Jerzy Mioduszewski

W e w n ę t r z n e ź r ó d ł a m a t e m a t y k i

Początki mego wieku oślepiał blask logicyzmu. .Ale nie poszedłem tym śladem. Dawniejsi filozofowie pisali mętnie, ale nieskrępowani logiką, mogli powiedzieć więcej – Tomasz Grabiński - profesor emerytowany Uniwersytetu w Penzie

W s t ę p

Pogląd o wewnętrznej naturze matematyki nie jest nowy, ale ujęcie autora, pomyślane niezależnie, jest oparte przede wszystkim na jego własnych przemyśleniach i ma swoją odrębność. Autor przejmuje swój pogląd od Dedekinda, który tak istotne dla matematyki pojęcie jakim jest liczba wywodzi wprost ze "świata naszych myśli".

W przedstawionym przez autora poglądzie nie ma miejsca na matematykę jako gmach. Matematyczność jest zmysłem, jednym z wielu, którymi dysponujemy w konfrontacji ze światem zewnętrznym. Celem artykułu jest wywołanie dyskusji, potrzebnej także i z tego powodu, że poglądy autora - wcale nie aż tak odrębne - są podzielane przez milczącą większość matematyków, sceptycznie nastawionych wobec znanych ujęć całościowych.

Pochodne i całki, wzory Eulera w rodzaju ¶2/6, teoria mnogośći, Jedno mogłoby istnieć bez drugiego. To wszystko matematyka. Czy jest jakąś całośćią? Jest anegdota o Erdosu, który zwierzeył się swemu równie znakomitemu koledze, że nie zrozumiał nigdy teorii Galois. To nie dla ciebie, Paul - usłyszał w odpowiedzi. Dla kogo zatem jest twierdzenie matematyczne? Na czym nam w nim zależy? Arystoteles uważał, że nie jesteśmy przywiązani do samej treści twierdzenia matematycznego. Równie dobrze przyjmiemy jego negację, o ile okaże się prawdziwa. Pewne obserwacje są za tym, by zgodzić się z Filozofem, ale w wyniku naszych dalszych rozważań dojdziemy i do innych konkluzji, bo może chdzi to jeszcze o coś innego.. .

Przedstawiany artykuł był poprzedzony odczytem na sesji naukowej w Katowicach i jego streszczeniem w „Postępach Fizyki", 62.3 (2011). Nieżyjący już Profesor Jerzy Janik zachęcił autora do ujęcia tego szerzej.

R y t m   l i c z b y

Lokum matematyki to „ś w i a t S n a s z y c h m y ś l i”. Zwrot pochodzi ze słynnego, chociaż niewielkiego i nie do końca zrozumianego przez matematyków, dzieła Richarda Dedekinda „Was sind und was sollen die Zahlen?” (1888) - "Czym są i czemu służą liczby?".

M y ś l - to pewien ustalony element wspomnianego świata S. Umysł nie jest w stanie powstrzymać się od „myśli o tej myśli”, a w rezultacie od potoku myśli, który jest podobny do p o t o k u l i c z b. Dedekind poświęcił dziesiątki stronic, aby z owego potoku myśli, wydobyć minimalną nić jaką tworzą liczby naturalne. Nie wskazywał żadnej konkretnej liczby, lecz na r y t m indukcji przenikający świat S, który jest n i e s k o ń c z o n y: po przesunięciu o jedną myśl dostajemy ten sam świat S. Liczba nie jest u Dedekinda wytworem ani czasu ani przestrzeni rozumianych fizycznie jak u Kanta.

To małe dzieło Dedekinda było jakby koniecznością tego czasu. Dedekind, jako uczeń Gaussa, był świadkiem powstawwania, a potem twórcą, pojęć algebry abstrakcyjnej. która wyszła poza znany układ liczb naturalnych. Obiektem algebry stał się zbiór, którego elementy można dodawać i mnozyć według określonych reguł. Przykładem były liczby zespolone Gaussa. Ale wkrótce sam Gauss, a potem P. Lejeune Dirichlet znaleźli systemy allgebraiczne już nowe. W tych systemach nie zawsze 2 plus dwa jest 4. Pojęcie zbioru zmiękczało twarde pojęcia algegraiczne, podobnie jak kiedyś u Greków geometria poddawała oglądowi liczbę, motywując na nich działania. . Już Grecy poszerzyli pojęcie luczby na wielkości ciągłe, co weszło w powszedni użytek w analizie matematycznej stworzonej przez Newtona, Continuum liczbowe, początkowo istniejące matematyce półintuicyjnie, zostało w końcu ujęte w rygor arytmetyczny wyrażany językiem zbiorów. Leopold Kronecker był zdania, że wzorca wszystkich tych systemów liczbowych, którym jest system liczb naturalnych. już nie trzeba tłumaczyć, bo tliczby naturalne - jak miał mawiać - stworzył Pan Bóg. Nie wykłuczamy, że rozmyślania Dedekinda były odpowiedzią na to głośne prowokacyjne powiedzenie Kroneckera. Był matematykiem, a przy tym poważnym filozofem, i wiedział, że dla odpowiedzi w takich kwestiach nie powinno się zatrudniać Pana Boga. Teraz wszakże – przyjmując znalezione przez niego rozwiązanie - niepokić nas będzie zagadkowy rytm indukcji, który w jego ujęciu liczby pełni rolę naczelną. Powstaje obawa wejścia w zakres niebezpiecznych automatyzmów myślowych. Istotnie, Giuseppe Peano zastąpił ujęcie Dedekinda niemal natychmiast ujęciem aksjomatycznym, co usunęło w cień aspekt filozoficzny dzieła Dedekinda. .

Rok 1888 jest tu raczej przypadkowy   Swoje „Was sind und was sollen die Zahlen?” Dedekind napisał w myśli już zapewne wtedy, kiedy w roku 1864 powstawał jego „Supplement 11”, w którym dał zręby algebry abstrakscyjnej, o którym Emmy Noether pisała: „to wszystko było już u Dedekinda”. A zwlekał tyle czasu jedynie z powodu swego - jak mawiał - „Treppenverstand”, co na polski tłumaczy się jako „esprit d'escaliere”.

Rzeczy, które przemyślał Dedekind są bezczasowe. Przepadłyby bez śladu, jeśliby nie padły na grunt będącej w pełni rozwoju filozofii niemieckej. Zwrot „świat naszych myśli” nie był oryginalnym zwrotem Dedekinda. Był u Bernarda Bolzany i narzucał się filozofom wieku XIX-ego. Jednak Dedekind nie użyłby tego „S”, gdyby chodziło o j a k i e k o l w i e k zamknięcie dla naszych myśli. Nie używamy symbolu dla czegoś nieokreślonego. Za Dedekindem przyjmujemy, że świat S, który – chociaż nie wiemy o nim za wiele - po prostu j e s t. W odróżnieniu od konstruktów myślowych, które go będą zaludniać, sam konstruktem myślowym nie jest.

Doświadczenie myślowe Dedekinda skłania do wniosku, że w naszej myśli mogą powstawać pewne konstrukcje niezależnie od bodźców zewnętrznych. Narzucamy światu rytm następstwa i widzimy go jako nieskończony, nie zapytując świata, czy życzy sobie takiego jego rozumienia. Napisał gdzieś Max Scheller, że żyjemy światu naprzeciw.

