

## 1. WYKŁAD 1: PRODUKTY GRUP. PRODUKTY I KOPRODUKTY GRUP ABELOWYCH.

Przypomnijmy konstrukcje słabych iloczynów (sum) prostych i iloczynów (sum) prostych grup znane z kursowego wykładu algebry. Ze względu na sposób, w jaki konstrukcje te na ogół się wprowadza, można je dodatkowo podzielić na konstrukcje wewnętrzne i zewnętrzne.

**Uwaga 1.1.** Niech  $(G, \cdot)$  będzie grupą,  $H_1, H_2 < G$ . Następujące warunki są równoważne:

- (1)  $G = H_1 H_2$  oraz  $H_1 \cap H_2 = \{1\}$ ,
- (2) każdy element  $g \in G$  ma jednoznaczne przedstawienie w postaci

$$g = h_1 h_2,$$

gdzie  $h_1 \in H_1$  oraz  $h_2 \in H_2$ .

*Dowód.* (1)  $\Rightarrow$  (2): Załóżmy, że  $G = H_1 H_2$  oraz  $H_1 \cap H_2 = \{1\}$ . Załóżmy, że dla pewnych  $h_1, h'_1 \in H_1$  oraz  $h_2, h'_2 \in H_2$  zachodzi  $h_1 h_2 = h'_1 h'_2$ . Wówczas  $(h'_1)^{-1} h_1 = h'_2 h_2^{-1} \in H_1 \cap H_2 = \{1\}$ , więc  $h_1 = h'_1$  oraz  $h_2 = h'_2$ .

(2)  $\Rightarrow$  (1): Załóżmy, że każdy element  $g \in G$  ma jednoznaczne przedstawienie postaci  $g = h_1 h_2$ , gdzie  $h_1 \in H_1$ ,  $h_2 \in H_2$ . Wówczas oczywiście  $G = H_1 H_2$ . Załóżmy, że  $g \in H_1 \cap H_2$ . Wówczas  $g = g \cdot 1 = 1 \cdot g$ . Zatem  $g = 1$ . □

**Oznaczenie:** Gdy  $(G, +)$  zapisana jest w notacji addytywnej, piszemy  $H_1 + H_2$  zamiast  $H_1 H_2$ .

**Definicja 1.1.** Niech  $(G, \cdot)$  będzie grupą,  $H_1, H_2 < G$ .

- (1)  $G$  jest słabym iloczynem (sumą) wewnętrznym podgrup  $H_1$  i  $H_2$ , gdy spełnia jeden (a więc wszystkie) warunki Uwagi 1.1.
- (2)  $G$  jest słabym iloczynem (sumą) półprostym wewnętrznym podgrup  $H_1$  i  $H_2$ , gdy jest słabym iloczynem (sumą) wewnętrznym oraz  $H_1 \triangleleft G$  lub  $H_2 \triangleleft G$ .
- (3)  $G$  jest słabym iloczynem (sumą) prostym wewnętrznym podgrup  $H_1$  i  $H_2$ , gdy jest słabym iloczynem (sumą) wewnętrznym oraz  $H_1 \triangleleft G$  i  $H_2 \triangleleft G$ .

**Przykłady:**

- (1) Rozważmy grupę  $D(n)$ . Niech  $Obr(n)$  oznacza grupę obrotów, a  $Odb(n)$  dowolną dwuelementową grupę generowaną przez odbicie. Wówczas  $D(n) = Obr(n) \cdot Odb(n)$  jest słabym iloczynem półprostym wewnętrznym, ale nie jest słabym iloczynem prostym wewnętrznym.
- (2) Rozważmy grupę abelową  $(A, \cdot)$ . Każda podgrupa grupy abelowej jest normalna, a więc

$$\begin{aligned} A \text{ jest słabym iloczynem wewnętrznym} &\Leftrightarrow A \text{ jest słabym iloczynem półprostym wewnętrznym} \\ &\Leftrightarrow A \text{ jest słabym iloczynem prostym wewnętrznym.} \end{aligned}$$

