3. Wykład 3: Ciało liczb zespolonych.

Twierdzenie 3.1. *Niech* $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$*. W zbiorze* $\mathbb{C}$ *określamy dodawanie:*

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

oraz mnożenie:

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Wówczas $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *jest ciałem, w którym elementem neutralnym dodawania jest* $(0, 0)$*, a elementem neutralnym mnożenia jest* $(1, 0)$*.*

Dowód. Pokażemy dla przykładu, że każdy $\neq (0, 0)$ element ma element odwrotny względem mnożenia. Niech $(0, 0) \neq (a, b) \in \mathbb{C}$. Rozważmy element:

$$\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2}\right) \in \mathbb{C}.$$

Wówczas

$$(a, b) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2}\right) = \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}, \frac{ab - ab}{a^2 + b^2}\right) = (1, 0)\,.$$

□

Definicja 3.2. *Ciało* $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *nazywamy* **ciałem liczb zespolonych**. *Zwyczajowo piszemy* $a+ib$ *zamiast* (a, b) *oraz* a *zamiast* $(a, 0)$*. Liczbę* a *nazywamy* **częścią rzeczywistą** *liczby* $a+bi$ *i oznaczamy* $\Re(a+bi)$*. Liczbę* b *nazywamy* **częścią urojoną** *liczby* $a + bi$ *i oznaczamy* $\Im(a + bi)$*.*

Przykłady:

(1) Sprawdzamy, że $(1 - i) + (4 + 7i) = 5 + 6i$, $(-1 + 3i) \cdot (2 - 5i) = ((-1) \cdot 2 - 3 \cdot (-5)) + ((-1) \cdot (-5) + 3 \cdot 2)i = 13 + 11i$ oraz $\frac{-1+3i}{2+5i} = (-1 + 3i) \cdot (2 + 5i)^{-1} = (-1 + 3i) \cdot (\frac{-1}{29} + \frac{-3}{29}i) = \frac{10}{29}$.

(2) Podobnie sprawdzamy, że $i \cdot i = -1$.

Uwaga 3.3. *Ponieważ, jak zauważyliśmy,* $i \cdot i = -1$*, intuicyjnie przyjmujemy* $\sqrt{-1} = i$*.*

Definicja 3.4. *Niech* $z = a + bi \in \mathbb{C}$*.* **Liczbą sprzężoną** *z liczbą* z *nazywamy liczbę* $\overline{z} = a - bi$*.*

Przykład:

(3) Wprost z definicji widzimy, że $\overline{1 + 2i} = 1 - 2i$.

Twierdzenie 3.5. *Niech* $z, w \in \mathbb{C}$*. Wówczas:*

(1) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$,
(2) $\overline{z - w} = \overline{z} - \overline{w}$,
(3) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$,
(4) $\overline{\frac{z}{w}} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$, *o ile* $w \neq 0$.

Dowód. Pokażemy dla przykładu własność (4). Niech $z = a + bi$, $w = c + di$. Wówczas

$$\frac{z}{w} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2} = \frac{ca + bd}{c^2 + d^2} + \frac{cb - ad}{c^2 + d^2}i,$$

skąd

$$\overline{\frac{z}{w}} = \frac{ca + bd}{c^2 + d^2} - \frac{cb - ad}{c^2 + d^2}i.$$

Z drugiej strony

$$\frac{\overline{z}}{\overline{w}} = \frac{a-bi}{c-di} = \frac{(a-bi)(c+di)}{c^2+d^2} = \frac{ca+bd}{c^2+d^2} - \frac{cb-ad}{c^2+d^2}i.$$

□

Definicja 3.6. *Niech $z = a + bi \in \mathbb{C}$.* **Wartością bezwzględną** *(albo* **modułem***) liczby z nazywamy liczbę rzeczywistą $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$.*

Przykład:

(4) Wprost z definicji widzimy, że $|3+4i| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$.

Twierdzenie 3.7. *Niech $z, w \in \mathbb{C}$. Wówczas:*

(1) $|z-w| =$ *odległość między punktami z i w,*
(2) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$,
(3) $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$.

Dowód. Niech $z = a+bi$, $w = c+di$.