Rrytm liczbowy jest osią dynamiki świata S. Czy jest fragmentem czegoś szerszego - tylko się domyślamy. Jest rytmem następstwa. Ale jest też k o n t e m p l a c j a, w której myśl płynie w sposób c i ą g ł y. Jest to bardziej ukryty bieg myśli. W sytuacjach niewerbalnych, a są nimi ssytuacje przedmatematyczne - widzimy się w potoku myśli, który jest ciągły.

My wszakże wyodrębniamy oddzielne stany i formułujemy sądy, którym nadajemy formę z d a ń. I chociaż nasze myślenie wydaje się być ciągłym, to nasza jego e k s p r e s j a zdaje się wymagać zamknięć w zdania, które są jakby jego a t o m a m i. Atomizm myślowy jest wielką zagadką naszego świata S. Jest jak się zdaje jego koniecznością.

Ekspresja zamykająca myśli w oddzielnych sygnałach coś jednak gubi i nie oddaje zapewne całej – jak byśmy nazwali -- p r z e d ś w i a d o m o ś c i. Zgodziłby się z tym zapewne Ludwig Wittgenstein, według którego ekspresja językowa ma jakieś naturalne ograniczenia. Aby wyjść poza nie - jak ujmuje jego myśl Alfred Gawroński - uciekamy się do form pozasłownych wyrażających emocje i sięgamy po symbolizm poezji oddający całe zespoły doznań. Jakby dla rozładowania nagromadzonych trudności dodaje, że rozszerzają naszą ekspresję także gry językowe i pure nonsens, przez co natrafiamy na myśli niedostępne sądom wyrażanym w zdaniach. Wydawałoby się, że nasze nastawienie do świata wyraża się p y t a n i a m i. Ale zwracamy się do świata nie pytaniami, lecz gotowymi zdaniami oznajmującymi - h i p o t e z a m i. . .

Potokowi myśli jakim obdarza nas indukcyjne następstwo nie towarzyszy bezpośrednia refleksja. Ten potok płynie jakby obok nas. Nie panujemy nad rytmem naszych myśli Jak pisze Andriej Biełyj, inspirowany matematyczną filozofią swego ojca Nikolaja Bugajewa, „myśli same się myślą"'. Potok myśli to nie tylko następstwo liczb, bo są inne znane następstwa, Bo wspomnijmy potok myśli w "Herzogu" Saula Bellowa, czy „Korekcie" Thomasa Bernharda. Nie umiemy wyłączyć się z tego strumienia, o czym pisał Bergson, oraz w znanej przed laty książce Ernest Dimnet, a powtarza współczesny nam Eckhart Tolle. A wiedząc to, tym bardziej powinniśmy znaleźć nad potokiem myśli panowanie. W znanej książce pisze Alexis Carrel: „Człowiek powinien wprowadzić spokój w siebie samego.". Wielki uczony nie pisał, czym mogłaby być ta siła kierującą umysłem, ale umiejscawiał ją w nas samych. . .

N a p r z e c i w ś w i a t u.

Z m y s ł y lokują w świecie S całe obrazy świata zewnętrznego. Świat S nie poprzestaje na ich kontemplacji, ale stwarza środki wychodzące naprzeciw atakującym go obrazom. Zastępuje te obrazy właściwą sobie konstrukcją własną. Śledząc tworzenie się pojęć, ma się wrażenie, że jesteśmy sceptyczni wobec zmysłów. Świat S, zanim utworzy akceptowalną przez siebie konstrucję, kontroluje jeden zmysł drugim, nie poprzestając na jednym aspekcie zjawiska.

Oto tworzy pojęcie koła, którego formę narzuca potem innym „kołom" obecnym w świecie zewnętrznym. Postrzegając te "koła", ma już zatem zawczasu gotowe wobec nich oczekiwania. Przez długi czas światu S wystarczy jedno koło, zanim nie objawi mu się ono w wielu aspektach. Odkryje, że koło to nie tylko kształt kolisty, ale że jest też przegroda, a także drogą, po której biegnie punkt. A koło może się także toczyć. Nie wszystkim obrazom świat S potrafi przeciwstawiać swoje w z o r c e, ale ewolucja polega na wzbogacaniu ich zakresu.

Konstrukcja. jaką świat S obudowuje odbierane obrazy, nie należy do rzeczy samych w sobie w znaczeniu Kanta. Jest czymś co nasza myśl może naruszyć przy wglądzie. Nasz kontakt z tą własną konstrukcją jest z natury a n t y n o m i a l n y. Nie dotyczy to wszakże rytmu liczby, do którego ogląd myślowy nie wnika. Nie naruszamy liczby kiedy się w nią wnyślamy.

W kontakcie z zewnętrzem zazwyczaj kładziemy nacisk na jego p o z n a w a n i e. Tymczasem, my ten świat p r z e ż y w a m y, co jest istotą naszego w świecie przebywania. Trudno w matematyce utrzymać w tym jakąś równowagę, bo przedmiotem matematyki są wzorce , w których zawarta jest s c i e n t i a. Ale jest też w nich a r s, i tendencje w tym kierunku są równie silne. Te wzorce, których zadaniem było lepsze poznawanie zewnętrza, są jednocześnie naszymi znakami rozpoznawczymi dla wzajemnej komunikacji, stanowiąc mur obronny przed niechcianymi wpływami. Chcemy, jak m o n a d a L e i b n i z a, być wolni od wpływów zakłócających nasze wnętrze, selekcjonując odbierane obrazy według kierujących nami upodobań. Od siebie nawzajem odbieramy jedynie sygnały, które wskazują na określony rodzaj treści. Ten sposób wzajemnej komunikacji sprawia, że nie uczymy się od siebie przelewając sobie nawzajem całe mózgi. Odbieramy jedynie izolowane sygnały wystarczające dla rozbudzenia w monadzie jej świata wewnętrznego, który ma ona tylko dla siebie. Te sygnały wszakże wystarczą, by powstała wspólnota chroniąca nas od solipsyzmu. Staramy się, by nasz świat wewnętrzny był nieprzystępny dla zewnętrznej pospolitości. Dzieło sztuki, aby obronić się przed przetworzeniem w kicz, zaznacza choćby jednym szczegółem – może być to nawet skaza – swoją odmienność od środowiska. A przecież, tym pospolitym – jak je nieraz widzmy - zewnętrzem się karmimy. Według Arystotelesa, nie ma niczego w naszych myślach co by nie przeszło wcześniej przez zmysły.

Wspomniany już Andriej Biełyj przekazał w swojej powieści”Petersburg” potok myśli, które same się myślą, a w powieści „Moskwa” myśli swojego ojca Nikołaja Bugajewa, który nazywał siebie neoleibnicjonistą. Najczęściej nie czytamy Kanta, czy Leibniza. Ich idee praejmujemy od ich kontynuatorów. Kanta – w tym co dalej – przejmujemy od Konrada Lorenza. Monadologię Leibniza przejmujenmy od Bugajewa. Rozumiemy wtedy mądrość monadologii, która pozostawia monadom niedostępny intruzom ich stan wewnętrzny. Nie mamy dostępu do cudzych myśli, a jednak potrafimy rozbudzać przesyłanymi sygnałami świat wewnętrzny tych innych. . Rozumiemy w ten sposób powstawanie spójnych myślowo społeczeństw.

