Zestaw zadań 5: Kombinacje liniowe wektorów. Bazy.

(1) Sprawdzić, czy wektory α oraz β są kombinacjami liniowymi układu $\mathcal{A}$ wektorów przestrzeni $\mathbb{R}^4$, jeżeli

a) $\mathcal{A} = (\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}), \alpha = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}.$

b) $\mathcal{A} = (\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}), \alpha = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}.$

Czy zapis wektora α w postaci kombinacji liniowej układu $\mathcal{A}$ jest jednoznaczny?

(2) Dla jakiej liczby zespolonej $c \in \mathbb{C}$ wektor $\begin{bmatrix} 1 \\ i \\ i \end{bmatrix}$ jest kombinacją liniową wektorów $\begin{bmatrix} c \\ -1+i \\ 1+i \end{bmatrix}$ oraz $\begin{bmatrix} i \\ -1 \\ -c \end{bmatrix}$ przestrzeni $\mathbb{C}^3$?

(3) Sprawdzić, czy układ $(\begin{bmatrix} i \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ i \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ i \end{bmatrix})$ wektorów przestrzeni $\mathbb{C}^3$ jest liniowo niezależny[1]. Przedstawić wektor $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1+2i \end{bmatrix}$ jako ich kombinację liniową.

(4) Sprawdzić, że każda kombinacja liniowa $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ wektorów $\begin{bmatrix} i \\ 1 \\ -i \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \\ -i \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ z przestrzeni $\mathbb{C}^4$ spełnia warunek $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, a nie każda spełnia warunek $|x_4| \leq 2$.

(5) Znaleźć taki wektor $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ przestrzeni $\mathbb{Z}_2^3$, aby wektory $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ były liniowo niezależne. Ile rozwiązań ma to zadanie?

(6) Zbiór $\mathbb{C}$ liczb zespolonych z działaniami dodawania liczb zespolonych i mnożenia liczb zespolonych przez liczby rzeczywiste jest przestrzenią wektorow nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Oznaczamy ją symbolem $\mathbb{C}_\mathbb{R}$. Sprawdzić, że każde trzy wektory z $\mathbb{C}_\mathbb{R}$ są liniowo zależne.

(7) Sprawdzić, czy układ wektorów $(\alpha_1, \ldots, a_n)$ przestrzeni K^4 jest liniowo zależny, jeżeli

a) $K = \mathbb{Z}_7$, $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$

[1]Pojęcie liniowej niezależności wektorów pochodzi od Grassmanna.

b) $K=\mathbb{R}$, $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\1\end{bmatrix}$, $\alpha_2=\begin{bmatrix}4\\1\\5\\4\end{bmatrix}$, $\alpha_3=\begin{bmatrix}2\\1\\3\\4\end{bmatrix}$, $\alpha 4=\begin{bmatrix}6\\3\\10\\5\end{bmatrix}$.

c) $K=\mathbb{C}$, $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\i\\3\\-i\end{bmatrix}$, $\alpha_2=\begin{bmatrix}4\\1\\5\\4\end{bmatrix}$, $\alpha_3=\begin{bmatrix}4+i\\0\\5+3i\\5\end{bmatrix}$, $\alpha_4=\begin{bmatrix}5\\2i\\i\\2\end{bmatrix}$.

d) $K=\mathbb{Z}_5$, $\begin{bmatrix}1\\2\\3\\1\end{bmatrix}$, $\alpha_2=\begin{bmatrix}4\\1\\5\\4\end{bmatrix}$, $\alpha_3=\begin{bmatrix}2\\1\\3\\4\end{bmatrix}$, $\alpha_4=\begin{bmatrix}5\\4\\2\\2\end{bmatrix}$.

Jeżeli to możliwe, przedstawić jeden z wektorów tego układu jako kombinację liniową pozostałych.

(8) Pokazać, że wektory $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ tworz bazę przestrzeni $\mathbb{Q}^n$ i znaleźć współrzędne wektora β w tej bazie, jeżeli

a) $n=3$; $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$, $\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$, $\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$, $\beta=\begin{bmatrix}6\\9\\14\end{bmatrix}$.

b) $n=3$; $\alpha_1=\begin{bmatrix}2\\1\\-3\end{bmatrix}$, $\alpha_2=\begin{bmatrix}3\\2\\-5\end{bmatrix}$, $\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$, $\beta=\begin{bmatrix}6\\2\\-7\end{bmatrix}$.

c) $n=4$; $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\-2\end{bmatrix}$, $\alpha_2=\begin{bmatrix}2\\3\\0\\-1\end{bmatrix}$, $\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\2\\1\\4\end{bmatrix}$, $\alpha_4=\begin{bmatrix}1\\3\\-1\\0\end{bmatrix}$, $\beta=\begin{bmatrix}7\\14\\-1\\2\end{bmatrix}$.

(9) Wyznaczyć bazy podprzestrzeni rozwiązań następujących układów równań (nad $\mathbb{R}$):

a) $\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3=0\\ 2x_1-x_2+3x_3=0\\ 3x_1-5x_2+4x_3=0\end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1+x_2\qquad\;\;-3x_4=0\\ x_1-x_2+2x_3-x_4=0\\ 4x_1-2x_2+6x_3+3x_4=0\end{cases}$.

(10) Wyznaczyć bazę i wymiar[2] podprzestrzeni $lin(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,a_n)$ przestrzeni $\mathbb{Q}^4$ gdy:

a) $\alpha_1=\begin{bmatrix}5\\2\\-3\\1\end{bmatrix}$, $\alpha_2=\begin{bmatrix}4\\1\\-2\\3\end{bmatrix}$, $\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\2\end{bmatrix}$, $\alpha_4=\begin{bmatrix}3\\4\\-1\\2\end{bmatrix}$;

b) $\alpha_1=\begin{bmatrix}2\\-1\\3\\5\end{bmatrix}$, $\alpha_2=\begin{bmatrix}4\\-3\\1\\3\end{bmatrix}$, $\alpha_3=\begin{bmatrix}3\\-2\\3\\4\end{bmatrix}$, $\alpha_4=\begin{bmatrix}4\\-1\\15\\17\end{bmatrix}$, $\alpha_5=\begin{bmatrix}7\\-6\\-7\\0\end{bmatrix}$;

c) $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\-4\end{bmatrix}$, $\alpha_2=\begin{bmatrix}2\\3\\-4\\1\end{bmatrix}$, $\alpha_3=\begin{bmatrix}2\\-5\\8\\-3\end{bmatrix}$, $\alpha_4=\begin{bmatrix}5\\26\\-9\\-12\end{bmatrix}$, $\alpha_5=\begin{bmatrix}3\\-4\\1\\2\end{bmatrix}$.

(11) Wybrać bazę podprzestrzeni $lin(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,a_n)\subset\mathbb{Z}_7^m$ spośród wektorów $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,a_n$, jeżeli

[2] Pojęcie wymiaru przestrzeni wektorowej pochodzi od Grassmanna.

a) $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$;

b) $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$;

c) $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha_5 = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$;

d) $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\alpha_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Wybrać dowolne bazy powyższych podprzestrzeni, niekoniecznie spośród wektorów $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, a_n$.

(12) Czy można znaleźć bazę przestrzeni K^4 złożoną z wektorów postaci:

a) $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$; $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, b) $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$; $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$.