(1) Wprost z definicji modułu:

$$|z-w| = |(a-c)+(b-d)i| = \sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2},$$

co, z kolei, jest dokładnie równe odległości między punktami o współrzędnych (a,b) i (c,d).

(2) Podobnie jak w punkcie (1) otrzymujemy:

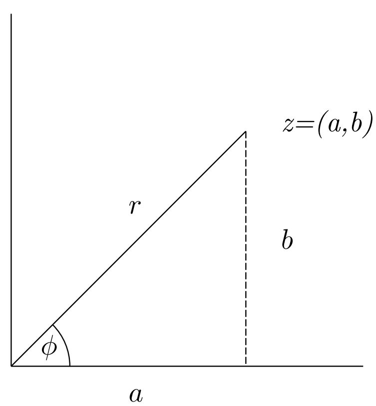
$$\begin{aligned} |z \cdot w| = |(ac-bd)+(ad+bc)i| &= \sqrt{a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2} \\ &= \sqrt{a^2(c^2+d^2)+b^2(c^2+d^2)} = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{c^2+d^2} = |z| \cdot |w|. \end{aligned}$$

(3) Podobnie jak w poprzednich punktach:

$$|z|^2 = a^2+b^2 = (a+bi)\cdot(a-bi) = z \cdot \overline{z}.$$

□

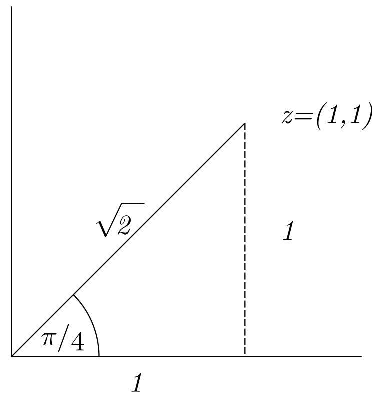
Definicja 3.8. *Niech $z = a+bi \in \mathbb{C}$. Niech (r,ϕ) będą takimi liczbami, że $a = r\cos\phi$, $b = r\sin\phi$:*



(tj. niech (r,ϕ)) będą współrzędnymi biegunowymi punktu (a,b)), a więc niech $z = r\cos\phi + ir\sin\phi = r(\cos\phi + i\sin\phi)$. Przedstawienie to nazywamy **postacią trygonometryczną** *liczby z. Kąt skierowany ϕ nazywamy* **argumentem** *liczby z i oznaczamy $\arg(z)$. Kąt skierowany $\theta \in [0,2\pi)$ taki, że $\cos\theta = \cos\arg(z)$ i $\sin\theta = \sin\arg(z)$ nazywamy* **argumentem głównym** *liczby z i oznaczamy $\mathrm{Arg}(z)$.*

Przykłady:

(5) Rozważmy liczbę $z = 1 + i$, czyli punkt o współrzędnych $(1, 1)$ na płaszczyźnie zespolonej:



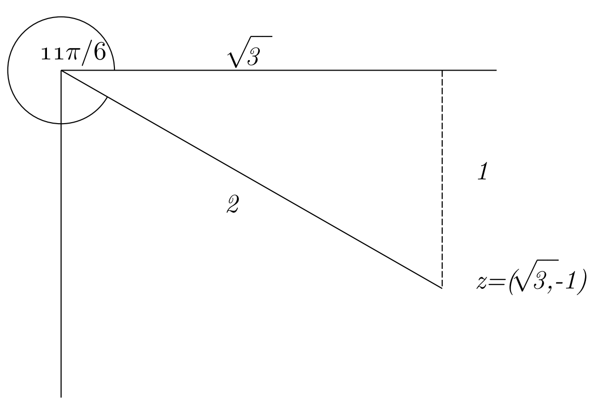
Z rysunku łatwo odczytujemy, że $r = \sqrt{2}$, zaś przykładowa wartość kąta ϕ to $\frac{\pi}{4}$. W szczególności argument główny liczby $z = 1 + i$ to $\mathrm{Arg}(z) = \frac{\pi}{4}$. Argumentami $\arg(z)$ tej liczby mogą też być, na przykład, liczby $\frac{9\pi}{4}$, $\frac{17\pi}{4}$, $\frac{25\pi}{4}$ itd. jako że

$$\sin\tfrac{\pi}{4} = \sin\tfrac{9\pi}{4} = \sin\tfrac{17\pi}{4} = \sin\tfrac{25\pi}{4} \text{ i równocześnie } \cos\tfrac{\pi}{4} = \cos\tfrac{9\pi}{4} = \cos\tfrac{17\pi}{4} = \cos\tfrac{25\pi}{4}.$$

