Zestaw zadań 4: Układy równań. Przestrzenie wektorowe i podprzestrzenie.

(1) Rozwiązać nad ciałem $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych następujące układy równań:

(a) $\begin{cases} 2x-3y+5z+7t=1 \\ 4x-6y+2z+3t=2 \\ 2x-3y-11z-15t=1 \end{cases}$; (b) $\begin{cases} 2x+5y-8z=8 \\ 4x+3y-9z=9 \\ 2x+3y-5z=7 \\ x+8y-7z=12 \end{cases}$;

(c) $\begin{cases} 3x+4y+z+2t=3 \\ 6x+8y+2z+5t=7 \\ 9x+12y+3z+10t=13 \end{cases}$; (d) $\begin{cases} 3x-5y+2z+4t=2 \\ 7x-4y+z+3t=5 \\ 5x+7y-4z-6t=3 \end{cases}$;

(e) $\begin{cases} 3x-2y+5z+4t=2 \\ 6x-4y+4z+3t=3 \\ 9x-6y+3z+2t=4 \end{cases}$; (f) $\begin{cases} 8x+6y+5z+2t=21 \\ 3x+3y+2z+t=10 \\ 4x+2y+3z+t=8 \\ 3x+5y+z+t=15 \\ 7x+4y+5z+2t=18 \end{cases}$;

(g) $\begin{cases} x+y+3z-2t+3w=1 \\ 2x+2y+4z-t+3w=2 \\ 3x+3y+5z-2t+3w=1 \\ 2x+2y+8z-3t+9w=2 \end{cases}$; (h) $\begin{cases} 2x-y+z+2t+3w=2 \\ 6x-3y+2z+4t+5w=3 \\ 6x-3y+2z+8t+13w=9 \\ 4x-2y+z+t+2w=1 \end{cases}$;

(i) $\begin{cases} 6x+4y+5z+2t+3w=1 \\ 3x+2y+4z+t+2w=3 \\ 3x+2y-2z+t \qquad =-7 \\ 9x+6y+z+3t+2w=2 \end{cases}$.

(2) Następujące układy rozwiązać nad $\mathbb{Q}$ oraz nad $\mathbb{Z}_p$:

(a) $\begin{cases} 2x+7y+3z+t=6 \\ 3x+5y+2z+2t=4 \\ 9x+4y+z+7t=2 \end{cases}$, $p=11$; (b) $\begin{cases} 9x-3y+5z+6t=4 \\ 9x-3y+5z+6t=4 \\ 3x-y+3z+14t=-8 \end{cases}$, $p=13$;

(c) $\begin{cases} 6x+3y+2z+3t+4w=5 \\ 4x+2y+z+2t+w=4 \\ 4x+2y+3z+2t+w=0 \\ 2x+y+7z+3t+2w=1 \end{cases}$, $p=11$ (d) $\begin{cases} 2x-y+3z-7t=5 \\ 6x-3y+z-4t=7 \\ 4x-2y+14z-31t=18 \end{cases}$, $p=37$

(e) $\begin{cases} x+2y+3z-2t+w=4 \\ 3x+6y+5z-4t+3w=5 \\ x+2y+7z-4t+w=11 \\ 2x+4y+2z-3t+3w=6 \end{cases}$, $p=13$ (f) $\begin{cases} 3x+2y+2z+2t=2 \\ 2x+3y+2z+5t=3 \\ 9x+y+4z-5t=1 \\ 2x+2y+3z+4t=5 \\ 7x+y+6z-t=7 \end{cases}$, $p=7$

(g) $\begin{cases} 2x+3y+z+2t=4 \\ 4x+3y+z+t=5 \\ 5x+11y+3z+2t=2 \\ 2x+5y+z+t=1 \\ x-7y-z+2t=7 \end{cases}$, $p=17$

(3) Każdy z następujących układów rozwiązać w ciałach $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_7$, $\mathbb{Z}_{11}$:

(a) $\begin{cases} x+4y+3z=2 \\ 3x+2y+4z=3 \\ 4x+y+z=0 \end{cases}$, (b) $\begin{cases} 2x+3y+z=1 \\ x+4y+3z=3 \\ 4x \qquad +3z=2 \end{cases}$.

