Jerzy Mioduszewski

W e w n ę t r z n e   ź r o d ł a   m a t e m a t y k i

W s t ę p

Przedstawiony artykuł jest poszerzoniem artykułu, który pod tym samym tytułm ukazał się w "Postępach Fizyki 62 (2011), 117 – 120, i odczytu jaki autor wygłosił 7 stycznia 2012 roku na zaproszenie Profesora Jerzego Janika na seminarium PAU w Krakowie. Pogląd o wewnętrznej naturze matematyki nie jest nowy, ale ujęcie autora, pomyślane niezależnie, jest oparte przede wszystkim na jego własnych przemyśleniach i ma swoją odrębnosć. Autor przejmuje swój pogląd od Dedekinda z jego "Was sind und was sollen die Zahlen?", który tak istotne dla matematyki pojęcie jakim jest liczba wywodzi wprost ze "świata naszych myśli". W przedstawionym przez autora poglądzie nie ma miejsca na matematykę jako gmach. Matematyczność jest zmysłem, jednym z wielu, którymi dysponujemy w konfrontacji ze światem zewnętrznym. Celem artykułu jest wywołanie dyskusji, potrzebnej także i z tego powodu, że poglądy autora - wcale nie aż tak odrębne - są podzielane przez milczącą większość matematyków.

"Początki mego wieku oślepiał blask logicyzmu. .Ale nie poszedłem tym śladem. Dawniejsi filozofowie pisali mętnie, ale nieskrępowani logiką, mogli powiedzieć więcej" – Tomasz Grabiński - profesor emerytowany Uniwersytetu w Penzie.

R y t m   D n i a   P i e r w s z e g o

Lokum matematyki to „ś w i a t   S   n a s z y c h   m y ś l i”. Zwrot pochodzi ze słynnego, chociaż niewielkiego i nie do końca zrozumianego przez matematyków, dzieła Richarda Dedekinda „Was sind und was sollen die Zahlen?” (1888) - "Czym są i czemu służą liczby?".

M y ś l - to pewien ustalony element wspomnianego świata S. Umysł nie jest w stanie powstrzymać się od „myśli o tej myśli”, a w rezultacie od „potoku myśli”, który jest podobny do p o t o k u   l i c z b. Nie od razu Dedekind doszedł do tego wniosku. Poświęcił dziesiątki stronic, aby z owego potoku myśli, wydobyć minimalną nić taką jaką tworzą liczby naturalne. Nie wskazywał żadnej konkretnej liczby, lecz r y t m przenikający świat S, który jest n i e s k o ń c z o n y. Po przesunięciu o jedną myśl dostajemy ten sam świat S. Liczba nie jest u Dedekinda wytworem ani czasu ani przestrzeni rozumianych fizycznie, jak u Kanta. Mogła powstać już w P i e r w s z y m D n i u, już w samej myśli Stwórcy.

Doświadczenie myślowe Dedekinda skłania do wniosku, że w naszej myśli mogą powstawać pewne konstrukcje niezależnie od bodźców zewnętrznych. Czy ogranicza się to tylko do rytmu liczbowego? Nasza myśl nie staje wobec świata bezbronna. Narzucamy światu rytm następstwa i widzimy go jako nieskończony, nie zapytując świata, czy życzy sobie takiego jego rozumienia. Napisał gdzieś Max Scheller, że żyjemy światu naprzeciw.

Nie było nas w Pierwszym Dniu, a jeśli byliśmy, to bez świadomości, i do świadomości naszej ten pierwotny rytm nie zawitał. Nie znaczy to, by nie odcisnął się w nas w jakiejś pierwotnej formie w naszym świecie S. Dlatego, nie są nam obce jego takty jakie były nam wtedy darowane. Czy rytm świata S jest fragmentem czegoś szerszego, tylko się domyślamy.

Jest to rytm następstwa. Ale znamy też k o n t e m p l a c j ę, kiedy myśl płynie w sposób c i ą g ł y. My wszakże wyodrębniamy oddzielne stany i formułujemy oddzielne s ą d y. Sądom nadajemy formę z d a ń, by poprzestając już tylko na formie, móć poddawać je formalnym wymaganiom tworzonej przez świat S na ten użytek l o g i k i. Powinniśmy pamiętać o tym zubożeniu pojęcia sądu, wprawdzie pomocnym, tak jak pomocna jest proteza, nie oddającym wszakże istoty sądu jakim jest jego treść i jego dynamika.

Ale, chociaż nasze myślenie mogłoby być ciągłe, to nasza jego e k s p r e s j a zdaje się wymagać zamknięć w zdania, które są jakby jego a t o m a m i. Atomizm myślowy jest wielką zagadką naszego świata S. Jest jak się zdaje jego koniecznością. To on daje nam kontakt ze światem i nie dopuszcza do uwięzienia się w sobie.

Ekspresja zamykana w oddzielnych sygnałach coś jednak gubi i nie oddaje zapewne całej – jak byśmy nazwali -- p r z e d ś w i a d o m o ś c i. Zgodziłby się z tym zapewne Ludwig Wittgenstein, według którego ekspresja językowa ma jakieś naturalne ograniczenia. Aby wyjść poza nie - jak ujmuje jego myśl Alfred Gawroński - uciekamy się do form pozasłownych wyrażających emocje i sięgamy po symbolizm poezji oddający całe zespoły doznań. Rozszerzają naszą ekspresję także gry językowe i pure nonsens, przez co docieramy do myśli niedostępnych sądom wyrażanych jako zdania budowane zgodnie z gramatyką logiki.

Potokowi myśli jakim obdarza nas indukcyjne następstwo nie towarzyszy wszakże bezpośrednia refleksja. Nie panujemy nad pierwotnym rytmem naszych myśli Jak pisze Andriej Biełyj, inspirowany matematyczną filozofią swego ojca Nikolaja Bugajewa, „myśli same się myślą'". Potok myśli to nie tylko następstwo liczb, bo są inne znane następstwa, Bo wspomnijmy potok myśli w "Herzogu" Saula Bellowa. Nie umiemy wyłączyć się z jego strumienia, o czym pisał Bergson, oraz w znanej przed laty książce Ernest Dimnet, a powtarza współczesny nam Eckhart Tolle.

N a p r z e c i w ś w i a t u.

Świat S jest wszakże bogatszy niż to co dawał nam w D n i u P i e r w s zy m rytm indukcji. Jesteśmy dziećmi D n i a S z ó s t e g o. Dostaliśmy wtedy w podarunku nowe sposoby kontaktu ze światem i ś w i a d o m o ś ć dającą nam poczucie bycia sobą, poczucie naszej odrębności wobec tego co nas otacza, a jednocześnie poczucie wspólnoty z otoczeniem. To wtedy dano nam z m y s ł y, które potrafią lokować w świecie S całe obrazy odbierane ze świata zewnętrznego. Świat S nie poprzestaje na ich kontemplacji, ale stwarza środki wychodzące naprzeciw atakującym go obrazom. Zastępuje te obrazy właściwą sobie konstrukcją własną.

Oto tworzy pojęcie koła, którego formę narzuca narzuca potem innym „kołom" obecnym w świecie zewnętrznym. Postrzegając te "koła", ma już zawczasu gotowe wobec nich oczekiwania. Przez długi czas światu S wystarczy jedno koło, zanim nie objawi mu się ono w wielu aspektach. Odkryje, że koło to nie tylko kształt kolisty, ale i przegroda, a także droga, po której biegnie punkt. Nie wszystkim obrazom świat S potrafi przeciwstawiać swoje w z o r c e, ale ewolucja polega na wzbogacaniu ich zakresu. Odkryje też samotną liczbę 5, która sprawi kłopot, każąc nam zastanawiać się, czy jest elementem rytmu pierwotnego, czy zjawiskiem od rytmu pierwotnego niezależnym.

Konstrukcja. jaką świat S obudowuje odbierane obrazy, nie należy do rzeczy samych w sobie w znaczeniu Kanta. Jest polem wewnętrznym świata S, zawiera się w naszych myślach. Ogląd myślowy tej konstrukcji wewnętrznej jest z natury a n t y n o m i a l n y. Nie dotyczy to wszakże rytmu liczby wbudowanego w świat S, do którego ogląd myślowy nie wnika.

Wzorce, którymi otacza się świat S stanowią mur obronny przed nieznanym nam zewnętrzem. Chcemy, jak m o n a d a L e i b n i z a, być odcięci od wpływów zakłócających nasze wnętrze, selekcjonując obrazy według kierujących nami upodobań. Od siebie nawzajem odbieramy jedynie te sygnały, które przekazują określony rodzaj treści. Ten sposób wzajemnej komunikacji sprawia, że nie uczymy się od siebie przelewając sobie nawzajem całe mózgi. Odbieramy jedynie izolowane sygnały wystarczające dla rozbudzenia w monadzie jej świat wewnętrzny, który ma ona tylko dla siebie. Te sygnały wszakże wystarczą, by powstała wspólnota. Jak zauważa niezapamiętany z imienia Filozof – staramy się, by nasz świat wewnętrzny był nieprzystępny dla zewnętrznej - jak pisze - pospolitości. Bo przyjrzyjmy się obudowie monady w postaci pięknej muszli. Dzieło sztuki, aby obronić się przed przetworzeniem w kicz, zaznacza – jak pisze ów Filozof - choćby jednym szczegółem – może być to nawet skaza – swoją odmienność od środowiska. A przecież, tym zewnętrzem się karmimy. Według Arystotelesa, nie ma niczego w naszych myślach co by nie przeszło wcześniej przez zmysły.

