Ciało liczb zespolonych

Twierdzenie:

Niech $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. W zbiorze $\mathbb{C}$ określamy dodawanie:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

oraz mnożenie:

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Wówczas $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ jest ciałem, w którym elementem neutralnym dodawania jest $(0, 0)$, a elementem neutralnym mnożenia jest $(1, 0)$.

Dowód:

Pokażemy dla przykładu, że każdy $\neq (0,0)$ element ma element odwrotny względem mnożenia.
Niech $(0,0) \neq (a,b) \in \mathbb{C}$.
Rozważmy element:

$$\left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right) \in \mathbb{C}.$$

Wówczas

$$(a,b) \cdot \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right) = \left(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}, \frac{ab-ab}{a^2+b^2}\right) = (1,0)\,.$$

Definicja:

Ciało $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ nazywamy **ciałem liczb zespolonych**.
Zwyczajowo piszemy $a + ib$ zamiast (a, b) oraz a zamiast $(a, 0)$.
Liczbę a nazywamy **częścią rzeczywistą** liczby $a + bi$ i oznaczamy $\Re(a + bi)$.
Liczbę b nazywamy **częścią urojoną** liczby $a + bi$ i oznaczamy $\Im(a + bi)$.

Przykłady:

1. Sprawdzamy, że:
   $(1 - i) + (4 + 7i) = 5 + 6i$,
   $(-1 + 3i) \cdot (2 - 5i) =$
   $((-1) \cdot 2 - 3 \cdot (-5)) + ((-1) \cdot (-5) + 3 \cdot 2)i = 13 + 11i$,
   $\frac{-1+3i}{2+5i} = (-1 + 3i) \cdot (2 + 5i)^{-1} = (-1 + 3i) \cdot (\frac{-1}{29} + \frac{-3}{29} i) = \frac{10}{29}$.

2. Podobnie sprawdzamy, że $i \cdot i = -1$.

Uwaga:

Ponieważ, jak zauważyliśmy, $i \cdot i = -1$, intuicyjnie przyjmujemy $\sqrt{-1} = i$.

Definicja:

Niech $z = a + bi \in \mathbb{C}$.
Liczbą sprzężoną z liczbą z nazywamy liczbę $\overline{z} = a - bi$.

Przykład:

3. Wprost z definicji widzimy, że $\overline{1+2i} = 1 - 2i$.

Twierdzenie:

Niech $z, w \in \mathbb{C}$. Wówczas:

1. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$,
2. $\overline{z - w} = \overline{z} - \overline{w}$,
3. $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$,
4. $\overline{\frac{z}{w}} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$, o ile $w \neq 0$.

Dowód:

Pokażemy dla przykładu własność (4).
Niech $z = a + bi$, $w = c + di$.
Wówczas

$$\frac{z}{w} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2} = \frac{ca + bd}{c^2 + d^2} + \frac{cb - ad}{c^2 + d^2} i,$$

skąd

$$\overline{\frac{z}{w}} = \frac{ca + bd}{c^2 + d^2} - \frac{cb - ad}{c^2 + d^2} i.$$

Z drugiej strony

$$\frac{\overline{z}}{\overline{w}} = \frac{a - bi}{c - di} = \frac{(a - bi)(c + di)}{c^2 + d^2} = \frac{ca + bd}{c^2 + d^2} - \frac{cb - ad}{c^2 + d^2} i.$$

Definicja:

Niech $z = a + bi \in \mathbb{C}$.
Wartością bezwzględną (albo **modułem**) liczby z nazywamy liczbę rzeczywistą $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Przykład:

4. Wprost z definicji widzimy, że $|3+4i| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$.

Twierdzenie:

Niech $z, w \in \mathbb{C}$. Wówczas:

1. $|z - w| =$ odległość między punktami z i w,
2. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$,
3. $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$.

Dowód:

Niech $z = a + bi$, $w = c + di$.

1. Wprost z definicji modułu:

$$|z - w| = |(a - c) + (b - d)i| = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2},$$

   co, z kolei, jest dokładnie równe odległości między punktami o współrzędnych (a, b) i (c, d).