(4) Pokazać, że układ równań $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y-z=2 \\ x-y+3z=0 \end{cases}$ jest sprzeczny w ciele $\mathbb{Z}_p$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p=2$.

(5) Rozwiązać nad ciałem $\mathbb{C}$ liczb zespolonych układ równań

$$\begin{cases} 6ix+(-3+6i)y+(4+2i)z+(1+2i)t=0 \\ (5+5i)x+(3+5i)y+(7-3i)z+(4+2i)=0 \\ (-3+3i)x+(-6+3i)y+(-1+3i)z \quad -t=0 \\ (1+11i)x+(1+12i)y+(11+7i)z+7it=0 \end{cases}$$

przy założeniu:
(a) $x=0$, (b) $y=0$, (c) $z=0$, (d) $t=0$, (e) $x+y=0$.

(6) Znaleźć takie liczby rzeczywiste a, b, c, d by zachodziła równość wielomianów zmiennej X o wspóczynnikach rzeczywistych:

$$a\cdot 1+b(X-2)+c(X-2)^2+d(X-2)^3=1+X^3.$$

(7) Wyznaczyć takie liczby zespolone a, b, c, d by zachodziła równość funkcji wymiernych zmiennej X o współczynnikach zespolonych:

$$\frac{4}{X^4+4}=\frac{a}{X+1+i}+\frac{b}{X+1-i}+\frac{c}{X-1+i}+\frac{d}{X-1-i}.$$

(8) Rozwiązać nad ciałem $\mathbb{C}$ następujce układy równań:
(a) $\begin{cases} (1+i)x+2iy-z=3+2i \\ (3+i)x+(1-i)y+4z=6+i \\ 5x+y-iz=2 \end{cases}$, (b) $\begin{cases} (1+i)x+2y-iz=2-3i \\ 3x+iy+(2-i)z=6+4i \\ (4+i)x+y+3z=6+6i \end{cases}$.

(9) Dla jakiego parametru $\lambda \in \mathbb{Z}_7$ układ równań $\begin{cases} x+2y+6z+6t=1 \\ x+y+z+3t=2 \\ 3x+5y+6z+t=\lambda \end{cases}$ nad ciałem $\mathbb{Z}_7$ ma rozwiązanie? Rozwiązać ten układ, gdy jest to możliwe.

(10) W zależności od parametru $\lambda \in \mathbb{Q}$ rozwiązać układy równań:
(a) $\begin{cases} 8x+6y+3z+2t=5 \\ -12x-3y-3z+3t=-6 \\ 4x+5y+z+4t=3 \\ \lambda x+4y+z+4t=2 \end{cases}$, (b) $\begin{cases} 2x-y+3z+4t=5 \\ 4x-2y+5z+6t=7 \\ 6x-3y+7z+8t=9 \\ \lambda x-4y+9z+10t=11 \end{cases}$, (c) $\begin{cases} \lambda x+y+z+t=1 \\ x+\lambda y+z+t=1 \\ x+y+\lambda z+t=1 \\ x+y+z+\lambda t=1 \end{cases}$.

(11) Do układu równań należą wszystkie równania $x+ny+nz=1$ dla $n\in\mathbb{N}$. Znaleźć równoważny mu układ o najmniejszej ilości równań i rozwiązać go.

(12) Z Księgi I "*Arytmetyki*" Diofantosa z Aleksandrii[1] (ok. 250 r.):
(a) "Zadanie 16. Znaleźć trzy takie liczby, aby dodane parami dawały dane liczby. Potrzeba, by połowa sumy danych liczb była większa odkażdej z nich."
(Dla danych a,b,c rozwiązać układ równań $\begin{cases} y+z=a \\ x \quad +z=b \\ x+y \quad =c \end{cases}$).