Zmysły, które zasiedlają świat S, walczą w nim o miejsce dla siebie. Widzimy wśród nich również zmysł, ten najbardziej wewnętrzny, którego zadaniem jest k s z t a ł t o w a n i e wspomnianej konstrukcji. Nazwijmy ten zmysł z m y s ł e m m a t e m a t y c z n y m. Zmysł matematyczny odczuwa przykrość, jeśli dla dostarczonego sobie spostrzeżenia nie znajduje właściwego miejsca. Odczuwa zadowolenie, wręcz spełnienie, z wprawnie wykonywanych czynności. Ale odczuwa – jak każdy zmysł – głód wrażeń, Jest nie tylko świadkiem tworzenia pojęć. Jest uwikłany w emocje dostarczane mu przez cały pozostały koncert zmysłów, z których każdy dołącza tu swoją melodię czy barwę. Nie nazwalibyśmy go z m y s ł e m, gdyby ograniczał się do roli kuriera przenoszonych przez siebie komunikatów. Nie pójdziemy więc za Arystotelesem aż tak daleko, by odmawiać matematykom, a tym samym zmysłowi matematycznemu, zainteresowania treścią przekazu.

Wzorce, które wbudowane są w świat S nie są dokładnie tym, co daja nam zmysły. Zmysł matematyczny nadaję im formę zgodną z jego poczuciem własnej logiki i estetyki. Potrafi połączyć dwa odczucia zmysłowe w jedno W ten sposób powstaje pojęcie prostej łączące w jedno promień światła i napiętą nić. Rozumiemy jednak sceptycyzm Filozofa, kiedy widzimy jak często samo sprawne wykonywanie zadań daje satysfakcję.

Twórcy matematyki są coraz bardziej skłonni przyjmować, że wyjaśnienie istoty matematyki leży bardziej w rozpoznaniu natury świata S i zmysłów, które go zaludniają, niż w rozpoznaniu treści, które niesie matematyka, które jak się wydaje matematyce objaśnia dopiero świat zewnętrzny. John von Neumann w swoich wczesnopowojennych esejach – Chicago University Press 1947 - przyznaje, że nie poznawczość, lecz estetyzm – wręcz samolubność – dodajmy od siebie – jest tym, co kieruje matematyką. Hardy wręcz twierdził, że taka właśnie jest natura matematyki. Ukształtowany w innym świecie pojęć Sziłow – Georgij Kaciweli, „Matiematika i diejstwitielnost", Istoriko-mat. Issledovanija, 1975 - również twierdzi, że matematyka kieruje się w swym rozwoju własnymi, znanymi sobie, prawami.

U swoich początków platońskich matematyka nie zajmowała się swoją wewnętrzną naturą. Odkrywała świat liczb i figur, nie robiąc różnicy między nimi a ich myślowymi obrazami. Nawet nieskończonośc platońska była natury fizycznej, zewnętrznej. Ale po Newtonie nie mogliśmy już nie widzieć, że matematykę budujemy w naszych myślach. Wiek osiemnasty to szturm rozumu. Nie kochamy tego wieku, ale kierunek wtedy nadany jest już nieodwracalny. W wieku dziewiętnastym było już oczywistym, że przedmiot matematyki jest w istocie wytworem naszej myśli. Jako relikty, niezależne od samej myśli, pozostawiano symbolicznie tradycyjne liczby i figury.

Prawdy znane matematyce sięgają w daleką przeszłość, ale matematykę – w której te prawdy łączą się ze sobą myślą - stworzyli Grecy. Pitagorejczycy i póżniejszy od nich Platon, opowiadali się za ujęciami całościowymi. Sceptyk Arystoteles był jednak zdania, żę w budowie pojęć należy iść krok po kroku. Ten sceptycyzm był począlkiem krytycznej analizy pojęć przez nas rozbudowywanych, zo które czujemy się odpowiedzialni. Pierwszym znanym przykładem była budowa punktowa prostej, Czy ma to być nrzucające się myślowo punktowe continuum, czy lepiej przyjąć za Demokrytem, że jej budowa ma kształt położonych obok siebie atomów. Na tym przykładzie widzimy jak wokół danego zjawiska budujemy takie lub inne o p o w i e ś c i, uzyteczne fikcje, które rozbudowują obraz. Czy mamy je odrzucać z powodu nadmiaru fabularyzacji? Opowieść wspomaga rozumienie. Według Dedekinda, opowieść o przekrojach oswaja myślowo pierwiastek z 2.

Matematyka prszestaje być zatem nauką o przedmiotach widzianych na jeden sposób. Mieli tego świadomość już filozofowie starożytni, ale przypisuje się ten pogląd dopiero filozofom wieku dziewięnastego. Widzimy świat być ć może za każdym razem innym zmysłem, lub z innej strony.

Według Kanta, u podstaw tych sposobów widzenia rzeczy jest rzecz sama w sobie, który w ten sposób ratował naszą wiarę w jeden świat. Możemy być więc nadal n o m i n a l i s t a m i. Mając przed sobą figury geometrii Euklidesa i liczby naturalne, jesteśmy niewątpliwie nominalistami. Nie rozszczepiamy tych bytów na aspekty i wielość ich rozumienia. Rzeżbiąc w prawdziwej przestrzeni, nawet mając na uwadze figury jak najbardziej osobliwe, takie jak sfera Aleksandera, wspólne brzegi obszarów płaskich Brouwera, czy kontinua dziedzicznie nierozkładalne Knastera, mamy przed sobą jednoznacznie myślane i widziane obiekty. Klasyczna teoria liczb jest również w tym sensie nominalistyczna. Jest wglądem w rzeczywistość niezależną od matematyka, odnotowujemy w niej jedynie nasze spoetrzeżenia. .

Ale bywa, że mając wiele opowieści na dany temat, zaczynamy się w końcu zastanawiać, czy nie rozmnożyliśmy światów? Tego rodzaju pytania skłoniły matematyków do przyjrzenia się naturze matematyki także z tej strony. Z niepokojem zauważamy, że świat S naszych myśli mógłby zadowolić się w czytaniu i przeżywaniu rozbudowywanych przez siebie opowieści, dając zmysłowi matematycznemu zadowolenie z zaspakajania swoich doznań. . Daleki cel poznanania pozostawiony jest Filozofowi Jest do pomyślenia samolubna matematyka, chociaż może użyliśmy zbyt mocnego słowa. .

M e t a f i z y k a

Nasze poznawanie świata poprzedzone jest p r z e ś w i a d c z e n i a m i, m e t a f i z y c z n y m i, które wraz z wyrosłymi na nich przekonaniami, i oczekiwaniami – ale też – jak pisze Allan Bloom - uprzedzeniami wobec tego, co może przyjść z zewnątrz, tworzą naszą m e t a f i z y k ę. Poznanie matematyczne wraz z jego tak rozumianym otoczeniem metafizycznym, składa się na coś, co nazwalibyśmy m a t e m a t y c z n o ś c i ą.