2. Podobnie jak w punkcie (1) otrzymujemy:

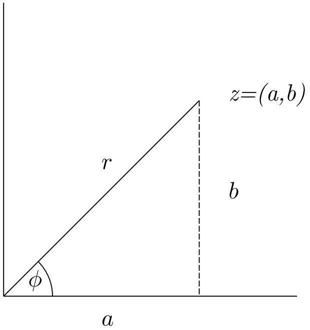
$$
\begin{aligned}
|z \cdot w| = |(ac - bd) + (ad + bc)i| & \\
= & \sqrt{a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2} \\
= & \sqrt{a^2(c^2 + d^2) + b^2(c^2 + d^2)} \\
= & \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2} \\
= & |z| \cdot |w|.
\end{aligned}
$$

3. Podobnie jak w poprzednich punktach:

$$|z|^2 = a^2 + b^2 = (a + bi) \cdot (a - bi) = z \cdot \overline{z}.$$

Definicja:

Niech $z = a + bi \in \mathbb{C}$.
Niech (r, ϕ) będą takimi liczbami, że $a = r\cos\phi$, $b = r\sin\phi$:



(tj. niech (r, ϕ)) będą współrzędnymi biegunowymi punktu (a, b)),
a więc niech

$$z = r\cos\phi + ir\sin\phi = r(\cos\phi + i\sin\phi).$$

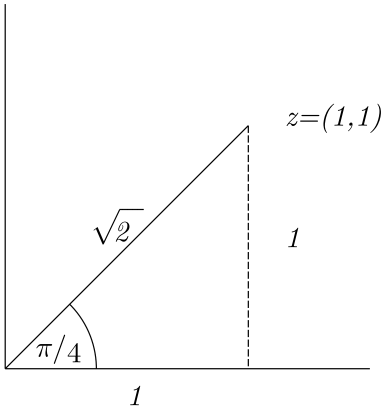
Przedstawienie to nazywamy **postacią trygonometryczną** z.
Kąt skierowany ϕ nazywamy **argumentem** z i oznaczamy $\arg(z)$.
Kąt skierowany $\theta \in [0, 2\pi)$ taki, że

$$\cos\theta = \cos\arg(z) \text{ i } \sin\theta = \sin\arg(z)$$

nazywamy **argumentem głównym** liczby z i oznaczamy $\mathrm{Arg}(z)$.

Przykłady:

5. Rozważmy liczbę $z = 1 + i$, czyli punkt o współrzędnych $(1, 1)$ na płaszczyźnie zespolonej:



Z rysunku łatwo odczytujemy, że $r = \sqrt{2}$, zaś przykładowa wartość kąta ϕ to $\frac{\pi}{4}$.

W szczególności argument główny liczby $z = 1 + i$ to $\mathrm{Arg}(z) = \frac{\pi}{4}$. Argumentami $\arg(z)$ tej liczby mogą też być, na przykład, liczby $\frac{9\pi}{4}$, $\frac{17\pi}{4}$, $\frac{25\pi}{4}$ itd. jako że

$$\sin\frac{\pi}{4} = \sin\frac{9\pi}{4} = \sin\frac{17\pi}{4} = \sin\frac{25\pi}{4}$$

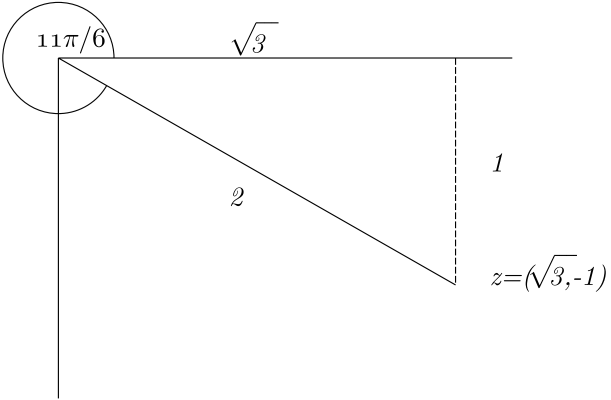
i równocześnie

$$\cos\frac{\pi}{4} = \cos\frac{9\pi}{4} = \cos\frac{17\pi}{4} = \cos\frac{25\pi}{4}.$$

Tym samym przykładowe postaci trygonometryczne liczby $z = 1 + i$ to

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{9\pi}{4} + i\sin\frac{9\pi}{4}\right) = \ldots$$

6. Rozważmy liczbę $z = \sqrt{3} - i$, czyli punkt o współrzędnych $(\sqrt{3}, -1)$ na płaszczyźnie zespolonej:



Z rysunku łatwo odczytujemy, że $r = 2$, zaś przykładowa wartość kąta ϕ to $\frac{11\pi}{6}$.