[1]Diofantos (zapewne III w.) - matematyk grecki z Aleksandrii. Brak danych o jego życiu. Zachowało się 6 z 13 ksiąg "*Arytmetyki*" i fragmenty książki o liczbach wieloktnych. W "*Arytmetyce*" Diofantos podał prawa działań na liczbach względnych i wprowadził niewiadomą - symbol literowy uczestniczcy w działaniach na równi z liczbami i w zgodzie z prawami działań.

(b) "Zadanie 17. Znaleźć cztery takie liczby, żeby dodane po trzy dawały dane liczby."

(Dla danych a, b, c, d rozwiązać układ równań $\begin{cases} \phantom{x+{}} y + z + t = a \\ x \phantom{{}+y} + z + t = b \\ x + y \phantom{{}+z} + t = c \\ x + y + z \phantom{{}+t} = d \end{cases}$).

(c) "Zadanie 18. Znaleźć trzy takie liczby, aby dodane parami przewyższay pozostałą o daną liczbę."

(Dla danych a, b, c rozwiązać układ równań $\begin{cases} \phantom{x+{}} y + z = a + x \\ x \phantom{{}+y} + z = b + y \\ x + y \phantom{{}+z} = c + z \end{cases}$).

(d) "Zadanie 19. Znaleźć cztery takie liczby, żeby dodane po trzy przewyższały pozostałą o daną liczbę."

(Dla danych a, b, c, d rozwiązać układ równań $\begin{cases} \phantom{x+{}} y + z + t = a + x \\ x \phantom{{}+y} + z + t = b + y \\ x + y \phantom{{}+z} + t = c + z \\ x + y + z \phantom{{}+t} = d + t \end{cases}$).

(e) "Zadanie 20. Daną liczbę rozłożyć na trzy liczby tak, by każda ze skrajnych, dodana do środkowej miała dany stosunek do pozostałej."

(Dla danych a, k, m rozwiązać układ równań $\begin{cases} x + y + z = a \\ x + y = kz \\ y + z = mx \end{cases}$).

(f) "Zadanie 22. Znaleźć trzy takie liczby, które staną się równe, gdy każda odda następnej daną swoją część."
(Dla danych niezerowych a, b, c rozwiązać układ równań $\left(1 - \frac{1}{a}\right) x + \frac{1}{c} z = \left(1 - \frac{1}{b}\right) y + \frac{1}{a} x = \left(1 - \frac{1}{c}\right) z + \frac{1}{b} y$).

(13) Wyznaczyć wszystkie rzeczywiste wartości niewiadomych x, y, z, t dla których:

(a) $\begin{cases} x + 4y + 10z + 20t = x \\ -6y - 20z - 45t = y \\ 4y + 15z + 36t = z \\ -y - 4z - 10t = t \end{cases}$, (b) $\begin{cases} x + 4y + 10z + 20t = -x \\ -6y - 20z - 45t = -y \\ 4y + 15z + 36t = -z \\ -y - 4z - 10t = -t \end{cases}$.

(14) Rozwiązać układ równań $\begin{cases} 20x - 10y + 4z \phantom{{}- 4t} - t = a \\ 70x - 36y + 15z - 4t = b \\ 84x - 45y + 20z - 6t = c \\ 35x - 20y + 10z - 4t = d \end{cases}$ w zależności od parametrów $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

(15) Wykazać, że $V = \mathbb{C}$ ze zwykłym dodawaniem jako dodawaniem wektorów i operacją mnożenia przez skalar

$$\begin{aligned} * \quad &: \quad \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \\ (z, v) \quad &\mapsto \quad z * v := \overline{z} \cdot v \end{aligned}$$

jest przestrzenią liniową nad ciałem liczb zespolonych $\mathbb{C}$.

(16) Niech V będzie zbiorem liczb rzeczywistych dodatnich, a dodawanie wektorów niech będzie mnożeniem liczb. Operację mnożenia przez liczby rzeczywiste określimy następująco:
$$\cdot : \mathbb{R} \times V \to V,$$
$$(a, v) \mapsto v^a$$
Wykazać, że wyżej opisana struktura algebraiczna jest przestrzenią liniową nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.