Zmysły, które zasiedlają świat S, walczą w nim o miejsce dla siebie. Widzimy wśród nich również z m y s ł, ten najbardziej wewnętrzny, którego zadaniem jest k s z t a ł t o w a n i e wspomnianej konstrukcji. Nazwijmy ten zmysł z m y s ł e m m a t e m a t y c z n y m. Zmysł matematyczny odczuwa przykrość, jeśli dla dostarczonego sobie spostrzeżenia nie znajduje właściwego miejsca w budowanej konstrukcji. Odczuwa zadowolenie, wręcz spełnienie, z wprawnie wykonywanych czynności. Ale jest nie tylko świadkiem tworzenia pojęć. Jest, jak dyrygent, uwikłany w emocje dostarczane mu przez cały pozostały koncert zmysłów, z których każdy dołącza tu swoją melodię czy barwę. Nie nazwalibyśmy go z m y s ł e m, gdyby ograniczał się do roli kuriera przenoszonych przez siebie komunikatów. Nie pójdziemy więc za Arystotelesem aż tak daleko, by odmawiać matematykom, a tym samym zmysłowi matematycznemu, zainteresowania treścią przekazu. Rozumiemy jednak sceptycyzm Filozofa, jeśli widzimy jak często samo sprawne wykonywanie zadań daje satysfakcję.

Twórcy matematyki są coraz bardziej skłonni przyjmować, że wyjaśnienie istoty matematyki leży bardziej w rozpoznaniu natury świata S i zmysłów, które go zaludniają, niż w rozpoznaniu treści, które niesie matematyka. John von Neumann w swoich wczesnopowojennych esejach przyznaje, że nie poznawczość, lecz estetyzm – wręcz samolubność – dodajmy od siebie – jest tym, co kieruje matematyką. Hardy wręcz twierdził, że taka właśnie jest natura matematyki. Ukształtowany w innym świecie pojęć Sziłow również twierdzi, że matematyka kieruje się w swym rozwoju własnymi, znanymi sobie, prawami.

Z niepokojem zauważamy, że świat S naszych myśli mógłby zamknąć się w zbudowanym przez siebie i dającym mu zadowolenie gmachu, jeśliby zmysł matematyczny pozostawić samemu sobie. Dodajmy, że samolubność nie jest cechą wyłącznie tego zmysłu. Jest do pomyślenia tego rodzaju samolubna matematyka. Nie ogranicza się do samych łamigłowek. Z biegiem ewolucji matematyczny świat S stał się na tyle bogaty sam w sobie, że wyjaśnianie jego własnych problemów jest w interesie nie tylko tej samolubnej matematyki. Wyjaśnienie struktury jej pojęć takich jak przestrzeń euklidesowa czy związku między ilościowym i porządkowym aspektem liczby, jest jednocześnie próbą uchwycenia pewnych istotnych cech świata zewnętrznego, które są u podstaw tych matematycznych pojęć. Nie zapominajmy, że świat S też jest częścią tego świata, dla nas przy tym najbliższą.

M e t a f i z y k a m a t e m a t y k i.

Nasze poznawanie świata poprzedzone jest p r z e ś w i a d c z e n i a m i, m e t a f i z y c z n y m i, które wraz z wyrosłymi na nich przekonaniami, i oczekiwaniami – ale też – jak pisze Allan Bloom - uprzedzeniami wobec tego, co może przyjść z zewnątrz, tworzą naszą m e t a f i z y k ę. Poznanie matematyczne wraz z jego tak rozumianym otoczeniem metafizycznym, składa się na coś, co nazwalibyśmy m a t e m a t y c z n o ś c i ą.

Wielką w niej zagadką są wspomniane pierwotne wdrukowania, które weszły w nas bez wcześniejszych zapowiedzi, a mamy na myśli przede wszystkim rytm pierwotny dający nam liczbę. Nie jest on poddany naszej zmysłowości, nie panuje nad nim nasza świadomość. Ich status w naszej metafizyce i w naszej matematyczności jest s p e c j a l n y.

Liczba jest poza czasem. Dla liczby nie musi istnieć przestrzeń, w której miałaby ukazać swą obecność. Można pomyśleć świat nie mający nic oprócz indukcyjnego rytmu liczby, nie usytuowanego w żadnej przestrzeni. Pogląd o niezależności pojęcia liczby od pojęć o przestrzeni i czasu przypisaliśmy Dedekindowi. Ale przecież wcześniej byli Pitagorejczycy, a pogląd prymatu liczby głosił również Gottlob Frege, współczesny Dedekindowi. Upatrywał on jednak istotę liczby w jej aspekcie ilościowym, a nie jak Dedekind w jej aspekcie porządkowym, dynamicznym, wyznaczonym przez jej rytm indukcyjny. I chociaż liczba nie potrzebuje przestrzeni, to my jednak staramy lokować liczby w odpowiednich przez nas tworzonych przestrzeniach tak, by w jakiś sposób poddać je naszej zmysłowośći.

Pojęcie o liczbie mogłoby zamknąć się w sobie. Liczba stara się jednak być obecną w całej matematyce. Liczba s ł u ż y matematyce, ale tak samo prawdziwym wydaje się powiedzenie, że liczba się nam n a r z u c a. Jej rytm wchłania w siebie wszystko, co z współgra z rytmem pierwotnym. Jak twierdzi Keith Devlin, nasz język również ma swój rytm, chociaż nie wiemy, jak zazębiajacy się z rytmem liczby. Są jeszcze inne wbudowane w nas rytmy. Doszukujemy się związku matematyki z muzyką.

Swiat S organizuje się w szerokie k o n t e k s t y złożone z sądów łączonych ze sobą tak, by pozostawały w z g o d z i e ze sobą. Zgodność sądów jest wyrazem wzajemnego ich dopasowania, jest tym, co świat S uznaje za swoje w e w n ę t r z n e k o h e r e n t n e p r a w d y. Użyta została liczba mnoga, bo konteksty, są od siebie niezależne, nie pretendują do pokrywania całości. Jest więc w matematyce geometria i arytmetyka, ale są też węższe knteksty, jak na przykład logarytmy. Luźna struktura ich powiązań jest w jakiejś analogii do świata monad Leibniza. Prawdy przekazywane są z kontekstu do kontekstu jedynie w formie m e t a f o r, wśrod których najbardzej znanymi są te, które arytmetyka przenosi do geometrii, traktując jako liczby odkładane jeden po drugim odcinki.

Koherentność jest pojęciem nieformalnym, dlatego świat S stosuje ostrzejsze formalne krryteria jakie daje l o g i k a.

Prawdy wewnętrzne świata S dotyczą jego wewnętrnej harmonii i nie pretendują do wypowiadania prawdy o tak zwanej r z e c z y w i s t o ś c i. Relacja tych dwóch prawd należy do naszej metafizyki, która ocenia również w a r t o ś ć prawd według spełniania przez nie wcześniejszych co do nich czekiwań. Wprowadzając do naszych rozważań metafizyczność, nie przesądziliśmy jak ma się ona do świata S. Stoi ona poza światem S. Nie ingerując w prawdy świata S, poddaje go swemu osądowi.

m e t a f i z y k a
↓
ś w i a t n a s z y c h m y ś l i → ś w i a t r z e c z y w i s t y

Świat S działa całością i nie szuka potwierdzeń w świecie zewnętrznym dla odosobnionych od siebie swoich "dwa a dwa cztery". Fakt nabiera dla świata S znaczenia, jeśli znajdzie dla siebie miejsce w określonym jego kontekście , który faktowi nadaje status i s t n i e n i a. Nie znamy innego rozumienia istnienia niż znalezienie się w koherentnie w określonym kontekście. Nie jest to więc pojęcie absolutnre. Może być wiele s p o s o b ó w istnienia. Liczba V2 i przekątnia kwadratu o boku 1 to różne sposoby zaistnienia tego samego zjawiska, ale zaistnienie daje także odpowiedni przekrój Dedekinda. .

Zaatakowana nowym faktem, konstrukcja myślowa świata S ulega przebudowie, aby móc wchłonąć fakt w sposób koherentny. Przebudowa kontekstu kosztuje, i już chociażby dlatego świat S nie cieszy się z każdego poszerzenia wiedzy. Stąd, nie ma identyfikacji tego, czym żyje świat S z tym, co potocznie nazywa się n a u k ą. Jest to nie tylko dystans. Nasza metafizycznosć nie odrzuca odkryć Cricka i Watsona, ale nie musi, w odróżnieniu od nauki, cieszyć się tymi odkryciami. Nauka nie pyta. pyta c u i b o n o? Czerpie satysfakcję ze swojej sprawności. A świat S – poprzez naszą metafizyczność - pyta. Prawda – uznajmy, że widzimy ją w tym znaczeniu o jakim tu mowa - ma dlań nie tylko wartość, ale ma też i z n a k.

Odezwał się Scheller, ale też i Jaspers.

Prawda matematyczna trwa w umyśle jeśli jest przeżywana..Najbardziej oderwane od doznań zewnętrznych prawdy matematyczne goszczą w umyśle dosłownie przez chwilę. Słyszało się, że niezapisane w porę dowody powstałe w Kawiarni Szkockiej bezpowrotnie ginęły. Prawdy matematyczne, nawet zapisane, mogłyby nie odżyć,jeśliby nie były wcielone w nasze doznania zmysłowe i nie były przez dłuższy czas aktywnie przeżywane. Żyją, przekazywane od monady do monady, raczej w postaci rozbłysku niż płomienia. Ale, jak twierdzi Solomon Golomb, jeśli zawitają do nas po raz drugi, będą te same co przedtem.