Wielką w niej zagadką są wspomniane pierwotne wdrukowania, które weszły w nas bez wcześniejszych zapowiedzi, a mamy na myśli przede wszystkim rytm pierwotny dający nam liczbę. Nie jest on poddany naszej zmysłowości, nie panuje nad nim nasza świadomość. Jego status w naszej metafizyce i w naszej matematyczności jest s p e c j a l n y. Pogląd o niezależności pojęcia liczby od pojęć o przestrzeni i czasu przypisaliśmy Dedekindowi. Ale przecież wcześniej byli Pitagorejczycy, a pogląd prymatu liczby głosił również Gottlob Frege, współczesny Dedekindowi. Upatrywał on jednak istotę liczby w jej aspekcie ilościowym, a nie jak Dedekind w jej aspekcie porządkowym, dynamicznym, wyznaczonym przez jej rytm indukcyjny.

Chociaż sama liczba nie potrzebuje przestrzeni, aby się gdzieś znaleźć, to jednak my, chcąc oswoić liczbę, próbujemy lokować liczby w odpowiednich tworzonych przez nas przestrzeniach. Czynił to Euklides w księdze VII Elementów", który dla umotywowania działań na liczbach lokował je w geometrii, , i Gauss, który w tym celu sięgnął po zbiory. Liczba - używając słów Mosesa Mendelssohna - w c i e l a się w pojęcia matematyczne. Liczba s ł u ż y matematyce, ale tak samo prawdziwym wydaje się powiedzenie, że liczba się n a r z u c a. Wcielając się we wspomniane pojęcia, rozbudowuje je na swójm sposób, rozbudowując przy tym i siebie.

Swiat S organizuje się w k o n t e k s t y złożone z sądów łączonych ze sobą tak, by pozostawały ze sobą w z g o d z i e. Ta zgodność sądów jest jest tym, co świat S uznaje za swoje w e w n ę t r z n e k o h e r e n t n e p r a w d y. Użyta została liczba mnoga, bo konteksty, są od siebie niezależne, nie pretendują do pokrywania całości. Jest więc w matematyce geometria i arytmetyka, ale są też węższe konteksty, jak na przykład logarytmy. Koherentnymi powiązaniami łączymy prawdy jedynie w ustalonych kontekstach. Te są autonomiczne. Struktura iich powiązań jest luźna, będąc w jakiejś analogii do świata monad Leibniza. Prawdy przekazywane są z jednego kontekstu do drugiego jedynie w formie m e t a f o r, wśród których najbardziej znanymi są te, które arytmetyka przenosi do geometrii, na przykład traktując jako liczby odkładane jeden po drugim odcinki. Prawdy przeniesionę metaforą do innego konteskstu żyją tun już swoim odrębnym bytem. Ubogacają się swoim nowym nosicielem. Jeśli wracają z powrotem w swoje pierwotne rejony, są już bogatsze o nowe doświadczenie.

Największymi mefaforami są te, które przenoszą prawdy matematyczne do rzeczywistośći, Te, przeniesione do rzeczywistości zderzają się z faktami Jeśli nie uzyskują zgodnośći, świat S modyfikuje swe konstrukty. Dlatego, nie popełnimy błędu, jeśli nazwięmy matematykę nauką doświadczalnną. Również metafory przenoszące prawdy z kontekstów do kontekstów, pozwalają na wzajemne korekty prawd. Matematyka rozwija się dzięki ustawicznej wymianie tych doświadczeń. Przenoszone przez metafory, z kontekstu do kontekstu nabierają cech bardziej ogólnych. Ale esencją prawdy pozostają jej monady tworzone w osobnych konekstach.

F a k t nabiera dla świata S znaczenia, jeśli znajdzie dla siebie miejsce w określonym jego kontekście , który faktowi nadaje status i s t n i e n i a. Nie znamy innego rozumienia istnienia niż znalezienie się w koherentnie w określonym kontekście. Nie jest to więc pojęcie absolutne. Może być wiele s p o s o b ó w istnienia. Liczba V2 i przekątnia kwadratu o boku 1 to różne sposoby zaistnienia tego samego zjawiska, którego zaistnienie daje również odpowiedni przekrój Dedekinda. .

Konstrukcja myślowa ulega przebudowie, aby móc wchłonąć fakt w sposób koherentny. Przebudowa kontekstu kosztuje, i już chociażby dlatego świat S nie cieszy się z każdego poszerzenia wiedzy. Jest to nie tylko dystans. Bo metafizyka ocenia również w a r t o ś ć prawd. Ocenia je według spełniania przez nie wcześniejszych co do nich oczekiwań. Nie odrzuca odkryć Cricka i Watsona, ale nie musi, w odróżnieniu od nauki, cieszyć się tymi odkryciami. Nauka nie pyta c u i b o n o? Czerpie satysfakcję ze swojej sprawności. A metafizyczność pyta. Prawda – w tym znaczeniu o jakim tu mowa - ma w metafizyce nie tylko wartość, ale ma też i z n a k. Rajskie drzewo dobrego i złego i skała Prometeusza stale towarzyszą jako przestroga. Ten lęk przed wiedzą prerastającą jej nadaptację towarzyszy ludzkości od samego jej zarania.

Czy nie dotyczy to również prawd matematycznych? Matematyka nie stwarza tego rodzaju lęku bezpśrednio i mało w nas obaw o to ku czemu nas prowadzi. Wszakże metafory z niej idące mogą sięgać daleko.

Nie można też zapominać, że dając matematyce lokum, odczuwamy na rozmaite sposoby jej kłopotliwą obecność. Ma swoje wobec nas wymagania. Kradnie czas. Ucieka z myśli, jeśli nie jest obsłużona w porę. Prawda matematyczna trwa w umyśle jeśli jest przeżywana. Prawdy matematyczne, te najbardziej oderwane od doznań zewnętrznych, goszczą w umyśle mieraz dosłownie przez chwilę. Słyszało się, że nie zapisane w porę dowody powstałe w Kawiarni Szkockiej bezpowrotnie ginęły. Prawdy matematyczne, nawet zapisane, mogłyby nie odżyć, jeśliby nie były wcielone w nasze doznania zmysłowe i nie były przez dłuższy czas aktywnie przeżywane. Żyją, przekazywane od monady do monady, raczej w postaci rozbłysków niż płomienia. Ale, jak twierdzi Solomon Golomb, jeśli zawitają do nas po raz drugi, będą te same co przedtem.