**Uwaga 1.2.** Niech  $(G, \cdot)$  będzie grupą,  $H_1, H_2 < G$ . Następujące warunki są równoważne:

- (1) odwzorowanie  $\phi : H_1 \times H_2 \rightarrow G$  dane wzorem  $\phi(h_1, h_2) = h_1 h_2$  jest izomorfizmem;
- (2)  $G = H_1 H_2$ ,  $H_1 \cap H_2 = \{1\}$  oraz  $\forall h_1 \in H_1 \forall h_2 \in H_2 (h_1 h_2 = h_2 h_1)$ ;
- (3)  $G$  jest słabym iloczynem prostym wewnętrznym podgrup  $H_1$  i  $H_2$ .

*Dowód.* (1)  $\Rightarrow$  (2) : Ponieważ  $\phi$  jest izomorfizmem, więc jest surjekcją, a zatem  $G = H_1 H_2$ . Ustalmy  $h_1 \in H_1$ ,  $h_2 \in H_2$ . Wówczas:

$$h_1 h_2 = \phi(h_1, h_2) = ((\phi(h_1, h_2))^{-1})^{-1} = (\phi(h_1^{-1}, h_2^{-1}))^{-1} = (h_1^{-1} h_2^{-1})^{-1} = ((h_2 h_1)^{-1})^{-1} = h_2 h_1.$$

Przypuśćmy, że istnieje  $1 \neq g \in H_1 \cap H_2$ . Wówczas  $\phi(1, g) = g = \phi(g, 1)$ , wbrew założeniu, że  $\phi$  jest izomorfizmem, a więc injekcją.

(2)  $\Rightarrow$  (3) : Wystarczy udowodnić, że  $H_1 \triangleleft G$  i  $H_2 \triangleleft G$ . Ustalmy  $g \in G$  i niech  $g = h_1 h_2$  dla  $h_1 \in H_1$ ,  $h_2 \in H_2$ . Ustalmy  $h \in H_1$ . Wówczas:

$$ghg^{-1} = h_1 h_2 h (h_1 h_2)^{-1} = h_1 h_2 h h_2^{-1} h_1^{-1} = h_1 h_2 h_2^{-1} h h_1^{-1} = h_1 h h_1^{-1} \in H_1,$$

a zatem  $gH_1g^{-1} \subset H_1$ . Podobnie pokazujemy, że  $H_2 \triangleleft G$ .

(3)  $\Rightarrow$  (1) : Ponieważ  $G$  jest słabym iloczynem prostym wewnętrznym, a więc w szczególności słabym iloczynem wewnętrznym, więc odwzorowanie  $\phi$  jest dobrze określoną bijekcją. Ustalmy  $(h_1, h_2), (h'_1, h'_2) \in H_1 \times H_2$ . Wówczas:

$$\phi((h_1, h_2) \cdot (h'_1, h'_2)) = \phi(h_1 h'_1, h_2 h'_2) = h_1 h'_1 h_2 h'_2 = h_1 h_2 h'_1 h'_2 = \phi(h_1, h_2) \phi(h'_1, h'_2),$$

a więc  $\phi$  jest homomorfizmem.  $\square$

**Definicja 1.2.** Niech  $H_1, H_2$  będą grupami. Grupę  $H_1 \times H_2$  nazywamy **iloczynem (sumą) prostym zewnętrznym** grup  $H_1$  i  $H_2$ .

**Oznaczenie:** Gdy  $H_1$  i  $H_2$  zapisane są w notacji addytywnej, piszemy  $H_1 \oplus H_2$  zamiast  $H_1 \times H_2$ . Ze względu na izomorfizm z Uwagi 1.2, będziemy na ogół mówić po prostu o iloczynach (sumach) prostych, bez rozróżniania między słabymi iloczynami (sumami) prostymi wewnętrznymi a iloczynami (sumami) prostymi zewnętrznymi. Opisane konstrukcje w naturalny sposób przenoszą się na dowolną skończoną liczbę grup. W ten sposób mówimy o iloczynach (sumach) prostych grup  $H_1, \dots, H_n$ , które oznaczają będziemy przez  $H_1 \times \dots \times H_n$ , lub  $H_1 \oplus \dots \oplus H_n$  w notacji addytywnej.