Płacimy za tę efemeryczną t r w a ł o ś ć prawd cenę wysoką, odsuwając się przy ich uzyskiwaniu daleko jak tylko można od naszego ich zmysłowego odbioru. Prawdę odbieraną zmysłami zastępujemy wbrew swojej prawdziwej naturze, prawdą w znaczeniu koherencji logicznej, a wobec tego rodzaju prawdy potrafimy być już chłodni. Stąd słowa Arystotelesa, że matematycy są obojętni wobec treści twierdzeńia matematycznego, zgodzą się z przeciwnym, jeśli ono okaże się prawdziwe.

Odczuwamy obecność pawdy matematycznej w naszej świadomości jedynie w stanie jej powstawania. Nie ma tej właściwości prawda już poznana – to daje się wyczytać u S e a r l e g o w jego traktacie o umyśle. Jeśli chcemy ją przechować, to tylko w umysłach przeżywających ją jako swoją. Nie przechowalibyśmy narastającej mnogości prawd matematycznych, jeśliby matematyka – jak chcą niektórzy – była księgą czy też gmachem. Będąc w stałej intreakcji z zewnętrzem i innymi prawdami, utrzymuje przy zyciu tylko swoje prawdy czynne. Są wszakże i takie, które osiągając doskonałość stają własnością wspólną i klejnotami jej muzeów - jak jeziora Wady - lub ozdobami galerii - jak twierdzenie Morleya.

Dopóki zainteresowaniem matematyki były proste figury geometrii i liczby w swych zjawiskowych indywidualnych postaciach, platoński pogląd na wiecznotrwałość matematyki wydawał się niekwestionowalny. Ale wiek dziewiętnasty uwidocznił, jak wiele w matematyce zależy od nas samych. Brouwer na początku XX wieku zwrócił uwagę na wpływ jaki na prawdy matematyczne ma nasza logika. Interwencja logiczna jest interwencją ad hoc, polegającą na zapełnianiu luk myślowych. Te mogłyby pozostać niezamknięte, ale logika – czuła na horror vacui - zamyka je na użytek doraźny w zdania, które w tej postaci są petryfikowane jako prawdy. Logika nie tworzy kształtu świata S, jest jedynie potrzebą ładu i utrzymania zbudowanych już struktur. W wielu przypadkach odczuwamy jej wpływ jako hamujący. Poza tym, zamykając otwarte wątki myślowe, uwalnia nas od mierzenia się z pytaniami, odpowiadając na nie za nas. Zdarza się, że ulegamy i korzystamy z wygodnego prezentu.

To nasze zmysły zbudowały bogactwo i żywotnosć konstrukcji, jaką ustawił naprzeciw światu zewnętrznemu świat S. Jednak w samym charakterze zmysłu jest efemeryczność i gra. Zmysły nas zwodzą, wciągając do gry, mając swoje własne w niej cele. Czy nie zwodzi nas i matematyczność?

Dlatego świat S potrzebuje czasu na obudowanie każdego nowego kawałka wiedzy własną konstrukcją, aby móc się tą wiedzą świadomie posłużyć. W zrozumieniu jej natury powinna nas wspomóc, jak sądzimy, wiedza o organizmach żywych. Z obawą jednak sięgamy ku tej nieznanej wiedzy, spodziewając się ułyszeć prawdy, do których odbioru nie jesteśmy przygotowani. Rajskie drzewo dobrego i złego i skała Prometeusza stale towarzyszą jako przestroga. Ten lęk pred wiedzą towarzyszy ludzkości od samego jej zarania. Matematyka nie stwarza jakoby tego rodzajun lęku.

Tymczasem, z matematyką łączy się obawa innego rodzaju. Pomyślmy, że nauki szczegółowe wytłumaczyłyby nam jak powstają w naszym umyśle pojęcia. Znikłaby cała poetyczność matematyki. Czy chcielibyśmy nadal się taką matematyką zajmować? Zostawilibyśmy ją innym. Ale może dotyczyć to nie tylko matematyki. Rozwijamy się dzięki mitologii, która chroni nieznane.

L i c z b y

Wiele w naszej matematyce zależy od nas samych, ale wykluczamy stąd l i c z b ę, której rytm jest obecny w świecie S i ten sam już od jego Dnia Pierwszego. Ale są też l i c z b y, które napotykamy niezależne od tego rytmu, odbierane zmysłowo w postaci wzorców geometrycznych lub jako zmysłowo odczuwane ilośći. Nie widzimy ich jednak w czystej postaci, nawet jeśli są przedmiotem liczenia czy .pojawiają się zmysłowo w postaci wzorców geometrycznych lub jako zmysłowo odczuwane ilośći. Liczby pojawiają się, jak pisze Moses Mendelssohn, poprzez w c i e l e n i a. Wcielają się więc w figury jako ich aspekt ilościowy, ale mogą się też prezentować jako kolekcja punktów lub figur, to jest jako z b i o r y. Nie wyklucza Mendelssohn czegoś, co nazwalibyśmy s a m ą l i c z b ą. Skłaniałoby to nas do pytania o jej związek z rytmem pierwotnym. Ale nie widząc liczb inaczej niż we wcieleniach, mogłoby się wydawać, że ich źródłem, jest substrat dający im gościnę. Taka była myśl Fregego, której nie podzielamy.

Jest zatem pewna trudność w jednolitym ujęciu liczby. Bo nie potrzebujemy rytmu indukcji, by napotkać liczbę 3. Liczby 13 i 7, jako bardziej wyraziste, poznajemy wcześniej niż liczbę 6, która pojawia się nawet później niż biblijne dziesięć tysięcy. Jan Potocki słowami Velasqueza przekonuje nas, że te liczby – natury f i g u r a l n e j - nieobce są naszym braciom mniejszym. Wydaje się, że poznajemy je z zmysłem, bliskim temu, którym dane są nam figury geometrii. Skłaniają się ku temu w swej książce George Lakoff i Rafael E. Nunez (2000), poświęca z m y s ł o w i l i c z b y swoje dzieło Stanislas Dehaene.

Ale chociaz badania psychologów wskazują że nawet małe dzieci, potrafią rózróżniać liczbę 2 od liczby 3, to w tych eksperymentach są to zawsze 2 i 3 cukierki. Z badań tych nie wynika jednak w sposób całkiem pewny, że dzieci rozpznają to samo 3 w trzech cukierkach i trzech osobach, to jest, czy mają w umyśle u n i w e r s a l i u m 3.

Cantor i Dedekind byliby za tym, by uniwersaium 3 spotykane w spostrzeniach rozmaitych trójek było reprezentowane przez 3 wdrukowane w rytm pierwotny. Frege proponował widzieć 3 jako wspólną własność w s z y s t k i c h trójek, abstrakt - również niedostępny zmysłom - który filozofowie lokują w sobie tylko znanych pokładach myśli.

Wiele całkiem prostych sytuacji liczbowych, dostarcza najprostsze doświadczenie wzrokowe i dotyk. Pewnym liczbom wcieleń dostarcza już przyroda. To nasze pięć palców, a nie matematyka, stworzyły system dziesiętny, chociaż system dwunastkowy mógł już być dyktowany samym systemem arytmetycznym, stwarzającym magię wokół liczby 12. Przyroda jest wszakże bogatsza w liczby niż nasze ludzkie 2 i 5. Spójrzmy na liczby ukryte w kwiatach.

Geometria dostarcza wielu liczb jakby przez nią przygotowanych, do których należą na przykład trójki pitagorejskie. Liczba 17 pojawia się jako liczba boków wielokąta foremnego możliwego do skonstruowania w sposób klasyczny cyrklem i linijką. Gauss dowódł, że nie tylko liczba 17, ale też 257 (i wcześniej, oprócz potęg dwójki, znane liczby 3 i 5), ukazując ich miejsce w rytmie pierwotnym.

Te liczne przykłady musiały prowadzić jeszcze Pitagorejczyków do przypuszczenia, że jest system, który je jednoczy. To oni pierwsi odkryli rytm indukcyjny liczby, zanim po wielu stuleciach wędrówki poprzez matematykę dotarł w formie dojrzałej do Dedekinda, chociaż pojawił się – co wiedzą filozofowie - i u Plotyna. Do Bernoullich należy twierdzenie, że n jest mniejsze od n-tej potęgi liczby 2. Ale nie jest to seria pojedyńczych stwierdzeń, lecz j e d n o twierdzenie, z którego wynika, że nie tylko całość systemu, lecz i jego część złożona z potęg dwójki rozciąga się w nieskończoność. Bo uproszczeniem jest przyjąć, ze indukcja – użyta w tym dowodzie – obdarza nas - jak gdzieś czytamy u Poincare'go - nieskończoną ilością twierdzeń.

Widzimy zatem, że liczba odbierana zmysłowo włącza się w nurt rytmu pierwotnego, który jednak jest może zbyt prosty, by zaspokajał rozbudowaną w tym kierunku naszą zmysłowość.

Nie jesteśmy przekonani, że ten rytm może opanować wysokie partie dyscypliny matematycznej jaką jest t e o r i a l i c z b, której nie wystarcza rytmi indukcji, a mamy na myśli liczby pierwsze i pytania dotyczące tych liczb takie jak hipoteza Goldbacha, czy pytania o liczby bliźniacze, które wydają się grupować w pary przez przypadek. Teoria liczb wydaje się być domeną wspomnianego wcześniej z m y s ł u l i c z b y, który wydaje się być podobny w swej naturze dio zmysłu kierującego geometrią.

