

### Zestaw zadań 8: Podprzestrzenie przestrzeni wektorowych.

- (1) Pokazać, że jeśli  $U$  jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej  $V$  nad ciałem  $K$ , to  $U$  jest również przestrzenią liniową nad  $K$ .
- (2) Zbadać, które z następujących podzbiorów przestrzeni  $K^4$  są podprzestrzeniami wektorowymi:
  - a)  $U = \{[t, t + 1, 0, 1] : t \in K\}$ ,
  - b)  $U = \{[t, u, t + u, t - u] : t, u \in K\}$ ,
  - c)  $U = \{[tu, u, t, 0] : t, u \in K\}$ ,
  - d)  $U = \{[x, y, z, t] : x + y - z = 0\}$ ,
  - e)  $U = \{[x, y, z, t] : xy = 0\}$ ,
  - f)  $U = \{t[1, 0, 1, 0] + u[0, -1, 0, 1] : t, u \in K\}$ .
- (3) Zbadać, które z następujących podzbiorów przestrzeni  $\mathbb{R}^4$  są podprzestrzeniami liniowymi:
  - a)  $U = \{[t, u, t + u, t - u] : t \leq u\}$ ,
  - b)  $U = \{[t, u, t, 0] : tu \geq 0\}$ ,
  - c)  $U = \{[x, y, z, t] : x, y, z, t \in \mathbb{Q}\}$ .
- (4) Niech  $\mathbb{R}^\infty$  będzie przestrzenią ciągów elementów ciała  $\mathbb{R}$  (zob. zadanie 3 z poprzedniego zestawu ??, str. ??). Zbadać, które spośród następujących zbiorów są podprzestrzeniami wektorowymi przestrzeni  $\mathbb{R}^\infty$ :
  - a)  $U_1 = \{[a_1, a_2, \dots] : a_{i+1} = a_i + a_{i-1} \text{ dla każdego } i = 2, 3, \dots\}$ ;
  - b)  $U_2 = \{[a_1, a_2, \dots] : a_i = \frac{1}{2}(a_{i-1} + a_{i+1}) \text{ dla każdego } i = 2, 3, \dots\}$ ;
  - c) zbiór wszystkich ciągów  $[a_1, a_2, \dots]$ , których prawie wszystkie wyrazy (wszystkie wyrazy z wyjątkiem co najwyżej skończonej liczby) są równe zero;
  - d) zbiór wszystkich ciągów ograniczonych.
- (5) Niech  $A \subset \mathbb{R}$  będzie zbiorem niepustym oraz niech  $V = \mathbb{R}^A$  będzie przestrzenią funkcji  $A \rightarrow \mathbb{R}$  (zob. zadanie ??, str. ??). Zbadać, które z następujących podzbiorów przestrzeni  $\mathbb{R}^A$  są podprzestrzeniami liniowymi:
  - a) zbiór wszystkich funkcji parzystych, gdy  $A = \mathbb{R}$ .
  - b) zbiór wszystkich funkcji nieparzystych, gdy  $A = \mathbb{R}$ .
  - c) zbiór wszystkich funkcji rosnących.
  - d) zbiór wszystkich funkcji monotonicznych.
  - e)  $U = \{f \in V : f(0) = f(1)\}$ , gdy  $A = [0, 1]$ .
  - f)  $U = \{f \in V : f(x) = 0 \text{ dla każdego } x \in B\}$ , gdy  $B \subset A$  i  $B \neq A$ .
- (6) Sprawdzić, które z określonych podzbiorów przestrzeni wielomianów  $K[X]$  nad ciałem  $K$  są podprzestrzeniami wektorowymi:
  - a)  $U = \{F \in K[X] : F(-1) = 0\}$ ,
  - b)  $U = \{F \in K[X] : F(0) \cdot F(1) = 0\}$ ,
  - c)  $K[X]_{10} = \{F \in K[X] : \text{st}F \leq 10\}$ ,
  - d)  $U = \{F \in K[X] : \text{st}F = 10\}$ .
- (7) Pokazać, że jeśli  $U_1 = \text{lin}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ ,  $U_2 = \text{lin}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l)$ , to

$$U_1 + U_2 = \text{lin}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l).$$

- (8) Wyznaczyć wszystkie podprzestrzenie przestrzeni
  - a)  $\mathbb{Z}_2^2$ ; b)  $\mathbb{Z}_3^2$ ; c)  $\mathbb{Z}_2^3$ .
- (9) Pokazać, że jeśli  $U$  oraz  $W$  są podprzestrzeniami przestrzeni liniowej  $V$ , to  $U \cup W$  jest podprzestrzenią przestrzeni  $V$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $U \subset W$  lub  $W \subset U$ .
- (10) Wykazać, że:

a) Suma  $U_1 + \dots + U_k$  podprzestrzeni przestrzeni liniowej  $V$  jest podprzestrzenią przestrzeni  $V$ .

b)  $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_k \Leftrightarrow$  każdy wektor  $v \in V$  ma jednoznaczne przedstawienie w postaci  $v = u_1 + \dots + u_k$ , gdzie  $u_i \in U_i$  dla  $i = 1, 2, \dots, k$ .

(11) Pokazać, że  $\mathbb{R}^4 = U_1 \oplus U_2$ , jeżeli

a)  $U_1$  jest zbiorem rozwiązań równania  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ , a  $U_2 = \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ .

b)  $U_1$  jest zbiorem rozwiązań układu równań  $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ , natomiast  $U_2 = \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ .

(12) Pokazać, że  $\mathbb{R}^4 = U_1 + U_2$ , lecz  $\mathbb{R}^4 \neq U_1 \oplus U_2$ , jeżeli  $U_1$  jest zbiorem rozwiązań równania  $3x_1 -$

$2x_2 + x_3 + 4x_4 = 0$ , zaś  $U_2 = \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$ . Do równania definiującego  $U_1$  dołożyć jeszcze

jedno równanie tak, aby nowa podprzestrzeń rozwiązań  $U'_1$  spełniała warunek  $\mathbb{R}^4 = U'_1 \oplus U_2$ .

(13) Uzasadnić, że

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 &= \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \oplus \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \oplus \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \oplus \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right). \end{aligned}$$

W przypadku każdej sumy prostej przedstawić wektor  $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$  w postaci sumy wektora z pierwszego składnika sumy prostej i wektora z drugiego składnika sumy prostej.

(14) Niech  $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  (zob. zadanie 4 z poprzedniego zestawu ??, str. ??). Zbiór funkcji nieparzystych oznaczmy literą  $\mathbf{N}$ , natomiast zbiór funkcji parzystych - literą  $\mathbf{P}$ . Pokazać, że  $\mathbf{N}$  oraz  $\mathbf{P}$  są podprzestrzeniami przestrzeni  $V$  oraz że  $V = \mathbf{N} \oplus \mathbf{P}$ . Przedstawić funkcję  $f$  daną wzorem

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

w postaci sumy funkcji parzystej i funkcji nieparzystej.

(15) Niech  $V$  będzie przestrzenią liniową oraz niech  $B \subset A$ . Oznaczmy  $U_B = \{f \in V^A : f(a) = \theta \text{ dla } a \in B\}$ . Pokazać, że  $U_B$  jest podprzestrzenią przestrzeni  $V^A$ . Dla jakich podzbiorów  $B$  oraz  $C$  zbioru  $A$  zachodzi równość  $V^A = U_B + U_C$ , a dla jakich równość  $V^A = U_B \oplus U_C$ ?

(16) Sprawdzić, czy  $K_n^n = \mathbf{S}_n \oplus \mathbf{A}_n$  (por. zadanie ?? str. ??).

- (17) W zbiorze  $\mathbb{Z}_6$  wyróżnimy dwa podzbiory:  $U = \{0, 2, 4\}$  oraz  $W = \{0, 3\}$ . Pokazać, że  $U$  jest przestrzenią liniową nad  $\mathbb{Z}_3$  i  $W$  jest przestrzenią liniową nad ciałem  $\mathbb{Z}_2$ ,  $\mathbb{Z}_6 = U+W$ ,  $U \cap W = \{0\}$ . Czy  $\mathbb{Z}_6$  jest sumą prostą przestrzeni liniowych  $U$  i  $W$ ?
- (18) Sprawdzić, że podzbiór  $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{Z}_3^3$  jest podprzestrzenią liniową, a podzbiór  $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{Q}^3$  nie jest podprzestrzenią.
- (19) (*Modularność kraty podprzestrzeni*) Niech  $U_1, U_2, U_3$  będą podprzestrzeniami przestrzeni wektorowej  $V$ . Udowodnić, że
- $U_1 + (U_2 \cap U_3) \subset (U_1 + U_2) \cap (U_1 + U_3)$ ,
  - $(U_1 \cap U_2) + (U_1 \cap U_3) \subset U_1 \cap (U_2 + U_3)$ ,
  - $(U_1 \cap U_2) + (U_2 \cap U_3) + (U_3 \cap U_1) \subset (U_1 + U_2) \cap (U_2 + U_3) \cap (U_3 + U_1)$ ,
  - $(U_1 \cap U_2) + (U_1 \cap U_3) = U_1 \cap (U_2 + (U_1 \cap U_3))$ ,
  - jeśli  $U_1 \subset U_3$ , to  $U_1 + (U_2 \cap U_3) = (U_1 + U_2) \cap U_3$ .
- (20) (*Niedystrybutywność kraty podprzestrzeni*) Podaj przykład podprzestrzeni  $U_1, U_2, U_3$  przestrzeni  $\mathbb{R}^2$  dla których
- $U_1 + (U_2 \cap U_3) \neq (U_1 + U_2) \cap (U_1 + U_3)$ ,
  - $(U_1 + U_2) \cap U_3 \neq (U_1 \cap U_3) + (U_1 \cap U_3)$ .
- (21) (G. Birkhoff<sup>1</sup>) Sprawdzić, że z podprzestrzeni  $\text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ ,  $\text{lin}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ ,  $\text{lin}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ ,  $\text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$  za pomocą operacji  $+$  i  $\cap$  można utworzyć nieskończenie wiele różnych podprzestrzeni przestrzeni  $\mathbb{R}^3$ . (*Wskazówka: wygodnie jest rysować na płaszczyźnie  $z = 1$  przekroje badanych podprzestrzeni z tą płaszczyzną; nie wszystkie podprzestrzenie mają z nią niepusty przekrój!*)
- (22) Wykazać, że następujące pary przestrzeni wektorowych są izomorficzne:
- $U_1 \oplus U_2$  i  $U_1 \times U_2$ ,
  - $U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_k$  i  $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_k$ ,
  - $(U_1 + U_2) / (U_1 \cap U_2)$  i  $U_1 / (U_1 \cap U_2) \times U_2 / (U_1 \cap U_2)$ ,
- gdzie  $U_1, U_2, \dots, U_k$  są podprzestrzeniami przestrzeni liniowej  $V$ .

<sup>1</sup>Garret Birkhoff (ur. 1911 r.) - współczesny matematyk amerykański, nie mylić z George D. Birkhoffem (1884 - 1944), amerykańskim specjalistą od równań różniczkowych.