Płacimy za tę efemeryczną t r w a ł o ś ć prawd cenę wysoką, odsuwając się przy ich uzyskiwaniu daleko jak tylko można od naszego ich zmysłowego odbioru. Wobec tego rodzaju prawdy potrafimy być już chłodni. Jeśli chcemy prawdę matematyczną przechować, to tylko w umysłach przeżywających ją jako swoją. Nie przechowalibyśmy narastającej mnogości jej prawd, jeśliby matematyka była księgą czy też gmachem. Matematyka utrzymuje przy życiu tylko swoje prawdy czynne. Przenoszzona od monady ludzkiej do mamady poprzez sygnały robudzające ich świat wewnętrzny, stanowi własność całej społecznośći. Są wśród prawd matematycznych takie, które osiągając doskonałość, są otaczane specjalną troską, stają się własnością wspólną, klejnotami matematycznych muzeów - jak jeziora Wady - lub ozdobami galerii - jak twierdzenie Morleya. Są nadal przeżywane, chociaż już w wysublimowany sposób, co jest wartośćią samą w sobie. Nie wydaje się jednak, by obca cywilizacja, dziedzicząca po nas jedynie wspomniane księgi i muzea, a nie współtworząca matematyki wraz z nami, była zdolna do jej myślowego przejęcia. Prawdy matematyczne są własnośćią danego świata

S. giną bezpowrotnie wraz z ich światem S.

Dopóki przedmiotem matematyki były proste figury geometrii i liczby w swych zjawiskowych indywidualnych postaciach, nominalistyczny platoński pogląd na wiecznotrwałość matematyki wydawał się niekwestionowalny. Ale wiek dziewiętnasty uwidocznił, jak wiele w matematyce zależy od nas samych, co współbrzmi ze słowami Couranta i Robbinsa z ich znajej książki. Brouwer na początku XX wieku zwrócił uwagę na wpływ jaki na prawdy matematyczne ma nasza logika. Interwencja logiczna pełna jest arbitralnych ustaleń zapełnianiających luki myślowe. Te mogłyby pozostać niezamknięte, ale logika – czuła na horror vacui - zamyka je na użytek doraźny w zdania, które w tej postaci są petryfikowane jako prawdy. Logika nie tworzy pojęć, służy jedynie utrzymaniu ładu w zbudowanych już strukturach. W wielu przypadkach odczuwamy jej wpływ jako hamujący. Zamykając otwarte wątki myślowe, uwalnia nas od pytań, odpowiadając zanim mogłyby być zadane. Zmienilibyśmy zdanie, gdybyśmy umieli znaleźć jakiś zmysł wewnętrzny kierujący naszą logiką.

C a l c u lu s

Matematyka Starożytnych była według Arystotelesa nauką o b y t a c h n i e r u c h o m y c h. Było to samoograniczenie wymuszone przez paraliżującą myśl aporię Zenona o strzale, blokującej rozumienie ruchu. Tymczasem ruch i zmienność są istotą zjawisk fizycznych i Arystoteles poświęcił cały rozdział w "Fizyce" w z r o s t o w i i z a n i k o w i. Sytuacje, gdzie obserwujemy zmianę są od siebie odległe. Może to być droga narastająca w czasie, nasilenie barwy, czy też tempo przepływu wody w strumieniu. Odbieramy te zjawiska przez jakiś zespół zmysłów, nie bezpośrednio, lecz w jakieś utemperowanej całości. Dlatego to być może uchwycenie praw rządzących zmianą pozostawało tak długo przedmiotem niepewnych sformułowań,

Ideę wspólnego ujęcia matematycznego zmienności podjęli filozofowie scholastyczni XIV wieku, Calculatores z Merton College z Oksfordu i filozofowie z Paryża. Wyszli od spostrzeżenia, że to, co bezpośrednio podlega obserwacji to nie w i e l k o ś ć zmiany lecz jej i n t e n s y w n o ś ć: bo nie podlega obserwacji ilość wody w strumieniu, lecz intensywność jego przepływu. Sformułowali p r a w o, według którego intensywność zmiany, obserwowana w określonym zakresie, d e t e r m i n u j e zmianę ilościowo. Jednym z przykładów, była intensywność łaski Bożej spływającej na człowieka, która się w nim nagromadza ilościowo, sumarycznie, na sposób, który nazywamy c a ł k ą Jest też intensywność siły wtłaczanej w poruszające się ciało, która determinuje jego i m p e t – w rezultacie prędkość. Jeśli więc s i ł a działająca na ciało jest, - tak jak przy spadku swobodnym – stała w czasie, to prędkość wzrasta w czasie jednostajnie.

Pełne włączenie idei czternastowiecznej w zarysowującą się już konstrukcję matematyczną zawdzięczamy Newtonowi, który oparł nowy dział matematyki - a n a l i z ę m a t e m a t y c z n ą - zwana na Wyspach c a l c u l u s e m - na wspomnianym wyżej prawie. To prawo musiał znać także Neper, określając logarytm jako funkcję o tempie wszrostu 1/x.

Matematyka Scholastyków i Newtona, zerpnęła jeszcze raz pełną garścią z dostępnego nam zmysłami świata. Intensywność zmiany jest jakby w y p e ł n i e n i e m c i ą g ł y m rytmu liczbowego . Podobnie jak rytm liczbowy ma zastanawiającą rozmaitość wcieleń, nadając matematyce nowe szybsze tempo rozwoju. R ó w n a n i e r ó ż n i c z k o w e z danych związków między intensywnościami odtwarza związki między samymi wielkościami, które bezpośredniej obserwacji nie są dostępne. Nie trzeba będzie nawet stu lat, aby prosty calculus przeszedł w równania struny u Eulera.

Motywacje analizy wywodzą się z szerszego zakresu doznań niż te, które wystarczały geometrii. Włącza się zmysł poczucia czasu, natężenia siły i poczucia nagromadzania się wielkości, na wiele sposobów wcielające się w sytuacje matematyczne. Metafizyczność tych motywacji odczuwamy nieostro, ale w sumie dużo silniej i pewniej niż w zakresie klasycznych motywacji geometrycznych, których źródło jest niemal bezpośrednie. Motywacje analizy nie są naszymi bezpośrednimi przekonaniami, lecz zdają się raczej wynikiem w d r u k o w a n i a ich w nas – używając zwrotu Konrada Lorenza – we wczesnych stadiach naszej ewolucji.

Calculus, bardziej niż inne dyscypliny, uwidacznia istotę i n t u i c j i. W istocie, jeśli matematyk mówi o intuicji, to ma na myśli calculus i to wszystko co na nim wyrosło. Intuicje, które leżą u podstaw geometrii Euklidesa, są zbyt proste, by uwidocznić swoje role. Przewidywania są tu łatwo i szybko potwierdzane zmysłowo. Zmysł kontrolujący calculus jest głębiej i szzerzej w nas skryty. Natężenie siły, bieg czasu i prędkość chwilowa są nieostro poddane naszemu oglądowi Mimo to jednak zawierzamy idącym od nich sygnałom. Intuicje leżące u postaw calculusu przetrzymały atak metod mnogościowych poprzednich dwu stuleci przetwarzając ślady pozornie przegranych potyczek w dzieła sztuki na zawsze zdobiące matematykę.

Intuicje, które doprowadziły do odkrycia calculusu, widzimy jako sumaryczne doświadczenie przedmatematyczne, jako c a ł k ę z doświadczeń przedświadomości, nie tylko naszej, lecz całego biegu ewolucji. Bywa, że nie ufamy intuicji, a Pascal dopowiadał, że to dlatego, że aż nazbyt często bywa bezbłędna.