Nie myślimy, by jedynym ujjściem dla zmysłu, który odkrywa nam liczby 2, 5 i wspomniane biblijne dziesięć tysięcy, był rytm indukcyiny, a potwierdza to również rozwój matematyki, Znane są cywilizacje matematyczne, które praktyczny aspekt liczby rozwinęły do wielkiej doskonałości nie natrafiając na indukcyjność liczby. Mamy tu na myśli cywilizację babilońską i wysoko w rachunkach zaawansowaną, cywilizację starożytnego Egiptu.

Można się zastanawiać,- a zastanawia się nad tym Dehaene - skąd nasze trudności z małymi liczbami? Dodajmy od siebie, że tę samą trudność – nie obdarzeni zmysłem dyskretnym - mamy przy wykonaniu kilku kroków czystej logiki. A przecież wiemy o wirtuozerii geniusziy.

Dehaene upatruje w tym wynik treningu. Istotnie, uczniowie zachęcani przez nauczyciela matematyki Raczyńskiego, znanego z obrazu "Trudnaja zadacza", opanowali w krótkim czasie umiejętności, którym nie mógł sprostać mistrz. Dehaene twierdzi, że w wyniku takiego treningu uruchamiamy pewne dotąd nieużywane partie mózgu. Powiedzmy od siebie – chcąć uniknąć argumentacji biologicznej, a nawiązując do naszej mitologii świata S - że w pewnym stadium obcowania z liczbami, wchodzimy w rejony, w których dają się odczuć prawidłowości narzucane przez rytm pierwotny (możemy tu mieć na myśli znane proste sytuacje naprowadzające na postępy arytmetyczne i geometryczne). W tym stadium porywa nas rytm pierwotny i następuję niespodziane przyśpieszenie.

Umówmy się nazywać a r y t m e t y k ą umiejętność posługiwania się liczbami w sytuacjach zdominowanych przez rytm pierwotny. . Zaobserwowana historycznie eksplozja arytmetyczności nastąpiła z początkiem ery nowożytnej, pozwalając opanować skomplikowane operacje arytmetyczne nawet tym, którzy mają trudności z tabliczką mnożenia. To z początkiem ery nowożytnej odktryto indukcję jako złotą żyłę matematyki, która jeszcze do czasu Newtona żyła obrazami Dnia Szóstego i kontemplacyjnym zmysłem odbierającym zlawiska ciągłe, Wydawało się przez jakiś czas, że ciągłościowy odbiór zjawisk przeważy.

I mimo że matematyka eksplodowała w swych wysokich partiach arytmetycznych, mamy nadal trudnoćci w zrobieniu paru kroków w prostej kombinatoryce liczbowej i prostych sytuacjach geometrycznych znanych z teorii grafów. Matematykom – a może nie tylko – znane są wyglądające na paradoksalne dysproporcje w efektywności naszego myślenia. Nawet dobrzy matematycy wpadają w kłopoty na wykładzie, kiedy trzeba przelicyć ułamki, lub przeprowadzić owód delto-epsilonowy, mimo że bez trudu przeprowadzają rozumowania wysokiego szczebla. Filozotowie gubią się, kiedy maja przdstawić swoją myśl w konkretnej sytuacji, bez trudu rozwijają natomiat ogólne koncepcje. Jest tak, bo w wysokich partiach abstrakcji uruchamiane są właściwe dla danej dyscypliny rytmy wiodące, do których zaliczamy również język, który też potrafi być katalizatorem myśli. Oddanie się jednak we władzę tym rytmom, zwalnia naszą świadomość od jej obowiązku metafizycznego czuwania. .

G e o m e t r i a.

Geometria, ta jaką widzimy u Talesa, jest wolna od arytmetyczności. Jest fizyką naszego z m y s ł u w i d z e n i a. Pewne proste prawdy dyktowane przez zmysł postrzegania i dotyku stanowią fundament, na którym Euklides oparł swoje „Elementy”. Okazało się, że mniej oczywiste prawdy daje się z tych podstawowych uzyskać na drodze logicznej. Mogło nas dziwić, ze w czas nauki szkolnej dowody spotykaliśmy tylko w geometrii, bo w arytmetyce wystarczało sprawdzanie.

Małe liczby od samego zarania geometrii żyją z nią w symbiozie, nie naruszając jej naturalnego rozwoju. W geometrii trójkąta i - ogólniej – wielokątów, liczba i figura pojawiają sie na równych prawach. Ale obok tego są w i e l k o ś c i odcinków, kątów i pól, które u Greków jeszcze nie są liczbami.

O tym, że suma kątów w trójkącie to dwa kąty proste, wiemy dzięki dedukcji poprzedzonej wcześniej wypracowanym układem pojęć. Twierdzenie Pitagorasa musimy udowodnić, żeby je przyjąc jako prawdę. Sprawdzać możemy tylko szczególne przypadki. Nie potrafimy dowieść, że czwarty kąt w czworokącie o trzech równych sobie bokach tworzących ze sobą kąty proste, jest prosty. Ale, chociaż prosta intuicja przemawia za tym, że tak jest, nie przyjmujemy tego na wiarę, bo te proste nasze intuicje dyktowane przez zmysły wydawały się już matematykom arabskim za niewystarczajace, aby to przyjąć z pewnik.

Geometria, która rysowała się u Talesa i w pierwotnym zamiarze „Elementów” nie rozwinęła się jednak w tej czystej postaci. Bo, kiedy zaczynamy dodawać do siebie odcinki prostej, wkracza a r y t m e t y k a za swoim rytmem powtarzalności.

Ale pojawia się próba, aby samym odcinkom, to jest dotąd wielkościom, nadać charakter liczb, Pitagorejczycy upominają się w tym celu o wspólną miarę dla każdej pary odcinków. Zamyślają w ten sposób zarytmetyzować geometrię u samych jej podstaw. Ten prosty sposób zawodzi, kiedy przekonują się o niewspółmierności boku i przekątni kwadratu.

Eudoksos, a za nim Archimedes, starają się uchronić geometrię od trudności powstałych na skutek inwazji nowego żywiołu. Prostej wprawdzie nie zabrania się być nieskończoną, bo to jej natura, ale wymagania arytmetyczne skłaniają do przyjęcia, że każdy punkt prostej ma być osiągalny po odłożeniu na niej skończenie wiele razy odcinka, nawet jakkolwiek małego. Dzięki temu dzielenie sukcesywne na pół nie pozostawia w całości żadnego pododcinka. Zostają same punkty, co stawia przed Arystotelesem problem rozumienia tak postrzeganego c o n t i n u u m. Rozszerzone arytmetycznie prawdy geometryczne z trudem lokują się w naszej świadomości
.
Adaptacja arytmetycznie wzbogaconych prawd geometrycznych do świadomości matematycznej ukształtowanej w Dniu Szóstym będzie odtąd stałym problemem matematyki.

Prawdy arytmetyczne zainstalowane są w naszym świecie S bez naszej zgody, formując go na swój sposób. Według Fregego, od prawdy arytmetycznej nie ma apelacji, a według powiedzenia Cantora, nie ma w arytmetyce miejsca na hipotezy, to jest na zdania których prawdziwość byłaby zależna od czegoś poza nią. Znane jest powiedzenie Eulera, że jego ołówek odkrywa rzeczy bez jego w tym udziału.

Tymczasem geometria i rozwinięta później w oparciu o nią fizyka matematyczna jest naszym konstruktem, pozwalając nam na udział w kształtowaniu pojęć. Geometria wypracowuje pojęcie o przestrzeni ogarniającej rozważane punkty i figury, rozważając rozliczne pomyślane warianty, ulegając wielun spekulacjom także natury arytmetycznej.

Mimo wszystko, abstrakty geometrii, takie jak punkt, prosta i koło, mają niemal idealnie jednoznaczne reprezentacje w świecie rzeczy objawiających się nam w postaci punktów, prostych i kół fizycznych. Abstrakcja wydaje się tu wręcz niepotrzebna. Gotowi bylibyśmy zatem widzieć geometrię po prostu jako matematykę naszego zmysłu widzenia. Nie idziemy wszakże w tym za daleko. Koło dla Greków było kołem niemal fizycznym. Jeśli jednak zapomnimy o wypełniajacym koło fizycznym płaskim dysku, to zobaczymy w nim linię zamkniętą, po której może coś biec. Istotnym aspektem koła staje się c y k l . A jest jeszcze koło, które może się zawęźlać, i koło, które moze być b r z e g i e m niekoniecznie dysku. Nie miał więc może do końca racji M o s e s M e n d e l s s o h n, bo równiez obiekty geometrii osiągają poziom trwałych wzorców cielających się na wiele sposobów w rozliczne sytuacje jakich doświadcza świat S w swoim kontakcie ze światem zewnętrznym. . Jest też takim wzorcem nie tylko koło, bo również i t r ó j k ą t, chociaż może nie kwadrat.