(17) Niech K będzie dowolnym ciałem oraz niech $V = K^\infty$ (zbiór wszystkich nieskończonych ciągów elementów ciała K). Określmy działania dodawania wektorów oraz mnożenia wektorów przez skalary z ciała K następująco:
$$\begin{aligned} [a_1, a_2, \ldots] + [b_1, b_2, \ldots] \quad &: \quad = [a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots], \\ a \cdot [a_1, a_2, \ldots] \quad &: \quad = [aa_1, aa_2, \ldots]. \end{aligned}$$
Pokazać, że wyżej zdefiniowana struktura algebraiczna jest przestrzenią wektorową nad ciałem K.

(18) Niech A będzie niepustym zbiorem oraz niech K będzie dowolnym ciałem. Oznaczmy symbolem K^A zbiór wszystkich funkcji $A \to K$. Sumą funkcji $f : A \to K$ oraz funkcji $g : A \to K$ nazywamy funkcję $f + g : A \to K$ taką, że $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$ dla każdego $a \in A$. Iloczynem funkcji $f : A \to K$ przez skalar x z ciała K nazywamy funkcję $xf : A \to K$ taką, że $(xf)(a) = xf(a)$ dla każdego $a \in A$. Pokazać, że tak zdefiniowana struktura algebraiczna jest przestrzenią liniową nad ciałem K.

(19) Oznaczmy symbolem $K[X]$ zbiór wszystkich wielomianów zmiennej X o współczynnikach z ciała K. Sprawdzić, że z działaniami dodawania wielomianów i mnożenia wielomianu przez elementy ciała K, zbiór $K[X]$ jest przestrzenią wektorową nad ciałem K.

(20) Oznaczmy symbolem $K(X)$ zbiór wszystkich funkcji wymiernych zmiennej X o wspóczynnikach z ciała K . Sprawdzić, że z działaniami dodawania funkcji wymiernych i mnożenia funkcji wymiernej przez element ciała K zbiór $K(X)$ jest przestrzenią wektorow nad ciałem K.

(21) Niech A będzie dowolnym zbiorem, a $P(A)$ niech będzie zbiorem wszystkich jego podzbiorów. Działanie dodawania w zbiorze $P(A)$ definiujemy następująco: $B \div C = (B \setminus C) \cup (C \setminus B)$. Mnożenie elementów $P(A)$ przez elementy ciała $\mathbb{Z}_2$ definiujemy w oczywisty sposób: $0 \cdot B = \emptyset$, $1 \cdot B = B$. Sprawdzenie łączności działania $\div$ jest dość kłopotliwe.
   (a) Zakładając, że działanie $\div$ jest łączne, sprawdzić, że spełnione są również pozostałe aksjomaty przestrzeni liniowej.
   (b) Wykazać łączność działania $\div$.

(22) Niech $V = \mathbb{C}^4$, $U = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in V : z_1 = z_2 = 0\}$. Wektory dodawać będziemy w zwykły sposób natomiast mnożenie przez skalary definiujemy na cztery różne sposoby:
   a) $z\alpha = \theta$ dla $z \in \mathbb{C}$ oraz $\alpha \in V$.
   b) $z\alpha = \alpha$ dla $z \in \mathbb{C}$ oraz $\alpha \in V$.
   c) $z\alpha = (\operatorname{Re} z)\alpha$ dla $z \in \mathbb{C}$ oraz $\alpha \in V$.
   d) $z\alpha = \begin{cases} z\alpha \text{ gdy } z \in \mathbb{C} \text{ i } \alpha \in U \\ \overline{z}\alpha \text{ gdy } z \in \mathbb{C} \text{ i } \alpha \notin U \end{cases}$.

   Sprawdzić, że w każdym z czterech powyższych przykładów dokładnie jeden z aksjomatów przestrzeni liniowej nie jest spełniony.