Tym samym przykładowe postaci trygonometryczne liczby $z = 1 + i$ to

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{9\pi}{4} + i\sin\frac{9\pi}{4}\right) = \dots$$

(6) Rozważmy liczbę $z = \sqrt{3} - i$, czyli punkt o współrzędnych $(\sqrt{3}, -1)$ na płaszczyźnie zespolonej:



Z rysunku łatwo odczytujemy, że $r = 2$, zaś przykładowa wartość kąta ϕ to $\frac{11\pi}{6}$. W szczególności argument główny liczby $z = \sqrt{3} - i$ to $\mathrm{Arg}(z) = \frac{11\pi}{6}$. Argumentami $\arg(z)$ tej liczby mogą też być, na przykład, liczby $\frac{23\pi}{6}$, $\frac{35\pi}{6}$, $\frac{47\pi}{6}$ itd. jako że

$$\sin\tfrac{11\pi}{6} = \sin\tfrac{23\pi}{6} = \sin\tfrac{35\pi}{6} = \sin\tfrac{47\pi}{6} \text{ i równocześnie } \cos\tfrac{11\pi}{6} = \cos\tfrac{23\pi}{6} = \cos\tfrac{35\pi}{6} = \cos\tfrac{47\pi}{6}.$$

Tym samym przykładowe postaci trygonometryczne liczby $z = \sqrt{3} - i$ to

$$z = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right) = 2\left(\cos\frac{23\pi}{6} + i\sin\frac{23\pi}{6}\right) = \dots$$

Twierdzenie 3.9. *Niech $z_1 = r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2) \in \mathbb{C}$. Wówczas:*

(1) $z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\phi_1 + \phi_2) + i\sin(\phi_1 + \phi_2)$,

(2) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\phi_1 - \phi_2) + i\sin(\phi_1 - \phi_2)]$, *o ile* $z_2 \neq 0$,

(3) $\frac{1}{z_1} = \frac{1}{r_1}(\cos\phi_1 - i\sin\phi_1)$, *o ile* $z_2 \neq 0$.

Dowód. Wzory te wynikają wprost ze wzorów na sumy i różnice funkcji trygonometrycznych znane ze szkoły średniej. Udowodnimy dla przykładu własność (1):

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2[(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2)] \\ &= r_1 r_2[(\cos\phi_1\cos\phi_2 - \sin\phi_1\sin\phi_2)] + i(\cos\phi_1\sin\phi_2 + \sin\phi_1\cos\phi_2)] \\ &= r_1 r_2[\cos(\phi_1 + \phi_2) + i\sin(\phi_1 + \phi_2)]. \end{aligned}$$

□

Przykład:

(7) Rozważmy postać trygonometryczną liczby $(1+i)(\sqrt{3} - i)$. W poprzednich przykładach sprawdziliśmy, że

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

oraz

$$\sqrt{3} - i = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right).$$

Wobec tego postać trygonometrzyczna liczby $(1+i)(\sqrt{3} - i)$ to:

$$2\sqrt{2}(\cos\frac{25\pi}{12} + i\sin\frac{25\pi}{12}).$$

Zauważmy przy tym, że

$$\frac{25\pi}{12} = \frac{24\pi}{12} + \frac{\pi}{12} = 2\pi + \frac{\pi}{12}$$

wobec czego

$$\cos\frac{24\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{12} \text{ oraz } \sin\frac{24\pi}{12} = \sin\frac{\pi}{12}$$

i liczbę $(1+i)(\sqrt{3} - i)$ możemy też zapisać jako

$$(1+i)(\sqrt{3} - i) = 2\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}).$$