Wielkości geometryczne i fizyczne są u swoich źródeł wolne od wpływu liczby. Rozważając wielkości takie jak długości, pola i objętości poprzestajemy na n i e r ó w n o ś c i a c h, w których – jak twierdzą myśliciele matematyczni - ukryta jest istota matematyki. Nasze intuicje nie panują nad równościami Nie wiemy, czym jest równość, nazywana p r z y s t a w a n i e m, odcinków i figur. Możemy – jak Euklides – jedynie p o s t u l o w a ć prawa rządzące przystawaniem. Ale później przestaliśmy liczyć się z naturą rzeczy i daliśmy okazję liczbie w c i e l a n i a   s i ę   w wielkości odcinków i figur. Ale, wcielając się w dany rodzaj wielkości, sama liczba również ewoluuje, wzbogacając się o cechy swego nosiciela, którym może być pole, masa czy przebieg czasu, przyjmując odeń cechę p o d z i e l n o ś c i   w   n i e s k o ń c z o n o ś ć , wreszcie i c i ą g ł o ść.

Liczba c i ą g ł a ma taki właśnie początek. Wyrasta z dwóch źródeł, szczypty arytmetyki i fizycznego wyobrażenie o prostej. Można pomyśleć b e z l i c z b o w e continuum Arystotelesa i Bradwardina, nad którym w naszych czasach rozmyślał Hermann Weyl. Spotyka się pogląd, że pojęcie liczby ciągłej jest w naszym umyśle niezależnie od arytmetyki. .

Pojęcie o p r z e s r z e n i. nie pojawiało się u Euklidesa, dopóki nie zetknął się on z problemem równoległych. Ale i wtedy poprzestał na przyjęciu prostego postulatu, że istnieje tylko jedna równoległa do danej prpstej przechochodząca przez dany punkt. Mogło wszakże zastanawiać, że przyjęcie tego postulatu odnoszącego się do nieskończoności daje wniosek o sumie kątów w trójkącie. Bo dotąd zajmował się tylko figurami.

Dopiero filozofom zaczęło brakować owego pojemnika, w którym są one zanurzone. Brakuje go i nam. Świat naszych myśli domaga się zamknięcia każdej kolekcji rzeczy w coś. Trudno powiedzieć, kiedy nastąpiło to historycznie, ale po Newtonie wszystko musiało sie już dziać w przestrzeni. Przestrzęń jest potrzebą naszej myśli i można się zastanawiać, czy podobnie jak liczba pojęcie o przestrzeni nie jest wdrukowane w nas a p r r i o r i. Nie idziemy aż tak daleko, bo pojęcia a priori mogą mieć swoje gradacje. . Wydaje się, że pojęcie o przestrzeni nie jest tak asolutne jak liczba. Kształtowało się ono wśeód naszych pojęć o wiecie fizycznym. Przestrzenie znane z matematyki abstrakcyjnej są zbyt silnie zależne od wcieleń liczbowych, aby tu o nich mówić. Ale jest też pojęcie przestrzeni filozoficznej, niezależnej od naszych potrzeb poznawania świata fizycznego. Tę potrzebę odczuwa nasza myśl, która poszukuje zamknięć dla swoich konstrukcji.

Zdominowana przez zmysł wzroku, nasza geometria dopiero w późnym stadium ewolucji dostrzegła t o p o l o g i c z n y – zakrzywiony - aspekt zjawisk. Nie jest nam jednak obca myś l o istotach żywych, których świat S ukształtowany jest przez zmysł d o t y k u, które nie mają innych pojęć niż topologiczne, którym linia zamknięta i prosta rozumiana bywa przede wszystkim jako przegroda, być może nie zawsze jako droga. Wiek dwudzisty to wiek topologii. Odcinek, okrąg i sfera zyskały prawo bytu jako obiekty oisywane jedynie terminach topologicznych, to jest nie tracących znaczenia po ich deformacjach homeomorficznych, to jest ciągłych i nie sklejających punktów.

Wstęga Mobiusa – obiekt, który mógłby zapoczątkować topologię - leżała przez tysiąclecia gdzieś po kątach jako zwitek materii i nikt jej nie zauważał. Tymczasem, wspomagany przez rytm poierwotny zmyśł liczbowy nie pozwalał na podobne zastoje w arytmetyczności. Leniwy bieg refleksji geometrii i ocierające się o ars wykonawstwo nie dające miejsca na refleksję. Czy wytłumaczy to teoria dwóch półkul mózgowych?>

Wiek obecny zapoczatkowany został włączeniem do topologii utworów geomerycznych wymiarów wyższych, które jeszcze przez Riemanna i Poincare'go musiałyby być rozpatrywane jako obiekty geometrii różniczkowej. Rozwiązanie stuletniego problemu o charakteryzacji topologicznej sfery trójwymiarowej okazało się czymś więcej niż mógł się spodziewać Poincare'. Połączyło w jedno metody uważane dodąd za oddzielne. Posłużyła temu i arytmetyka, ale nie zdominowała widzenia rozwiązaznia o charakterze geometrycznym i topologicznym.

E k s pl o z j e a r y t m e t y c z n o ś c i

Grecy znali a l g o r y t m arytmetyczny, który posłużył im w odkryciu niewspółmierności, takich jakie daje bok i przekątnia kwadratu. Algorytm ten oparty jest na twierdzeniu o dzieleniu z resztą. Dla ustalonej liczby a każda liczba n daje się przedstawić w postaci $n = ka + r$, gdzie $r < a$. Stwierdzamy to biorąc największe k takie, że $ka < n$. Istnienie takiego k jest aksjomatem arytmetyki stosowanego wprost do liczb.

Odcinki, mające wspólną miarę (tj. będące wielokrotnościami pewnego wspólnego odcinka) traktujemy - dzięki dopuszczanym w rozumowaniach metaforom - jak liczby. W znanym szkolnym dowodzie zakładamy a contraruo, że przekątnia i bok kwadratu mają wspólną miarę. Aplikujemy sukcesywnie twierdzenie o dzieleniu z resztą do odkładanych odcinków, traktując je jak liczby, nie posługując się niczym więcej niż elementarnymi zasadami przystawania trójkątów. Okazuje się, że algorytm się nie kończy. Bok i przekątnia kwadratu są więc niwspółmierne.

W tym dowodzie wychodzimy poza dedukcję. Korzystamy z a n a l o g i i jaką zauważamy między liczbami a odkładadanymi odcinkami mającymi wspólną miarę. Nazwaliśmy to wcześniej m e t a f o r ą. To właśnie tą metaforą arytmetyka wkroczyła do geometrii. Metafora to przeskok w dedukcji. Często nie chcemy o tym wiedzieć.

Zauważmy, że w algorytmie Euklidesa korzysta się z artmetyczn, ości jedynie w zakresie d o d a w a n i a. Ten dowód, i innych kilka tago rodzaju dowodów, znanych Teodorosowi z Kyreny, między innymi dowód niewspółmierności odcinków podziału złotego, to perły sztuki matematycznej. Spotkał je jednak los eksponatu w matematycznym muzeum, tak jak się stało z wieloma dziełami sztuki matematycznej,w wyniku pojawienia się silniejszego środka dająceego szybciej i więcej.

Bo oto, wedeług twierdzenie, które odkrył Euklides, każda liczba naturalna ma rozkład - przy tym dokładnie jeden - na czynniki pierwsze. Nie dowodzi się twierdzenia dla każdej liczby n   z osobna, ale od razu dla w s z y s t k i c h liczb n, a przebiega to mniej więcej tak. Przyjąwszy, że rozkład istnieje dla wszystkich liczb mniejszych od liczby m, dowodzi się istnienia rozkładu dla liczby m. Wynika stąd istnienie rozkładu dla wszystkich liczb n , bo m było   wzięte było dowolnie, a dla n = 1 twierdzenie jest prawdziwe w sposób oczywisty. Dodatkowe rozumowanie daje jednoznaczność rozkładu.

Indukcja przebiega tu nie po zbiorze liczb, lecz po zbiorze   z d a ń ponumerowanych liczbami. Gortowi jesteśmy zapominać o tym rozszerzeniu stosowalności indukcji.

Niewspółmerność boku kwadratu i przekątni wynika – jeśli powołamy się na twierdzenie Pitagorasa. - z n i e w y m i e r n o ś c i i √2 Niewymierność pierwiastka z 2 jest faktem czysto arytmetycznym, którego dowód, wychodzący z przypuszczenia a contrario, że √2 = p/q (ułamek nieskracalny), polega na zaobserwowaniu niemożliwości równości $2q^2 = p^2$, co wymaga jedynie spostrzeżenia, że czynnik 2 występuje po jej lewej stronie nieparzystokrotnie, podczas gdy po prawej parzystokrotnie.

Ttwierdzenie o niewymierności pierwiastka z 2 nie ma nic wspólnego z geometrią, Nie mają nic wspólnego z geometrią dalsze stwierdzenia o niewymierności pierwiastka z n, jeśli n nie jest kwadratem.

Twierdzenie o jednoznacznym rozkładzie na czynniki pierwsze włącza liczbę naturalną w system formalny, dotąd nieobecny w liczbie. Możliwa dotąd do odbierana zmysłowo,   jest teraz ciągiem – potencjalnie nieskończonym –

wykładników potęg z jakimi pojawiają się w jej rozkładzie liczby pierwsze. Dzieje się tak za sprawą włączenia m n o ż e n i a, obecnego w zdaniach przenoszonych indukcja, co dopuszcza system arytmetyczny Giuseppe Peano.

Słabszą arytmetyką – o której była wzmianka wcześniej, a uwzględniającą jedynie dodawanie - zaproponował P r e s b u r g e r. Posługując się nią w zastosowaniach geometrycznych, musi wystarczyć algorytm Euklidesa. Dostajemy mniej twierdzeń, ale przyswajalnych intuicyjnie.