(23) Zbadać, które z następujących podzbiorów przestrzeni K^4 są podprzestrzeniami wektorowymi:
   a) $U = \{[t, t + 1, 0, 1] : t \in K\}$,
   b) $U = \{[t, u, t + u, t - u] : t, u \in K\}$,

c) $U = \{[tu, u, t, 0] : t, u \in K\}$,
d) $U = \{[x, y, z, t] : x + y - z = 0\}$,
e) $U = \{[x, y, z, t] : xy = 0\}$,
f) $U = \{t[1, 0, 1, 0] + u[0, -1, 0, 1] : t, u \in K\}$.

(24) Zbadać, które z następujących podzbiorów przestrzeni $\mathbb{R}^4$ są podprzestrzeniami liniowymi:
a) $U = \{[t, u, t + u, t - u] : t \leq u\}$,
b) $U = \{[t, u, t, 0] : tu \geq 0\}$,
c) $U = \{[x, y, z, t] : x, y, z, t \in \mathbb{Q}\}$.

(25) Niech $\mathbb{R}^\infty$ będzie przestrzenią ciągów elementów ciała $\mathbb{R}$. Zbadać, które spośród następujących zbiorów są podprzestrzeniami wektorowymi przestrzeni $\mathbb{R}^\infty$:
a) $U_1 = \{[a_1, a_2, \ldots] : a_{i+1} = a_i + a_{i-1}$ dla każdego $i = 2, 3, \ldots\}$;
b) $U_2 = \{[a_1, a_2, \ldots] : a_i = \frac{1}{2}(a_{i-1} + a_{i+1})$ dla każdego $i = 2, 3, \ldots\}$;
c) zbiór wszystkich ciągów $[a_1, a_2, \ldots]$, których prawie wszystkie wyrazy (wszystkie wyrazy z wyjątkiem co najwyżej skończonej liczby) są równe zero;
d) zbiór wszystkich ciągów ograniczonych.

(26) Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem niepustym oraz niech $V = \mathbb{R}^A$ będzie przestrzenią funkcji $A \to \mathbb{R}$ (zob. zadanie **??** , str. **??**). Zbadać, które z następujących podzbiorów przestrzeni $\mathbb{R}^A$ są podprzestrzeniami liniowymi:
a) zbiór wszystkich funkcji parzystych, gdy $A = \mathbb{R}$.
b) zbiór wszystkich funkcji nieparzystych, gdy $A = \mathbb{R}$.
c) zbiór wszystkich funkcji rosnących.
d) zbiór wszystkich funkcji monotonicznych.
e) $U = \{f \in V : f(0) = f(1)\}$, gdy $A = [0, 1]$.
f) $U = \{f \in V : f(x) = 0$ dla każdego $x \in B\}$, gdy $B \subset A$ i $B \neq A$.

(27) Sprawdzić, które z określonych podzbiorów przestrzeni wielomianów $K[X]$ nad ciałem K są podprzestrzeniami wektorowymi:
a) $U = \{F \in K[X] : F(-1) = 0\}$,
b) $U = \{F \in K[X] : F(0) \cdot F(1) = 0\}$,
c) $K[X]_{10} = \{F \in K[X] : \mathrm{st}F \leq 10\}$,
d) $U = \{F \in K[X] : \mathrm{st}F = 10\}$.

(28) Pokazać, że jeśli $U_1 = lin(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$, $U_2 = lin(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l)$, to
$$U_1 + U_2 = lin(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l).$$

(29) Wyznaczyć wszystkie podprzestrzenie przestrzeni
a) ${\mathbb{Z}_2}^2$;   b) ${\mathbb{Z}_3}^2$;   c) ${\mathbb{Z}_2}^3$.

(30) Pokazać, że jeśli U oraz W są podprzestrzeniami przestrzeni liniowej V, to $U \cup W$ jest podprzestrzenią przestrzeni V wtedy i tylko wtedy, gdy $U \subset W$ lub $W \subset U$.