Konstrukcje te przenoszą się także na nieskończoną liczbę grup. Zobaczymy, że w tym przypadku słabe iloczyny (sumy) i iloczyny (sumy) na ogół różnią się od siebie.

**Definicja i uwaga 1.1.** Niech  $\{G_i : i \in I\}$  będzie rodziną (możliwie nieskończoną) grup, niech

$$\prod_{i \in I} G_i = \{f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} G_i : f(i) \in G_i\}$$

będzie produktem kartezjańskim rodziny zbiorów  $\{G_i : i \in I\}$ . Jeżeli  $f, g \in \prod_{i \in I} G_i$ , to iloczyn  $f \cdot g$  definiujemy jako funkcję  $f \cdot g : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} G_i$  daną wzorem

$$f \cdot g(i) = f(i)g(i).$$

$(\prod_{i \in I} G_i, \cdot)$  jest grupą, którą nazywamy **iloczynem prostym zewnętrznym** lub, krótko, **produktem grup**.

Ponadto definiujemy odwzorowania  $\pi_i : \prod_{i \in I} G_i \rightarrow G_i$  wzorem

$$\pi_i(a) = a(i),$$

dla  $i \in I$ .  $\pi_i, i \in I$ , są dobrze określonymi epimorfizmami grup, które nazywamy **epimorfizmami kanonicznymi**.

Dowód powyższej uwagi pozostawiamy czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.

**Definicja i uwaga 1.2.** Niech  $\{G_i : i \in I\}$  będzie rodziną (możliwie nieskończoną) grup, niech

$$\prod_{i \in I} G_i = \{f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} G_i : f(i) \in G_i\}$$

będzie produktem kartezjańskim rodziny zbiorów  $\{G_i : i \in I\}$ . W zbiorze  $\prod_{i \in I} G_i$  rozpatrzmy podzbiór

$$\prod_{i \in I}^w G_i = \{f \in \prod_{i \in I} G_i : f(i) = 1_{G_i} \text{ dla prawie wszystkich } i \in I\}.$$

Iloczyn  $f \cdot g$ , dla  $f, g \in \prod_{i \in I}^w G_i$  definiujemy jak w grupie  $\prod_{i \in I} G_i$ .  $(\prod_{i \in I}^w G_i, \cdot)$  jest grupą, którą nazywamy **slabym iloczynem prostym zewnętrznym**. W przypadku, gdy grupy  $G_i$ ,  $i \in I$ , są abelowe, piszemy na ogół  $\prod_{i \in I} G_i$  i słaby iloczyn prosty zewnętrzny nazywamy **koproduktem grup abelowych**, a w przypadku, gdy  $G_i$ ,  $i \in I$ , są abelowe i zapisane w notacji addytywnej, piszemy na ogół  $\sum_{i \in I} G_i$  i koprodukt grup abelowych nazywamy **sumą grup abelowych**.

Ponadto definiujemy odwzorowania  $\iota_i : G_i \rightarrow \prod_{i \in I}^w G_i$  wzorem

$$\iota_i(a) = \bar{a}, \text{ gdzie } \bar{a}(j) = \begin{cases} a, & \text{gdy } j = i, \\ 1_{G_j}, & \text{gdy } j \neq i, \end{cases}$$

dla  $i \in I$ .  $\iota_i$ ,  $i \in I$ , są dobrze określonymi monomorfizmami grup, które nazywamy **monomorfizmami kanonicznymi**.

Dowód powyższej uwagi pozostawiamy czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.

**Uwaga 1.3.** Oczywiście w przypadku, gdy  $I$  jest zbiorem skończonym  $\prod_{i \in I} G_i = \prod_{i \in I}^w G_i$ . Uzasadnia to terminologię przyjętą w Definicji 1.2.