Termin a r y t m e t y z a c j a pochodzi z wieku dziewiętnastego. Znaczy opanowanie niemal całej znanej wtedy matematyki przez formalizm arytmetyczny W tym znaczeniu możemy nazwać twierdzenie o rozkładze na czynniki pierwsze twierdzeniem o a r y t m e t y z a c j i l i c z b y. Według Spenglera, tworzywem matematyki jest liczba, a proces arytmetyzacji, w erze noożytnej zpoczątkowanyb przez Kartezlusza, jest nieuchronny.

Zarytmetyzowana matematyka daje szybciej i więcej. Powiedzieliśmy to, ale przychodzi refleksja. W geometrii postępujemy krok za krokiem, śledząc zgodnośc kolejnych kroków naszą podlegającą zmysłom intuicją. Kończąc dowód znamy nie tylko konkluzję, ale też i jej rozumienie. Jeśli wyręczymy się procedurą arrytmetyczna, bądź algebraiczną, idąc za faustowskimi pokuszeniami, otrzymujemy wynik, ale na jego zrozumienie musimy teraz zapracować. W ten sposób zostało rozwiązane zagadnienie czterech barw. Rozumienie rozwiązania do dziś jest problemem otwartym. Sir Michael Atiyah miałby inne argumenty, ale w istocie właśnie to powiedziazł w swoim eseju o przeciwstawnej naturze geometrii i algebry w naszej percepcji matematycznej.

Jest okazja - wyprzedzając chronologię pojęć - wspomnieć podobną sytuację w matematyce mnogościowej. Cantor miał „dwa dowody nieprzeliczalności c o n t i n u u m W pierwszym korzystał z własności geometrycznych, wskazując na ciągłość uporządkowania continuum jako na przyczynę.

W tak zwanym drugim dowodzie oderwał się od geometrii traktując elementy continuum jako ciągi o cyfrach 0, … 9. Tak zwaną metodą p r z e k ą t n i o w ą wykazał, że żaden ciąg takich ciągów nie wyczerpuje wszystkich możliwości, Dowód jest dowodem twierdzenia czysto arytmetycznego o ciągach cyfr. Bez trudu wychodzi się z tym dowodem poza rozważany przypadek ciągów, uzyskując znaną nierówność Cantora $2^m > m$ dla wszelkich m, w której m jest liczebnością zbioru, nazywaną takkże jego m o c ą. Pozostawiona arytmetyce swoboda doprowadziła Cantora do eksplozji zbiorów, które mogą być dowolnie dużej mocy.

Eksplozja arytmetyczności objawia się i po drugiej stronie stołu. Obszarem genialności matematycznej jest arytmetyka. Geometra dojrzewa powoli, chociaż może właśnie dlatego g e o m e t r a – a to jeszcze dziewiętnasowieczna tradycja - osiąga status uczonego, niezbyt często przypisywany matematykom. Odnotujmy wszakże, że arytmetyczność nie wchłania całej nauki o liczbie. Mamy na myśli nie tylko wspomniane już liczby figuralne, ale całą dysscyplinę nazywaną t e o r i ą l i c z b, która zajmuje się liczbą jako zjawiskiem.

R u c h i z m i a n a

Matematyka Starożytnych była, według Arystotelesa nauką o b y t a c h n i e r u c h o m y c h. Było to samoograniczenie wymuszone przez paraliżującą myśl aporię Zenona o strzale, blokującej rozumienie zmiany jako p r o c e s u. Tymczasem, zmiana jest istotą zjawisk fizycznych i Arystoteles poświęcił cały rozdział w "Fizyce" w z r o s t o w i i z a n i k o w i. Ale sytuacje, gdzie obserwujemy zmianę nie mają ze sobą powiązań. Może to być droga narastająca w czasie, nasilenie barwy, czy też tempo przyboru wody w strumieniu.

Ideę ich wspólnego ujęcia matematycznego podjęli filozofowie scholastyczni XIV wieku. Calculatores z Merton College z Oksfordu i filozofowie z Paryża wyszli od spostrzeżenia, że to, co bezpośrednio podlega obserwacji w zjawiskach, to nie sama wielkość zmiany lecz jej i n t e n s y w n o ś ć. Nie podlega obserwacji ilość wody w strumieniu, lecz intensywnosć jego przepływu. Intensywność zmiany, obserwowana w określonym zakresie, determinuje zmianę ilościowo. Jednym z przykładów, który brano pod uwagę, była intensywność łaski Bożej spływajacej na człowieka, która się w nim nagromadza ilościowo, sumarycznie, na sposób, który Newton i Leibniz nazywali później c a ł k ą Jest też intenywność siły wtłaczanej w poruszające się ciało, która determinuje jego i m p e t – a więc prędkość. Jeśli więc s i ł a działająca na ciało jest, - tak jak przy spadku swobodnym – niezmienna w czasie, to prędkość wzrasta w czasie jednostajnie. Scholastycy zawierzyli wdrukowanemu w nas zmysłowi pozwalającemu nam odczuwać stopień natężenia oddziaływań.

Galileusz nie wierzył tej wrodzonej nam intuicji i sprawdzał. Podobnie, nie wierzył intuicyjnie rozumianym aksjomatom geometrii Kartezjusz, zastępując metodę Euklidesa swoją arytmetyczną metodą współrzędnych. Również Leibniz, rozwijając swój rodzaj calculusu, nie szedł drogą intuicji newtonowskiej.

Pełne włączenie idei czternastowiecznej w zarysowującą się już konstrukcję matematyczną zawdzięczamy Newtonowi, chociaż pominęliśmy prekursorów, Keplera, Cavalleriegon i Torricellego, a przede wszystkim Arystotelesa, bo to na gruncie jego "Fizyki" powstawał opisywany tu nowy dział matematyki - a n a l i z a m a t e m a t y c z n a – zwany na Wyspach c a l c u l u s e m - w której Newton widzał geometrię Euklidesa wzbogaconą o naukę o ruchu.

Był to skok w rozwoju, ale – wróćmy do naszej mitologii – skok w obrębie pojęć matematyki Dnia Szóstego. Zauważmy przy tym, że intensywność zmiany ma jakieś podobieństwo do liczbowego rytmu Dnia Pierwszego. Jest jakby tego rytmu c i ą g ł y m w y p e ł n i e n i e m. Podobnie jak rytm arytmetyczny, ma zastanawiającą rozmaitość wcieleń, nadając pojęciom matematycznym nowe szybsze tempo rozwoju. Nie trzeba będzie nawet stu lat, aby prosty calculus przeszedł w równania struny u Eulera. Przypomnijmy, że to właśnie intensywność - wielkość - która była tak trudna do określenia - jest tym, co podlega bezpośrednio obserwacji, a także pomiarowi. Tę prawdę wyraża nam r ó w n a n i e r ó ż n i c z k o w e, które z danych związków między intensywnościami obiecuje nam odtworzyć związki między samymi wielkościami, które bezpośredniej obserwacji nie są dostępne.

Rozumienie metod różniczkowych nie zawsze będzie nadążało za rozwiniętym z czasem rachunkiem. Przyznawał to Euler we wstępie do swojego trzytomowego dzieła, a nie chodziło już tylko o anegdotyczny ołówek. Motywacje analizy wywodzą się z szerszego zakresu niż te, które wystarczały geometrii. Włącza się zmysł poczucia czasu, natężenia siły i poczucia nagromadzania się wielkości, na wiele sposobów wcielając się w sytuacje matematyczne. Metafizyczność tych motywacji odczuwamy dużo silniej niż w zakresie klasycznych motywacji geometrycznych, których źródło jest niemal bezpośrednie. Motywacje analizy są głębiej w nas ukryte, najczęściej nie są naszymi bezpośrednimi przekonaniami wynikającymi z własnego doświadczenia, lecz zdają się raczej wynikiem w d r u k o w a n i a ich w nas – używając zwrotu Konrada Lorenza – we wczesnych stadiach naszej ewolucji, chociaż może nie chodzi tu o Dzień Pierwszy. Słowacki w „Genesis z ducha” dziękuje mrówce, której doświadczeniem się kieruje.

I n t u i c j e, które doprowadziły do odkrycia calculusu, widzimy jako sumaryczne doświadczenie przedmatematyczne, jako c a ł k ę z doświadczeń przedświadomości, nie tylko naszej, lecz całego biegu ewolucji. Bywa, że nie ufamy intuicji, a Pascal dopowiadał, że to dlatego, że aż nazbyt często bywa bezbłędna.

Calculus, bardziej niż inne dyscypliny, uwidacznia istotę intuicji. Te, które leżą u podstaw geomerii Euklidesa, są zbyt proste, by uwidocznić swoje role. Przewidywania są tu latwo i szybko potwierdzane zmysłowo. Zmysł kontrolujący calculus jest głębiej ukryty. Natęzenie siły, bieg czasu i prędkość chwilowa są nieostro poddane oglądowi. Dlatego przyszło zawierzyć, bez możliwości kontroli, raz przemyślanym postulatom. Intuicje leżące u postaw calculusu przetrzymały atak metod mnogościowych przełomu poprzednich dwu stuleci przetwarzając ślady pozornie przegranych potyczek w dzieła sztuki na zawsze zdobiące matematykę. Czy wytrzyma kolejne dużo silniejsze obecnie nasilające się ataki arytmetyzacji, nie wiemy.

Matematyka Scholastyków i Newtona, a nie pomińmy Keplera, Cavalleriego i Torricellego, zaczerpnęła jeszcze raz pełną garścią z dostępnego nam zmysłami świata. W swoich początkach była wolna od wpływu arytmetycznego. Było to jeszcze wtedy, kiedy Newton formułował prawa dynamiki i poddawał im prawa Keplera rządzące ruchem planet, a nawet jeszcze wtedy, kiedy Jan Bernoulli wyjaśniał problem brachistochrony, a Euler problem struny.