M a t e m a t y k a a r e a l n o ś ć

Pojęć budowanych przez świat S, nie dzieliliśmy zawczasu na matematyczne i niematematyczne. Dopiero w którymś momencie pojawiła się matematyka, którą wyodrębnia się spośród ogółu dociekań ś c i s ł o ś c i ą. Ale nierygorystyczne fazy rozumowań są r ó w n i e ż matematyką, chociaż woleliśmy je nazwać m a t e m a t y c z n o ś c i ą. Nie wykluczamy zatem, ze w s z y s t k o, co ze świata odbieramy jest matematyczne. To, że w dostępnym nam zakresie zjawisk przyroda jest matematyczna, wydaje się t a u t o l o g i ą. Ale to, że jakieś zjawisko pozostaje p o z a naszą matematyką, nie znaczy że jest niematematyczne. Nasz udział w postępującej matematyzacji jest wszakżę umiarkowany, bo do nas należą jedynie matematyczne detale, takie jak kwadrat w prawie grawitacji. Prawo dał Stwórca, który nie musiał widzieć kwadratu w mianowniku, bo bierze się on z dopasowania prawa .do sposobu naszego odbioru. Nic nie ujmiemy Stwórcy, jeśli nie będziemy wymagać, by wraz z nami wypracowywał formuły matematyczne.

Pewną część natury człowiek ożywił, włączając ją do swych struktur metafizycznych. Tylko tę część natury możemy włączyć do nauki, poddając ją naszej matematyce. Pozostają jednak całe obszary zjawisk przyrody, do których z naszą matematyką nie zaglądamy. Czujemy się bezradni w całkiem prstych sytuacjach. Gubimy się gdy wychodzimy z gotową matematyką poza jej bramy. Mawiał Profesor Bronisław Knaster: matematyka nauczy nas j a k mnożyć i j a k dzielić, ale nie nauczy nas k i e d y mnożyć a k i e d y dzielić. Matematyk w tak zwanych zastosowaniach jest figurą raczej niezgrabną. . Nasze środki matematyczne nie wnikają w zjawiska przyrody jednakowo. Geometrią Euklidesa można iść w dowolnie dalekie regiony kosmiczne, uzyskując nadal sensowny opis zjawisk. Ale już Riemann zauważył, że użyteczność naszej geometrii zatraca się, jeśli przechodzimy ku mikroskali.

Arytmetyczność zdaje się nie mieć ograniczeń. Przyroda jej ulega, daje się eksploatować, ale nie odkrywa jej swoich głębszych tajemnic. Właściwe dla odkrywania jej tajników są m i ę k k i e wzorce matematyczne znane z analizy matematycznej – dawnego calculusu – i geometrii. Przyroda – ta nam bliska - ma je w sobie, a prawdy uzyskiwane tymi miękkimi metodami poddają się naszemu rozumieniu. Dla matematyków ważny jest k w i a t matematyki, a ten jest ulokowany w matematyce s ł a b e j, to jest tej, którą sami myślowo wypracowujemy. "Dowodzę coraz słabszych twierdzeń – ale coraz bardziej mi się one podobają" – to słowa matematyka, który po latach uwolnił się od przymusu arytmetycznego. Matematyka przetworzona metafizycznie przy pełnym udziale naszej świadomości jest tym dla której jesteśmy matematykami.

Tak zwane przedmioty matematyczne istnieją jedynie w nas. Fizycznie są niedostępne. Znikną razem z nami, a żadna inna cywilizacja nie przejmie ich od nas, nie znajdując znajdując dla nich zainteresowania w świecie swoich myśli, a mając inne upodobania, będzie do ich bezpośredniego przejęcia po prostu niezdolna, podobnie jak monada, która jest zdolna do przejęcia jedynie określonego sygnału rozbudzającego jej interior. Potrzebny jest kod i tego właśnie będzie brak. Dorobek metafizyczny upadłych cywilizacji przepada To co zostaje w muzeach, to materialne pozostałości. .

Z b i o r y

Zbiory wprowadził do matematyki IG a u s s. Nie wystarczała już geometria dla znajdowania zmysłowo dostępnych w c i e l e ń jego konstrukcji algebraicznych. Wygodna po temu była materia bardziej miękka, jaką dawał zbiór, obecny również w użyciu jako facon de parler. Abstrakt algebraiczny nabierał po wcieleniu go w zbiór cech quasigeometrycznych.

T e o r i ę   z b i o r ó w - nazywaną teorią mnogośći - stworzył C a n t o r, co należy roumieć tak, że upomniał się o autonomię pojęcia zbioru. Zbiory mają być rozważąne w oderwaniu od ról jakie pełnią. Tak pomyślany zbiór c z y s t y   i jego   e l e m e n t y,   nie uczestniczą w naszej zmysłowośći. Ten status w matematyce miała dotąd jedynie liczba.

Z pojęciem zbioru spotykali już Grecy rozważąjąc c o n t i n u u m,   jakim jest prosta złożona z punktów. Elementy stanowią   b u d u l e c zbioru. W ten sposób – materialistycznie - widział zbiory   Cantor. Tymczasem dla Dedekinda, elementy zbioru były nie więcej niż z n a k a m i   położenia, Dedekind nie rozpatruje zbiorów samych w sobie. Zbiór jest czymś   c o   s ł u ż y. Jest tą składową apriorycznośći, która zbliża nas ku r o z u m i e n i u, także ku rozumieniu liczby, jakim ona była w jego "Was sind und was sollen die Zahlen?". Jest różnica w tych dwóch sposobach widzenia zbiorów. Zarówno Cantor jak i Dedekind są twórcami pojęćia liczby rzeczywistej. W "Stetigkeit und irrationale Zahlen" Dedekinda objaśnia jedynie dawniej znane proporcje Eudoksosa. Cantor liczby rzeczywiste buduje.

Jak pisze A l e x a n d e r W i t t e n b e r g   w pełnej gruntownych przemyśleń książce „Von Denken in Begriffen” (1975). zbiory – tak zwane d o w o l n e - widzimy zawsze w jakiejś fizycznośći, na przykład jako zbiór punktów prostej, czy też zbiór piasczynek, które niesie wiatr, gromada ptactwa. Jedynym zbiorem, który pojawia się w naszych myślach b e z udziału doznań zmysłowych jest zbiór liczb naturalnych dany nam razem z całą swoją dynamiką rytmu pierwotnego, oraz jego przedłużenie w pozaskończoźć, które ma nadal charakter liczbowy.   Cantor, będąc na progu nieskończonośći aktualnej   ω postawił kroki ω + 1, ω + 2 i dalsze ku pomyślanej przez siebie p o z a s k o ń c z o n o ś c i. . Mimo że miał po temu pewne motywacje w postaci zbiorów wyjątkowości szeregu trygonometrycznego, to motywacja nie pojawia się w jego Memoire Nr 5, który był jego manifestem matematyki w y z w o l o n e j. Skala pozaskończona się pojawia, bo może być pomyślana.

Kkroki na tworzonej skali są wymuszone pewnym automatyzmem naszego myślenia, który dostajemy w apriorycznym podarunku jako porządek czystego następstwa, który nazwamy d o b r y m. Uważa się dobry porządek za wymaganie dodatkowe. Nic błędniejszego! Znaczyłoby to, że dla uzyskania dobrego porządku wystarczyłoby najpierw mieć porządek jakikolwiek, a potem go ulepszyć. Wymaganie zwykłego liniowego porządku jest logicznie słabsze, ale matematyka, ta apriorycznie w nas wbudowana, nie obdarzyła nas żadnym przykładem innym niż dobry porządek. Zauważył kiedyś Profesor Jan Mikusiński, że jeśli używając zasady wyboru budujemy w zbiorze częściowo uporządkowanym łańcuch nieprzedłużąlny (lemat Zorna), to bez naszych o to starań dostajemy łańcuch dobrze uporządkowany.