Odpowiednikiem Uwagi 1.1 dla przypadku nieskończonego jest:

**Uwaga 1.4.** Niech  $(G, \cdot)$  będzie grupą, niech  $\{H_i : i \in I\}$  będzie rodziną (możliwie nieskończoną) podgrup normalnych grup  $G$ . Następujące warunki są równoważne:

- (1)  $G = \prod_{i \in I}^w G_i$ ,
- (2) każdy element  $g \in G \setminus \{1\}$  ma jednoznaczne przedstawienie w postaci

$$g = h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_n},$$

gdzie  $i_1, \dots, i_n$  są różnymi elementami zbioru  $I$  oraz  $h_{i_k} \neq 1$ ,  $k \in \{1, \dots, n\}$ .

Dowód pozostawiamy jako ćwiczenie.

Odpowiednikiem Uwagi 1.2 dla przypadku nieskończonego jest:

**Uwaga 1.5.** Niech  $(G, \cdot)$  będzie grupą, niech  $\{H_i : i \in I\}$  będzie rodziną (możliwie nieskończoną) podgrup normalnych grup  $G$ . Wówczas, jeżeli

- (1)  $G = \langle \bigcup_{i \in I} H_i \rangle$  oraz
- (2) dla każdego  $k \in I$ ,  $N_k \cap \langle \bigcup_{i \in I \setminus \{k\}} H_i \rangle$ ,

to  $G \cong \prod_{i \in I}^w H_i$ .

*Dowód.* Jeżeli  $a \in \prod_{i \in I}^w H_i$ , to wówczas  $a(i) = 1$ , dla prawie wszystkich  $i \in I$ . Niech zatem  $I_0$  będzie skończonym zbiorem

$$\{i \in I : a(i) \neq 1\}.$$

Wówczas  $\prod_{i \in I_0} a(i)$  jest dobrze zdefiniowanym elementem grupy  $G$ , ponieważ dla  $a(i) \in N_i$  oraz  $a(j) \in N_j$ ,  $j \neq i$ ,  $i, j \in I_0$ , zachodzi  $a(i)a(j) = a(j)a(i)$ , jako że podgrupy  $H_i$ ,  $i \in I$ , są normalne. W rezultacie odwzorowanie  $\phi : \prod_{i \in I}^w H_i \rightarrow G$  dane wzorem

$$\phi(a) = \prod_{i \in I_0} a(i)$$

jest dobrze określonym homomorfizmem.

Ustalmy  $a \in G$ . Ponieważ podgrupy  $\{N_i : i \in I\}$  generują grupę  $G$ , element  $a \in G$  można zapisać jako skończony iloczyn elementów z różnych podgrup  $N_i$ . Ponadto, ponieważ podgrupy  $N_i$ ,  $i \in I$ , są normalne,

mnożenie elementów z różnych podgrup  $N_i$  i  $N_j$ ,  $i \neq j$ , jest przemienne, element  $a \in G$  możemy zapisać jako iloczyn

$$a = \prod_{i \in I_0} a_i,$$

dla pewnego skończonego podzbioru  $I_0 \subset I$ . Tym samym  $\prod_{i \in I_0} \iota_i(a_i) \in \prod_{i \in I}^w N_i$  oraz

$$\phi \left( \prod_{i \in I_0} \iota_i(a_i) \right) = \prod_{i \in I_0} \phi \circ \iota_i(a_i) = \prod_{i \in I_0} a_i = a$$

i tym samym  $\phi$  jest epimorfizmem.

Ustalmy  $a \in \ker \phi$  i niech, jak poprzednio,  $I_0 = \{i \in I : a(i) \neq 1\}$ . Powiedzmy, że  $I_0 = \{i_1, \dots, i_n\}$ . Wówczas  $\phi(a) = \prod_{i \in I_0} a(i) = a(i_1) \cdot \dots \cdot a(i_n) = 1$ , skąd w szczególności

$$a(i_1)^{-1} = a(i_2) \cdot \dots \cdot a(i_n) \in N_{i_1} \cap \left\langle \bigcup_{i \in I_0 \setminus \{i_1\}} \right\rangle = \{1\},$$

a więc  $a(i_1) = 1$ . Powtarzając ten sam argument dla  $i_2, \dots, i_n$ , otrzymujemy, że  $a = 1$ . Tym samym  $\phi$  jest monomorfizmem.  $\square$

Powyższe twierdzenie można częściowo odwrócić:

**Uwaga 1.6.** Niech  $\{G_i : i \in I\}$  będzie rodziną (możliwie nieskończoną) grup. Wówczas:

- (1)  $\prod_{i \in I}^w G_i \triangleleft \prod_{i \in I} G_i$ ;
- (2)  $\iota_i(G_i) \triangleleft \prod_{i \in I} G_i$ , dla każdego  $i \in I$ .