Prawdy arytmetyki są nam narzucone, są poza naszymi przekonaniami i – mimo że są tak pewne, a nawet absolutnie pewne - nie azywamy ich intuicyjnymi. Bo nie w pewności jest sens intuicji, lecz w p r z e k o n a n i u . Intuicje wiążące zmianę, jej intensywnosć i czas, okazały się nadzwyczaj t r w a ł e . Te intuicje drzemały w nas jako niematematyczne od naszego – niech antropolodzy znajdą własciwą datę – Dnia Szóstego. Zostały wyrażone matematycznie dopiero w czasach śledzonych historią. Są one śladem jakiegoś strumienia, w którym płyniemy wraz ze światem, który wydaje się konkurencyjny dla rytmu arytmetycznego. . .

Pojęcie o c z a s i e. które zawsze tak męczyło filozofów, zostało skwitowane przez Newtona zwrotem, że istnieje c z a s a b s o l u t n y. To wystarcza w każdym z osobna wyizolowanym konteksćie zjawisk. Ale kiedy na początku dwudziestego wieku przyszło połaczyć w jedno fizykę Newtona z elektrodynamiką Maxwella, musiano zrelatywizować pojęcie czasu. Nie wydajesię, by fizycy znaleźli poglądu na czas, który odpowiadałby zjawiskom kwantowym.

A jest także, jakby wdrukowane w nas, poczucie czasu, który płynie nam w przykry sposób wolno, jeśli czekamy w kolejce na przyjęcie nas przez lekarza, a mija nispostrzeżenie w wirze zdarzeń. Wydaje się, że to nasze oczekiwania, które stwarzają w nas poczucie przyszłości, jednocześnie stwarzają nam czas. Zmuszają nas go dźwigać, a doznania idące ze świata zewnętrznego jakby uwalniają nas od tego ciężąru. To wdrukowane w nas poczucie czasu jest jednokierunkowe i skierowane ku przyszłości. Czas kinematyki i dynamiki Newtona nie ma tego ukierunkowania.

Każda ze wspomnianych egzemplifikacji czasu wskazuje na głęboką zależność czasu od sytuacji i zjawisk. Stąd bezowocność, jak dotąd, trudu filozofów w uchwyceniu czasu jako absolutu.

M a t e m a t y c z n o s ć   p r z y r o d y

Przyrodę możemy kontemplować, ale przeważnie stajemy jej naprzeciw i w t e d y widzimy ją matematycznie. Dla wyjaśnienia, wróćmy do wcześniejszych naszych wywodów. Kiedy mówiliśmy o świecie S i wbudowanej weń konstrukcji pojęć, nie dzieliliśmy jej na matematyczną i niematematyczną. Dopiero w którymś momencie pojawiła się matematyka, którą zazwyczaj wyodrębnia się spośród ogółu dociekań ś c i s ł o ś c i ą. Ale nierygorystyczne fazy rozumowań są r ó w n i e ż matematyką, chociaż woleliśmy je nazwać matematycznością, aby nie wychodzić poza ustalony pogląd. Nie wykluczamy więc, ze w s z y s t k o, co ze świata odbieramy, j e s t m a t e m a t y c z n e, przynajmniej potencjalnie.

Poszerając nieco inaczej wypowiedzianą już wcześniej myśl, przyjmujemy, że zaistnienie tak zwanych f a k t ó w jest niemożliwe, jeśli przedtem nie zostały pomyślane. Fakty nabierają życia dopiero dzięki naszemu nimi zainteresowaniu. Jak dużą część natury człowiek ożywił, włączając ją do swych struktur metafizycznych? Tylko tę część natury możemy włączyć do nauki współbrzmiącej nadal z naszymi odczuciami, poddając ją naszej matematyce, która z kolei, dzięki kontaktowi z naturą, sama się rozwija.

Pozostają całe obszary zjawisk przyrody, do których z naszą matematyką nie zaglądamy. To dziwne, że geometrią Euklidesa można iść w dowolnie dalekie regiony kosmiczne, uzyskując nadal sensowny opis zjawisk. Ale już Riemann zauważył, że użyteczność naszej geometrii zatraca się, jeśli przechodzimy ku mikroskali. Naiwne przekonania o symetrii, w jakiej pozostają do siebie nieskończoność i zanik ku zeru, trzeba odrzucić. Riemann dokładnie się nie wypowiadał, ale już w jego czasach budowa punktowa otoczenie zera była uświadomioną trudnością myślową. Trzeba złamać dawne s y m e t r i e - jak nazywają znane sobie prawidłowości fizycy – by znaleźć się w świecie kwantów.

Nie wszystkie nasze wzorce matematyczne jednakowo daleko sięgają w zjawiska przyrody. Arytmetytyczność możemy – poprzez rozbudowę struktur algebraicznych - wcielać wszędzie. Dlatego to w fizyce teoretycznej króluje w najrozmaitszych formach algebra. Przyroda ulega. Daje się eksploatować, nie odkrywając wszakże swoich tajemnic. Właściwe temu celowi są m i ę k k i e wzorce matematyczne znane z analizy matematycznej – dawnego calculusu – i geometrii. Przyroda – ta nam bliska - ma je w sobie i prawdy uzyskiwane tymi miękkimi metodami poddają się naszemu rozumieniu.

Fizyka dwudziestego wieku, wchodząc w daleki mikroświat, doświadczyła tego, co było przeczuciem Riemanna. W mikroświecie nie ma nic do powiedzenia nasza wypracowana wcześniej geometria. Matematyka potrafi się tam dostać, ale za pomocą konstrukcji przestrzeni abstrakcyjnych, a więc w istocie za pomocą arytmetyki, która w matematyczności ma pozycję specjalną. Nie uzyskujemy obrazu podlegającego kontroli zmysłów. Wymiar, o jakich mówi się w teoriach kwantowych nie tłumaczy się na wymiar odbierany zmysłowo. Pewne rzeczy można przybliżać wyobraźni poprzez analogie w stylu Bohra, w istocie poprzez metafory, ale nie przez aproksymacje. .

Wstęga Mobiusa – obiekt, który mógłby zapoczątkować topologię - leżała przez tysiąclecia gdzieś po kątach jako zwitek materii i nikt jej nie zauważał. Tymczasem, wspomagany przez rytm poierwotny zmyśł liczbowy nie pozwalał na podobne zastoje w arytmetyczności. Leniwy bieg refleksji geometrii i ocierające się o ars wykonawstwo nie dające miejsca na refleksję. Czy wytłumaczy to teoria dwóch półkul mózgowych?>

To, że jakieś zjawisko pozostaje p o z a naszą matematyką, nie znaczy że nie jest niematematycznie i n s p e. To, że w dostępnym nam zakresie zjawisk przyroda jest matematyczna, wydaje się t a u t o l o g i ą, bo nasza matematyka jest wytworem naszego otoczenia i penetrując to otoczenie znajduje jedynie potwierdzenie dla wzorców, które pod wpływem tego otoczenia wypracowała. .

Jeślby przyjąć za Schopenhaueren, że świat zewnętrzny jest naszą wolą i wyobrażeniem, to trzeba by przyjąć, że swoją matematyczność przyroda zawdzięcza n a m. I rzeczywiście w i e l e jest tam naszego. To m y odgadliśmy kwadrat w prawie ciążenia i jego związek z eliptycznością torów planet. Stwórca nie musiał tego zawczasu widzieć. Nic nie ujmiemy, a nawet przeciwnie, dodamy powagi Stwórcy, jeśli nie będziemy wymagać, by wraz z nami wypracowywał formuły matematyczne.

Są wszakże wzorce matematyczne obce przyrodzie Dnia Szóstego. Są to wzorce czysto arytmetyczne i algebraiczne i wzięte z formalizmów, których matematyka ma wiele. Nie wierzymy, by arytmetyczność, w której liczba jest ciągiem skończonym wykładników potęg w jakich występują liczby pierwsze w jej jedynym rozkładzie miała coś wspólnego z przyrodą Dnia Szóstego,

Prawdy matematyczne są prawdami n a s z e g o świata S i znikną razem z nami, a żadna inna cywilizacja nie przejmie ich od nas, niezainteresowana nimi, znajdując w świecie swoich myśli i w otaczającym ją świecie inne upodobania, przez co do bezpośredniego ich przejęcia będzie niezdolna.

Podobnie jak monada, będzie zdolna do przejęcia jedynie określonego sygnału rozbudzającego jej interior. Potrebny jest kod i tego właśnie będzie brak. Tak zwane przedmioty matematyczne – którymi są zainteresowani realiści matematyczni – istnieją jedynie w nas. Dorobek upadłych cywilizacji gromadzimy w muzeach, ale nie ich dorobek metafizyczny i matematyczny. Ten przepada bezpowrotnie wraz z ich twórcą i jego światem S.

M a t e m a t y k a C a u c h y' e g o

Intuicje, które kierowały Calculusem, a które jeszcze wystarczały Eulerowi, zmuszone były w końcu dać się wyręczyć radykalnemu środkowi, jakim była arytmetyzacja analizy dokonana w początkach XIX wieku za sprawą Cauchy'ego. Analiza matematyczna Cauchy'ego jest w zamyśle od samego początku całkowicie arytmetyczna. Prostej nie chce się się już widzieć geometrycznie. Prosta ma być teraz systemem liczbowym, a funkcje – dawne fluenty – mają być określone arytmetycznie punkt po punkcie. .