Według d e k l a r a c j i Cantora z jego „Mannigfaltigkeiten”, zbiór to „złożona z mających indywidualność elementów c a ł o ś ć M zespolona zgodnie z naszym oglądem i przemyśleniem". W zbiorze ma więc tkwić i d e a, która w i e l o ś ć formuje w j e d n o ś ć, aby zadośćuczynić jakiejś potrzebie naszego umysłu. Ale w materialnie widzianej w i e l o ś c i nie zawsze daje się rozpoznać ideę. Można ominąć tę trudność, uznając za ideę już s a m o z n a l e z i e n i e s i ę w kolekcji. Teoria mnogości – ta, którą mamy – zapomniała o deklaracji Cantora i dopuszcza to t a u t o l o g i c z n e rozumienie zbioru, pozbawiając się juz na samym wstępie filozoficznych ambicji. W teorii stworzonej przez Cantora, a przejętej przez Hilberta, zbiór w znaczeniu idei pozostał nigdy nie spełnioną obietnicą.

Utrzymanie obietnicy Cantora było trudne. Znamy sytuacje, kiedy brane z osobna w swoich kontekstach zbiory A i B reprezentują określone idee, a dla idei reprezentującej ich sumę nie potrafimy znaleźć. Każdy z krajów Europy reprezentuje określoną ideę, która łączy w jedność jego obywateli. Szukając wspólnej idei dla ich sumy popadamy w trudność, zadawalając się w końcu rozwiązaniem, że może to być na przykład wspólny zwyczaj zachowania się przy stole.

Według Fregego zbiór jest składnikiem pierwotnym naszych myśli, wcześniejszym niż liczba, co będzie wielkim sporem filozofów. Tak wysoko nie mierzył zbiorów Gauss, ani jego następca Dedekind. Według Fregego dwa zbiory reprezentują tę samą, liczbę, jeśli można jeden na drugi odwzorować wzajenmnie jednioznacznie. Cantor wzbogacił rysującą się teorię, wskazując na dwa stopnie nieskończoności ilościowej, prrzeliczalną i nieprzeliczalaną, jaką ma z uwagi na swoją budowę ciągła zbiór punktów składający się na c o n t t i n u u m. . Gdyby był podał na to tylko jeden dowód – geometryczny - mielibyśmy piękną i spokojną teorię zbiorów. Jego drugi dowód - zwany p r z e k ą t n i o w ym – arytmetyczny – nadał teorii mnogośći rozmiary, których matematyka nie wykorzystuje. Nie kwestionujemy tego dowodu, lecz odnotowujemy zadziwiającą łatwość jaką zaklęciami mnogościowymi, mając zbiór liczebnośći m, powołuje się do istnienia zbiór liczebności większej. Powstaje ogrom zbiorów niczym nie ograniczonych co do liczebnośći. Ich zaistnienie jest wynikiem jakiegoś jeszcze jednego wartego zbadania automatyzmu myślowego, i n n e g o niż ten, który doprowadził do zaistnienia skali pozaskończonej. .

Świat S dozwala, by "myśli myślały się same". Kiedy zostaje sam ze swoimi myślami, staje przed pytaniami, które powstają w wyniku wspomnianej myślowej swobody, Myśl deformuje myśl myślaną i powstaje a n t y n o m i a. Bo oto mówca orzeka, że mówi prawdę. Byłby kłamcą, gdyby kłamał Orzeka prawdę, kiedy mówi prawdę. Umyka naszej uwadzę, że mamy mamy do czynienia z antynomią.

Dostrzeżemy ją dopiero, kiedy mówca powie, że orzeka, że to co mówi jest kłamstwem. Jest to znana a n t y o m i ą k ł a m c y. Mówca orzeka prawdę, kiedy kłamie, a kłamie kiedy mówi prawdę. Odczuwamy to jako trudność. Ale sprzecznością nie jest. Orzeczenie o prawdzie raz dotyczy e t y k i e t y nadanej zdaniu, a raz jdotyczy jego treści. i te orzeczenia nie mają się w żaden sposób do siebie. Aby uwidocznić ich wymijalność, tworzymy tak zwany m e t a j ę z y k, w którym odróżnia się etykietę prawdy od prawdy

Ale jak rozpoznać, że mamy do czynienia z przedmiotem, czy myślą o nim? Nie miała tego kłopotu matematyka liczb i figur, a nawet matematyka calculusu, prowadzona wbudowanymi w nas intuicjami. Nie mamy też kłopotu z arytmetycznościa, ale to dlatego, że jej procedury przechodzą o b o k naszych myśli. Inaczej jest ze zbiorami, które są t ł e m dla myśli. Jesteśmy wtedy w konieczności, dla uniknięcia antynomii, piętrzać konstrukcję metajęzykowe, aby uniknąć antynomii. .

Nie musieliśmy do jakiegoś czasu myśleć w matematyce myśleć o w s z y s t k i m. Spotykali się z tym filozofowie w dyskusjach o praprzyczynie i omnipotencji. Była to burza, która nie sięgała jeszcze wtedy matematyki. Dosięgła matematyki, kiedy ta wyszła poza obiekty postrzegane, ku obiektom czysto myślowym, mającym niespotykańą dotąd łatwość rozbudowywania się poza kontroloeane refleksją zakresy. Matematycy mówią o wszystkim jedynie w obrębie ustalonego zakresu. Jeśli dozwolimy na swobodny bieg myśli, to tak zwane w s z y s t k o przestaje być wszystkim, bo można zawsze dołączyć myśl o t y m w s z y s t k i m. .

A n t y n o m i a l n o ś ć jest immanentną cechą świata S, w której myśl może być myślą o myśli, nie wykluczając, że o samej sobie. Sam fundament matematyki, jakim jest liczba i towarzyszący jej zbiór wyrasta na antynomialności, chociaż liczbie, jak wspominaliśmy, to nie szkodzi, bo jest poza refleksją myślową. Według Jana Potockiego, w świecie istot żyjących jedynie człowiekowi dana jest zdolność myślenia o własnych myślach. Z tym kłopotliwym prezentem musimy sobie dać radę. Polega to na posługiwaniu się ze zrozumieniem abstrakcją, na niewychodzeniu z formalizmami poza ich naturalne pole, na niezadawaniu pewnych pytań. Metajęzyk jest doaźną ochroną. Nad całośćiąnaszych myśli czuwa nasza m e t a f i z y k a. Powinniśmy się n a u c z y ć ż y ć z antynomialnością, która zagląda nam w oczy przy każdym wyjściu poza kontekst danej dyscypliny matematycznej i przy każdym wyjściu w zastosowania. .

C z y m t o s i ę r a z e m t r z y m a i k u c z e m u i d z i e ? ?