Dowód pozostawiamy jako ćwiczenie.

Przechodzimy teraz do dowodu dwóch najważniejszych twierdzeń tego wykładu podających własności uniwersalne produktów grup i grup abelowych oraz koproduktów grup abelowych.

**Twierdzenie 1.1.** Niech  $\{G_i : i \in I\}$  będzie rodziną grup (lub grup abelowych),  $H$  pewną grupą (lub grupą abelową), niech  $\{\phi_i : H \rightarrow G_i : i \in I\}$  będzie rodziną homomorfizmów grup. Wówczas istnieje dokładnie jeden homomorfizm  $\phi : H \rightarrow \prod_{i \in I} G_i$  taki, że

$$\pi_i \circ \phi = \phi_i,$$

dla  $i \in I$ . Innymi słowy, następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\phi} & \prod_{i \in I} G_i \\ & \searrow \phi_i & \downarrow \pi_i \\ & & G_i \end{array}$$

Ponadto jeśli grupa (lub grupa abelowa)  $G$  ma powyższą własność, to wówczas  $G \cong \prod_{i \in I} G_i$ .

*Dowód.* Dowód przeprowadzimy dla grup, rozumowanie dla grup abelowych jest identyczne. Pokażemy najpierw istnienie stosownego homomorfizmu. W tym celu zdefiniujemy funkcję  $\phi : H \rightarrow \prod_{i \in I} G_i$  wzorem

$$\phi(a) = \bar{a}, \text{ gdzie } \bar{a}(i) = \phi_i(a).$$

Funkcja ta jest homomorfizmem, gdyż dla  $a, b \in H$  zachodzi

$$\overline{ab}(i) = \phi_i(ab) = \phi_i(a)\phi_i(b) = \bar{a}(i)\bar{b}(i),$$

a więc  $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ .

Homomorfizm ten jest wyznaczony jednoznacznie, załóżmy bowiem, że  $\phi' : H \rightarrow \prod_{i \in I} G_i$  jest innym homomorfizmem takim, że  $\pi_i \circ \phi' = \phi_i$ , dla  $i \in I$ . Natenczas, dla dowolnego  $a \in H$ :

$$\phi(a)(i) = \pi_i(\phi(a)) = \phi_i(a) = \pi_i(\phi'(a)) = \phi'(a)(i),$$

a więc  $\phi(a) = \phi'(a)$ , zatem  $\phi = \phi'$ , wobec dowolności  $a \in H$ .

Pozostaje sprawdzić, że jeżeli  $G$  jest grupą wraz z rodziną epimorfizmów  $\{\pi'_i : G \rightarrow G_i : i \in I\}$  taką, że dla dowolnej grupy  $H$  i rodziny homomorfizmów  $\{\phi_i : H \rightarrow G_i : i \in I\}$  istnieje dokładnie jeden homomorfizm  $\phi' : H \rightarrow G$  taki, że

$$\pi_i \circ \phi' = \phi_i,$$

to wówczas  $G \cong \prod_{i \in I} G_i$ . Istotnie, załóżmy, że  $G$  jest taką właśnie grupą i zastosujemy powyższą własność biorąc w charakterze grupy  $H$  i rodziny  $\{\phi_i : H \rightarrow G_i : i \in I\}$  produkt  $\prod_{i \in I} G_i$  wraz z rodziną epimorfizmów kanonicznych. Istnieje zatem homomorfizm  $\phi' : \prod_{i \in I} G_i \rightarrow G$  taki, że następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{array}{ccc} \prod_{i \in I} G_i & \xrightarrow{\phi'} & G \\ & \searrow \pi_i & \downarrow \pi'_i \\ & & G_i \end{array}$$