W szczególności argument główny liczby $z = \sqrt{3} - i$ to $\mathrm{Arg}(z) = \frac{11\pi}{6}$.
Argumentami $\arg(z)$ tej liczby mogą też być, na przykład, liczby $\frac{23\pi}{6}$, $\frac{35\pi}{6}$, $\frac{47\pi}{6}$ itd. jako że

$$\sin\frac{11\pi}{6} = \sin\frac{23\pi}{6} = \sin\frac{35\pi}{6} = \sin\frac{47\pi}{6}$$

i równocześnie

$$\cos\frac{11\pi}{6} = \cos\frac{23\pi}{6} = \cos\frac{35\pi}{6} = \cos\frac{47\pi}{6}.$$

Tym samym przykładowe postaci trygonometryczne liczby $z = \sqrt{3} - i$ to

$$z = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right) = 2\left(\cos\frac{23\pi}{6} + i\sin\frac{23\pi}{6}\right) = \dots$$

Twierdzenie:

Niech $z_1 = r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2) \in \mathbb{C}$.
Wówczas:

1. $z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\phi_1 + \phi_2) + i\sin(\phi_1 + \phi_2)$,
2. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\phi_1 - \phi_2) + i\sin(\phi_1 - \phi_2)]$, o ile $z_2 \neq 0$,
3. $\frac{1}{z_1} = \frac{1}{r_1}(\cos\phi_1 - i\sin\phi_1)$, o ile $z_2 \neq 0$.

Dowód:

Wzory te wynikają wprost ze wzorów na sumy i różnice funkcji trygonometrycznych znane ze szkoły średniej.
Udowodnimy dla przykładu własność (1):

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2[(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2)] \\ &= r_1 r_2[(\cos\phi_1\cos\phi_2 - \sin\phi_1\sin\phi_2)] \\ &+ i(\cos\phi_1\sin\phi_2 + \sin\phi_1\cos\phi_2)] \\ &= r_1 r_2[\cos(\phi_1+\phi_2) + i\sin(\phi_1+\phi_2)]. \end{aligned}$$

Przykład:

7. Rozważmy postać trygonometryczną liczby $(1+i)(\sqrt{3}-i)$. W poprzednich przykładach sprawdziliśmy, że

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

oraz

$$\sqrt{3}-i=2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right).$$

Wobec tego postać trygonometrzyczna liczby $(1+i)(\sqrt{3}-i)$ to:

$$2\sqrt{2}(\cos\frac{25\pi}{12}+i\sin\frac{25\pi}{12}).$$

Zauważmy przy tym, że

$$\frac{25\pi}{12} = \frac{24\pi}{12} + \frac{\pi}{12} = 2\pi + \frac{\pi}{12}$$

wobec czego

$$\cos\frac{24\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{12} \text{ oraz } \sin\frac{24\pi}{12} = \sin\frac{\pi}{12}$$

i liczbę $(1+i)(\sqrt{3}-i)$ możemy też zapisać jako

$$(1+i)(\sqrt{3}-i) = 2\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}).$$

Tym samym posługując się postacią trygonometryczną liczb zespolonych możemy wyznaczyć dokładne wartości funkcji trygonometrycznych kąta $\frac{\pi}{12}$. Istotnie:

$$\begin{aligned}(1+i)(\sqrt{3}-i) &= (\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}-1)i\\ &= 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}i\right)\\ &= 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i\right),\end{aligned}$$

co po porównaniu z postacią trygonometryczną liczby $(1+i)(\sqrt{3}-i)$ daje

$$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \text{ oraz } \sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Wniosek (wzory de Moivre'a):

Niech $z = r(\cos\phi + i\sin\phi) \in \mathbb{C}$, niech $n \in \mathbb{N}$.
Wówczas $z^n = r^n(\cos n\phi + i\sin n\phi)$.