Nie ma czegoś takiego jak całość matematyki. Mamy n a u k i m a t e m a t y c z n e i o matematyce rzadko mówimy jako o n a u c e. Od nauk wymagamy, by miały p r z e d m i o t badań. Tymczasem, matematyka to raczej sposób bycia. Sięga dalekimi skokami ku problemom, które owocują w postaci luźno powiązanych ze sobą enklaw. Może wyrastać w każdym miejcu, a często wyrasta w miejscach już przedtem metamatycznych. Jako całość matematyka może objawiać się jedynie emocjonalne. Nie odnosimy się jednakowo do wspomnianych jej enklaw i konwencji. Również sama matematyka ma w sobie konkurujące ze sobą siły, wśród których nie brak wzajemnie się niszczących. Daleko posunięta arytmetyczność potrafi zniszczyć nawet liczbę w jej naturalnej postaci. Ale to właśnie dzięki wzajemnym kontaktom, enklawy matematatyczne wzbogacają się jedne dugimi.

Myśl matematyczna nie redukuje sprowadza się do naszego umysłu i jego automatyzmów. Karmi ją ś rd o w i s k o. W nim wyrasta problem i kształtują się pojęćia R. L. Wilder, topolog, w znanym odczycie (1950) mówi o p o d ł o ż u k u l t u r o w y m matematyki. Podłoże kulturowe potrafi łączyć dalekie, nieprzekładalne na siebie zjawiska matematyczbne. Tkwią one w tym samym podłożu kulturowym. które jest czułe na to, co się w nim dzieje. Znakiem możę być szmer podziwu gdzieś od podłoża.

Konrad Lorenz, wnikliwy obserwator ewolucji, jest zdania, że to, co nam daje otoczenie cywilizacyjne, przeważa nad tym co dziedziczymy. Jako monada człowiecza odbieramy niezliczone sygnały od monad innych i one rozwijają w nas więcej niż dziedziczenie. Jako sygnały są od i n y c h, odbieramy je krytycznie. Unikamy w ten sposób solipsyzmu. .Odsuwamy w ten sposób także i antynomialność, która pojawia się nieuchronne przy zamknięciu się we własnych myślach. Nie pojawia się w d i a l o g u, gdzie przerzucamy myśl o własnej myśli na rozmówcę.

Tworzy się wokół matematyki emanacja pojęć ogólnych. Czy ku nim ma kierować się matematyka? Jest w pojęćiach ogólnych wiele przymusu. Pojawiająca się w tych najwyższych partiach t w ó r c z o ś ć oceniana bywa krańcowo różnie. Jest twórczość, która nie zna znaku "stop". Są sztuki wyzwolone rozwijające się in vacuum. Pojawiająca się w tych najwyższych partiach twórczość oceniana bywa krańcowo różnie.

Nie wiemy co sprzyja odkryciom matematycznym. Wydają sprzyjać się im wielkie - nawet katastroficzne - wydarzenia wypłaszające matematyczne lęki, których sama matematyka ma niemało. Odblokowują się myśli. Nie sprzyja matematyce zastój cywilizacyjny. Ale, nie trzeba też płoszyć rozbłysku rozumienia matematycznego wymaganiem tłumaczenia się z tego w jaki sposób się w nas zjawiło. Twierdzenia pojawiają się wcześniej niż ich dowody. Niebezpieczne są dla matematyki twierdzenia, które weszły do niej jedynie dlatego, że mają dowód.

Ma się wrażenie, że matematyka wzięła za dużo na siebie. Chciała odpowiadać na każde pytanie, być sługą wszystkich nauk, rozpraszając swoje siły we wszelkich kierunkach, w które wciąga ją swymi problemami otaczający świat, ze spaktakularnymi osiągnięciami kosmologii, fizyki i biologii. Rozstrzygnięcia matematyczne padają samotnie. Jeśli zapytamy, co dały matematyce, to - wahamy się to wypowiedzieć - ale słyszy się, że po wielkich rozstrzygnięciach matematyka staje się uboższa. Utrzymujące się obecnie natężenie potoku odkryć matematycznych zawdzięczamy nie do końca jeszcze wykorzystanemu zasobowi środków i problemom dawniej postawionym. Chociaż niie myślimy, by ten zasób środków i problemów został w ciągu bliskich pokoleń wyczerpany, to jednak zdają się jednak wyczrpywać tak jak wyczerpują się kopaliny.

Z matematyką łączy się obawa jeszcze innego rodzaju. Pomyślmy, że nauki szczegółowe wytłumaczą jak powstają w naszym umyśle pojęcia i jak powstają dowody. Zniknie cała poetyczność matematyki. Czy chcielibyśmy nadal się taką matematyką zajmować? Zostawilibyśmy ją innym. Ale może dotyczyć to nie tylko matematyki. Rozwijamy się dzięki mitologii, która chroni nieznane. Personifikujemy matematyczność, bo tylko takie jest nasze jej rozumienie.

Domaganie się stałego rozwoju matematyki zdaje się być objawem jakiejś obsesji. Dlaczego tak nam tak na vtym zależy? Czy na twierdzeniach, które dowiedzione, zyskują status szacownych przedmiotów kolekcji? Czy chodzi może raczej na utrzymaniu napięcia myślowego, tego niepokoju, który daje nam poczucie żywotności myślowej. Kierunek poszukiwań matematycznych, nie istnieje. Filozof, który według Arystotelesa ma wyręczać matematyków w wyborze drogi, nadal nie istnieje. Schodzące ze sceny pokolenie, widząc obecny nieukierunkowany rozwój matematyki zapytuje, czy nie obróca się ona ku czemuś, czego nie chcielibyśmy widzieć jako matematyczności? . W wielu z nich nie znajdziemy dawnego kolorytu. Wiele nowych dyscyplin matematycznych widzimy już jako gorszego gatunku. Liczą sieę automatyzmy matematyczne. Nasila się trend arytmetyzacyjny i algebraizujący.

Nauki przyrodnicze w swoim szalonym rozwoju występują ze swoich brzegów, nie wiedząc ku czemu idą, ale przestały być hojne w matematyzujące się problemy. To dzięki nim kiedyś matematyka rozszerzała się o nowe pola badań i rozwijała sama siebie. Teraz nie zaspakaja tej potrzeby krańcowo zmatematyzowana fizyka, która sięga po rzeczy matematycznie wtórne. Niezależny od matematyki jej wgląd w mikroświat mógłby poszerzyć i matematykę, ale tak się nie dzieje. Matematycznośc przebija się z trudem ku inym naukom, które korzystają już jedynie z kodów matematycznych. Czy nadal mamy uczestniczyć z nimi – nie oszczędzajmy słów - w barbarzyńskim wyścigu po f a k t y? W wyniku samonapędzajągo się wyścigu dochodzimy w wielu szczytowych partiach matematyki do wybijania jakiegoś rytmu właściwemu już tylko życiu biologicznemu, ulegająć automatyzmom. W zwyczajowo pomyślanym f i n i s widzimy więc i n n e obawy, niż o sprzeczności i katastrofy, których świat dostarczał nam dotąd obficie.

Zwracamy się więc ku samej matematyce. Matematyczność jako idea pozostanie stale obecna, mając w sobie dalekie poczucie swojej wagi. Ma wiadome obowiązki, ale też i przywilej wypowiadania ostatniego filozoficznego słowa. Sami matematycy tak o sobie nie myślą, ale wielcy myśliciele, kiedy wyczerpią już dostępne sobie środki, zwracają się z nadzieją ku matematyce. Zapewne więc coś w tej matematyce jest?