Na odwrót, korzystając z własności uniwersalnej produktu, biorąc tym razem w charakterze grupy  $H$  i rodziny  $\{\phi_i : H \rightarrow G_i : i \in I\}$  grupę  $G$  wraz z rodziną  $\{\pi'_i : G \rightarrow G_i : i \in I\}$  otrzymujemy istnienie homomorfizmu  $\phi : G \rightarrow \prod_{i \in I} G_i$  takiego, że diagram

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\phi} & \prod_{i \in I} G_i \\ \pi'_i \downarrow & \swarrow \pi_i & \\ G_i & & \end{array}$$

jest przemienny. Łącząc te dwa diagramy w jeden otrzymujemy:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\phi' \circ \phi} & G \\ \pi_i \searrow & & \swarrow \pi_i \\ & G_i & \end{array}$$

skąd w szczególności  $\phi' \circ \phi : G \rightarrow G$  jest takim homomorfizmem, że  $\pi'_i(\phi' \circ \phi) = \pi'_i$ . Korzystając raz jeszcze z własności uniwersalnej grupy  $G$  zastosowanej do niej samej wraz z epimorfizmami  $\{\pi'_i : G \rightarrow G_i : i \in I\}$  wiemy, że istnieje dokładnie jeden homomorfizm o tej własności, co  $\phi' \circ \phi$ . Z drugiej strony widzimy, że własność tę trywialnie spełnia homomorfizm identycznościowy  $id_G : G \rightarrow G$ . Tym samym  $\phi' \circ \phi = id_G$ . Podobnie pokazujemy, że także  $\phi \circ \phi' = id_{\prod_{i \in I} G_i}$ , a zatem, w szczególności,  $\phi$  jest bijekcją, a więc i izomorfizmem.  $\square$

**Twierdzenie 1.2.** Niech  $\{G_i : i \in I\}$  będzie rodziną grup abelowych,  $H$  pewną grupą abelową, niech  $\{\phi_i : G_i \rightarrow H : i \in I\}$  będzie rodziną homomorfizmów grup. Wówczas istnieje dokładnie jeden homomorfizm  $\phi : \prod_{i \in I} G_i \rightarrow H$  taki, że

$$\phi \circ \iota_i = \phi_i,$$

dla  $i \in I$ . Innymi słowy, następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{array}{ccc} \prod_{i \in I} G_i & \xrightarrow{\phi} & H \\ \uparrow \iota_i & \nearrow \phi_i & \\ G_i & & \end{array}$$

Ponadto jeśli grupa abelowa  $G$  ma powyższą własność, to wówczas  $G \cong \prod_{i \in I} G_i$ .

*Dowód.* Pokażemy istnienie stosownego homomorfizmu. Dla ustalonego  $a \in \prod_{i \in I} G_i$  tylko dla skończenie wielu indeksów  $i \in I$   $a(i) \neq 1$  – powiedzmy, że  $I_0 = \{i \in I : a_i \neq 1\} = \{i_1, \dots, i_r\}$ . Zdefiniujmy zatem odwzorowanie  $\phi : \prod_{i \in I} G_i \rightarrow H$  wzorem

$$\phi(a) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } a = 1, \\ \phi_{i_1}(a_{i_1}) \cdot \dots \cdot \phi_{i_r}(a_{i_r}) = \prod_{i \in I_0} \phi_i(a_i), & \text{gdy } a \neq 1. \end{cases}$$

Korzystając z faktu, że  $H$  jest przemienna, bez trudu sprawdzamy, że  $\phi$  jest homomorfizmem. Wprost z określenia  $\phi$  wynika też, że  $\phi \circ \iota = \phi_i$ . Podobnie jak w poprzednim dowodzie sprawdzamy, że  $\phi$  jest wyznaczone jednoznacznie oraz że własność uniwersalna definiuje koprodukt z dokładnością do izomorfizmu.  $\square$

**Uwaga 1.7.** Czytelnik zechce podać przykład dwóch grup nieabelowych, których iloczyn kartezjański nie spełnia powyższej własności uniwersalnej.