Przykład:

8. Przy pomocy wzorów de Moivre'a potęgowanie potrafi być naprawdę szybkie.
   Obliczmy dla przykładu $(1+i)^{10}$.
   Sprawdziliśmy już, że
   $$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$
   Wobec tego
   $$(1+i)^{10}=32\left(\cos\frac{10\pi}{4}+i\sin\frac{10\pi}{4}\right).$$

Ale z drugiej strony

$$\frac{10\pi}{4} = \frac{8\pi}{4} + \frac{2\pi}{4} = 2\pi + \frac{\pi}{2}$$

i wobec tego

$$\cos\frac{10\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{2} \text{ oraz } \sin\frac{10\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{2}$$

i liczbę $(1+i)^{10}$ możemy zapisać jako

$$(1+i)^{10} = 32\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 32(0+1i) = 32i.$$

Twierdzenie:

Niech $z = r(\cos\phi + i\sin\phi) \in \mathbb{C}$, niech $n \in \mathbb{N}$.
Wówczas z ma n różnych pierwiastków stopnia n danych wzorem

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\phi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\phi + 2k\pi}{n}\right),$$

gdzie $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Dowód:

Niech $w \in \mathbb{C}$ będzie taką liczbą, że $w^n = z$ i niech

$$w = s(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Wówczas $s^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\phi + i\sin\phi)$, skąd $s = \sqrt[n]{r}$ oraz

$$\cos n\theta = \cos\phi \text{ i } \sin n\theta = \sin\phi.$$

Tym samym, wobec okresowości funkcji cos i sin

$$n\theta = \phi + 2k\pi, \text{ dla } k \in \mathbb{N},$$

a więc $\theta = \frac{\phi + 2k\pi}{n}$, dla $k \in \mathbb{N}$.

Zauważmy jednak, że dla $k \geq n$:

$$\frac{\phi + 2k\pi}{n} = \frac{\phi + 2(n+\ell)\pi}{n} = \frac{\phi + 2n\pi + 2\ell\pi}{n} = 2\pi + \frac{\phi + 2\ell\pi}{n},$$

skąd

$$\cos\frac{\phi + 2k\pi}{n} = \cos\frac{\phi + 2\ell\pi}{n} \text{ i } \sin\frac{\phi + 2k\pi}{n} = \sin\frac{\phi + 2\ell\pi}{n}.$$

Wobec tego otrzymujemy tylko n różnych liczb i wystarczy rozpatrywać $k \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Przykład:

9. Wyznaczymy wszystkie pierwiastki stopnia 6 z liczby -2. Sprawdzamy, że

$$-2 = 2(-1 + 0i) = 2(\cos \pi + i \sin \pi).$$

Wobec tego pierwiastki stopnia 6 z -2 wyrażą się następującymi wzorami:

$$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt[6]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) \\ w_1 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{6} + i\sin\frac{3\pi}{6}\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \sqrt[6]{2}\,(0 + i1) = \sqrt[6]{2}i \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
w_2 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)\\
&= \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right]\\
&= \sqrt[6]{2}\left(-\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt[6]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)\\
w_3 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)\\
&= \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right]\\
&= \sqrt[6]{2}\left(-\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt[6]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
w_4 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6}\right) \\
&= \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(2\pi + \pi\right) + i\sin\left(2\pi + \pi\right)\right] \\
&= \sqrt[6]{2}\left(\cos\pi + i\sin\pi\right) = \sqrt[6]{2}\left(-1 + i0\right) = -\sqrt[6]{2} \\
w_5 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right) \\
&= \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right] \\
&= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt[6]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\cos(\phi_1 + \phi_2) &= \cos\phi_1 \cos\phi_2 - \sin\phi_1 \sin\phi_2 \\
\sin(\phi_1 + \phi_2) &= \cos\phi_1 \sin\phi_2 + \sin\phi_1 \cos\phi_2 \\
\cos(\pi - \alpha) &= -\cos\alpha \\
\sin(\pi - \alpha) &= \sin\alpha \\
\cos(\pi + \alpha) &= -\cos\alpha \\
\sin(\pi + \alpha) &= -\sin\alpha
\end{aligned}
$$