < F$ i niech

$$\{0\} = N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq \ldots \subsetneq N_\alpha \subsetneq \ldots \subsetneq N_\gamma = F$$

będzie takim rosnącym ciągiem podgrup, że dla dowolnych $\alpha < \gamma$

$$N_{\alpha+1}/N_\alpha \cong \mathbb{Z}.$$

Rozważmy ciąg

$$\{0\} = A \cap N_0 \subseteq A \cap N_1 \subseteq \ldots \subseteq A \cap N_\alpha \subseteq \ldots \subseteq A \cap N_\gamma = A$$

i – ewentualnie zmieniając numerację – wyrzućmy wszystkie składniki, w których nie zachodzą ostre inkluzje. Otrzymujemy ciąg:

$$\{0\} = A \cap N_0 \subseteq A \cap N_{i_1} \subseteq \ldots \subseteq A \cap N_{i_\alpha} \subseteq \ldots \subseteq A \cap N_\tau = A.$$

Ponieważ F jest abelowa, więc $A \lhd F$, a zatem

$$A \cap N_{\alpha+1}/A \cap N_\alpha \cong N_{\alpha+1}/N_\alpha \cong \mathbb{Z}, \text{ dla } \alpha < \gamma.$$

□

Twierdzenie 3.6 (o składniku prostym)**.** *Niech $(A, +)$ będzie grupą abelową.*

(1) *Niech F będzie wolną grupą abelową, a $h : A \to F$ homomorfizmem surjektywnym. Wówczas istnieje podgrupa $F' < A$ taka, że*

$$F \cong F' \text{ oraz } A = F' \oplus \ker h.$$

(2) *Niech H będzie podrupą grupy A a A/H wolną grupą abelową. Wówczas istnieje podgrupa $B < A$ taka, że*

$$B \text{ jest wolną grupą abelową oraz } A = B \oplus H.$$

Dowód. (1) Niech F będzie wolną grupą abelową o bazie $\{f_i : i \in I\}$. Niech $a_i \in A$, $i \in I$, będzie takim elementem, że $h(a_i) = f_i$, niech $F' = \langle \{a_i : i \in I\} \rangle$. Oczywiście F' jest wolną grupą abelową. Pozostaje sprawdzić, że $A = F' \oplus \ker h$.

Ustalmy $a \in A$. Wówczas

$$h(a) = \sum_{i \in I} x_i f_i = h\left(\sum_{i \in I} x_i a_i\right).$$

Zatem $a - \sum_{i \in I} x_i a_i \in \ker h$, skąd $A = F' + \ker h$. Ponadto jeśli $a \in F' \cap \ker h$, to $a = \sum_{i \in I} x_i a_i$ oraz $0 = h(a) = \sum_{i \in I} x_i f_i$, zatem wszystkie x_i równe są 0, skąd $a = 0$.

(2) Rozważmy homomorfizm kanoniczny $\kappa : A \to A/H$. Jest to surjekcja na wolną grupę abelową, skąd wobec udowodnionej już części twierdzenia otrzymujemy tezę.

$\square$