Tym samym posługując się postacią trygonometryczną liczb zespolonych możemy wyznaczyć dokładne wartości funkcji trygonometrycznych kąta $\frac{\pi}{12}$. Istotnie:

$$\begin{aligned} (1+i)(\sqrt{3} - i) &= (\sqrt{3} + 1) + (\sqrt{3} - 1)i \\ &= 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}i\right) \\ &= 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}i\right), \end{aligned}$$

co po porównaniu z postacią trygonometryczną liczby $(1+i)(\sqrt{3}-i)$ daje

$$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \text{ oraz } \sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Wniosek 3.10 (de Moivre)**.** *Niech $z=r(\cos\phi+i\sin\phi)\in\mathbb{C}$, niech $n\in\mathbb{N}$. Wówczas $z^n=r^n(\cos n\phi+i\sin n\phi)$.*

Przykład:

(8) Przy pomocy wzorów de Moivre'a potęgowanie potrafi być naprawdę szybkie. Obliczmy dla przykładu $(1+i)^{10}$. Sprawdziliśmy już, że

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Wobec tego

$$(1+i)^{10}=32\left(\cos\frac{10\pi}{4}+i\sin\frac{10\pi}{4}\right).$$

Ale z drugiej strony

$$\frac{10\pi}{4}=\frac{8\pi}{4}+\frac{2\pi}{4}=2\pi+\frac{\pi}{2}$$

i wobec tego

$$\cos\frac{10\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{2} \text{ oraz } \sin\frac{10\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{2}$$

i liczbę $(1+i)^{10}$ możemy zapisać jako

$$(1+i)^{10}=32\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=32(0+1i)=32i.$$

Twierdzenie 3.11. *Niech $z=r(\cos\phi+i\sin\phi)\in\mathbb{C}$, niech $n\in\mathbb{N}$. Wówczas z ma n różnych pierwiastków stopnia n danych wzorem*

$$w_k=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\phi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\phi+2k\pi}{n}\right),$$

gdzie $k\in\{0,1,\ldots,n-1\}$.

Dowód. Niech $w\in\mathbb{C}$ będzie taką liczbą, że $w^n=z$ i niech

$$w=s(\cos\theta+i\sin\theta).$$

Wówczas $s^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=r(\cos\phi+i\sin\phi)$, skąd $s=\sqrt[n]{r}$ oraz

$$\cos n\theta=\cos\phi \text{ i } \sin n\theta=\sin\phi.$$

Tym samym, wobec okresowości funkcji cos i sin

$$n\theta=\phi+2k\pi, \text{ dla } k\in\mathbb{N},$$

a więc $\theta=\frac{\phi+2k\pi}{n}$, dla $k\in\mathbb{N}$. Zauważmy jednak, że dla $k\geq n$:

$$\frac{\phi+2k\pi}{n}=\frac{\phi+2(n+\ell)\pi}{n}=\frac{\phi+2n\pi+2\ell\pi}{n}=2\pi+\frac{\phi+2\ell\pi}{n},$$

skąd $\cos\frac{\phi+2k\pi}{n}=\cos\frac{\phi+2\ell\pi}{n}$ i $\sin\frac{\phi+2k\pi}{n}=\sin\frac{\phi+2\ell\pi}{n}$. Wobec tego otrzymujemy tylko n różnych liczb i wystarczy rozpatrywać $k\in\{0,\ldots,n-1\}$. □

Przykład:

(9) Wyznaczymy wszystkie pierwiastki stopnia 6 z liczby -2. Sprawdzamy, że

$$-2 = 2(-1 + 0i) = 2(\cos\pi + i\sin\pi).$$

Wobec tego pierwiastki stopnia 6 z -2 wyrażą się następującymi wzorami:

$$\begin{aligned}
w_0 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt[6]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)\\
w_1 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{6} + i\sin\frac{3\pi}{6}\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt[6]{2}\,(0 + i1) = \sqrt[6]{2}i\\
w_2 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right] =\\
&= \sqrt[6]{2}\left(-\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt[6]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)\\
w_3 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)\right] =\\
&= \sqrt[6]{2}\left(-\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt[6]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)\\
w_4 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6}\right) = \sqrt[6]{2}\left[\cos(2\pi + \pi) + i\sin(2\pi + \pi)\right] =\\
&= \sqrt[6]{2}\,(\cos\pi + i\sin\pi) = \sqrt[6]{2}\,(-1 + i0) = -\sqrt[6]{2}\\
w_5 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right] =\\
&= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt[6]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$