Cauchy nie poszerzał matematyki na ten sposób, w jaki kilka wieków wcześniej poszerzył matematykę Calculus, podporządkowując matematyce niedostępne jej dotąd rejony o d b i e r a n i a świata. Matematyka Cauchy'ego nie poszerzała zmysłu matematycznego. Jest bezbarwna i apoetyczna, a odbieramy ją nawet jako ruch wsteczny, wykluczający z analizy pewne jej idee nie dające się poddać idei nadrzędnej, jaką była ś c i s ł o ś ć natury arytmetycznej. Cauchy r e d u k o w a ł analizę Newtona do pojęcia liczby. Nie był to wszakże powrót do idei pitagorejskiej. Nie wchodzi się dwa razy do tej samej rzeki. Liczba u Cauchy' ego nie była dawną czystą ideą pitagorejską, lecz tworem myślowym, który wszedł do matematyki jako c o n t i n u u m l i c z b o w e, zbudowane tak, żeby mogło być polem, na którym dawne pojęcia i postulaty Newtona mogły być ukształtowane w teorię i twierdzenia. W niedługim czasie pojawiła się idea zredukowania całej matematyki do kilku prostych zasad, chociaż nie od razu przewidziano na jakiej drodze dojdzie do wielkiej unifikacji. Kronecker uważał, że przynajmniej samo pojęcie liczby należy zostawić takie, jakim było. Protestował, widząc próby szukania unifikacji w pojęciach bardziej pierwotnych.

W matematyce Cauchy'ego funkcja przestawała być prawem zależności. Byłą określana punkt po punkcie, co pomijało ukształtowane dotąd intuicje przypisywane funkcjom zadawanym dowolnym ruchem ręki, a więc funkcjom c i ą g ł y m z samej swojej natury. Okazało się wszakże, że epsilon-deltowa ciągłość zaproponowana przez Cauchy;ego nie wnika w pełni we wszystkie aspekty intensywniości procesów. Ciągłość nie zapewnia istnienia pochodnej, a całka – jaką pomyślał Cauchy - nie zawsze jest zdolna do odtworzenia funkcji z istniejącej wszędzie pochodnej. Okazało się, że rzekonanie Calculatorów i Newtona ma jakieś wyjątki. Ale – powiedzmy od siebie – stało się tak dlatego, że wyszliśmy poza matematykę prowadzoną intuicjami calculusu.

Cała druga połowa dziewiętnastego wieku i wiek dwudziesty w matematyce to koncert frapujących wyjątków, jakie zaczęła dostarczać pozbawiona dawnych ograniczeń zarytmetyzowana matematyka

Odczuwamy nostalgię za matematyką Dnia Szóstego, ale nie wydaje się, by mogła ona poddać swojemu oglądowi tę matematykę, którą wszczepił w nią narzucający kategoryczność rytm Dnia Pierwszego, a której obecność jest faktem. W świecie Dnia Szóstego zjawiska mają charakter jakościowy i objawiają się n i e r ó w n o ś c i a m i. Równościom pozostawiony jest status wątpliwych co do zaistnienia stanów granicznych. Arytmetyczność to koncert r ó w n o ś c i, t o ż s a m o ś c i   i   r ó w n a ń, a więc samych osobliwości z punktu widzenia świata Dnia Szóstego. Doznania redukują się do dwóch sytuacji logicznych, otwierając w rezultacie furtkę ku dwuwartościowej kombinatorycznej eksplozji.

Hermite i Poincare sprzeciwiali się tej inwazji osobliwości, ale przede wszystkim odcięciu matematyki od jej bezpośrednich źródeł przyrodniczych, z których matematyka już nie wyrastała, lecz do których jedynie mogła w r a c a ć poprzez - czasen możliwe, a czasem nie - z a s t o s o w a n i a - pojęcie dawniej nieznane.

P o s z e r z a n i e   i n t u i c j i.

Okazało się jednak, że nasza wyobraźnia potrafi rozbudować się i adaptować wspomniane osobliwości. Potrafiliśmy rozszerzyć nasz zmysł matematyczny, wbudowując zarytmetyzowaną analizę w naszą świadomość. Zdolność naszej świadomości do adaptacji w sytuacjach daleko odbiegających od doświadczeń zmysłowych okazała się większa niż ta, którą widzieli wielcy sceptycy. Mimo że nie obserwujemy funkcji Cantora – Lebesgue'a w zjawiskach przyrody, to jednak umiemy ją umiescić nie tylko w naszym świecie S, ale potrafimy sobie wyobrazić pewne stany graniczne zjawisk przyrody, w których ta funkcja się pojawia się już nie jako osobliwość, lecz jako stan graniczny idealny.

Przykład zarytmetyzowanej analizy stawia przed nami pytanie o to, jak daleko świat S naszych myśli może pójść w adaptacji osobliwości arytmetycznych, rozszerzając w nas zmysłowosc juz ściśle matematyczną. Wydaje się, że ta zdolność adaptacyjna jest daleka od wyczerpania.

Teraz liczby zaczynają być położone wobec siebie gęsto. Pomaga nam je rozumieć poszerzana o pojęcie z b i o r u   geometria. Powstaje wtórnie potrzeba znalezienia dla liczb przestrzeni, aby je intuicyjnie uwidocznić Powstają więc przesrtrzenie funkcji. Ewentualne w nich luki zapełniają skądinąd niechciane funkcje osobliwe. To samo dotyczy figur, których zakres się poszerza, jeśli zaczynamy je traktować punktowo. Można to nazwać g e o m e t r y z a c j ą l i c z b y.

Ta wtórna geomeryzacja wcześniej zarytmetyzowanych partii matematyki, pozwala na utrzymanie w zakresie zmysłowości zaawansowane pojęcia topologii, teorii miary, probabilistyki i innych powstających w naturalnym rozwoju matematyki dyscyplin. Korzysta się w tym z pojęć o z b i o r a c h, które jakby łagodzą skutki arytmetyzacji, ale w końcu i one upomną się o swoją autonomię.

L i c z b a i z b i ó r

Związek liczby ze zbiorami – kolekcjami elementów - jest tak oczywisty, że nie powinno się zaczynać od Gaussa. Ale od Gaussa wywodzi się widzenie zbiorów jako pewnej konieczności myślowej, bo oto liczby zespolone, to jest pary liczb rzeczywistych, tworzą z b i ó r, co wydaje się samemu Gaussowi jedynie wygodą słowną. Z uwagi na obecność i formę działań określonych na tych parach zbiór staje się s y s t e m e m z określoną s t r u k t u r ą, co daje inne widzenie dawniej znanej rzeczy. Jeśli przy tym rozważą się pary jedynie liczb całkowitych, to po rozszerzeniu na te pary pojęć podzielności, powstaje system liczbowy, który jest już matematyczną nowością w porównaniu z liczbami całkowitymi. .

Dedekind – uczeń Gaussa i twórca algebry abstrakcyjnej – spostrzegł, że zbiory są nieodłącznym towarzyszem abstrakcyjnego ujęcia liczby.

Samo – oddzielnie brane - pojęcie zbioru nie ma wyraźnego wbudowania w naszą zmysłowość. Podobnie jak liczby, zbioru nie widzimy w formie c z y s t e j, lecz zawsze we w c i e l e n i u w jakąś sytuację matematyczną. Jesli pojęcie zbioru czystego zaspakaja jakąś naszą potrzebę, to tylko czysto myślową. Było obecne w rozmyślaniach filozofów wcześniej niż u matematyków i nie było przez długi czas potrzebą matematyki. Wlączone do matematyki, łagodzi kontury pojęć, pozwalając na ich konsolidacje w szersze wspólne konteksty.

Ale,wobec swej nieokreśloności, zbiory wcielają się w materię matematyczną nieraz podstępnie bardzo daleko, a wchodząc w nieswoje role, mylą nasze zmysły, idąc obok nich. Myśląc o zbiorze, nie wchodzimy odrazu w to, czy jest skończony, bo taki czy taki jest kolekcją. Zbiór nie ma kształtu. Daje się deformować w naszej myśli Nie jest obiektem przyrody. Cantora zaskoczyło odkrycie, że płaszczyzna ma tyle samo punktów co prosta, i trzeba było dopiero doświadczonego Dedekinda, aby widzieć, że nie obala to niczego, co naruszałoby nasze wyobrażenia o wymiarze. Zbiory są obok naszej zmysłowości, ale wydaje się też, omijają wiele ze z tego, co jest istotą świata S naszych myśli, omijając całą jego dynamikę. Odwzorowanie f objawia się w świecie S jako a k t i nie musi być widziane jako zbiór par (x, f(x)).

Jak pisze A l e x a n d e r W i t t e n b e r g w pełnej gruntownych przemyśleń książce, jedynym zbiorem, który pojawia się w naszych myślach bez udziału doznań idących od świata zewnętrznego (to jest nie będącym zbiorem wcielonym w jakąś sytuację), jest zbiór liczb naturalnych dany nam razem z całą swoją dynamiką liczbowego rytmu pierwotnego – my dodamy przedłużenie tego rytmu w pozaskończość. Jest w tym pewien paradoks, Bo chcielibyśmy, za Fregem, widzieć zbiory jako tworzywo liczby. Tymczasem, zbiory – które chcielibyśmy nazwać d o w o l n y m i - nie są czystymi tworami myśli i pojawiają się nam w dopiero sytuacjach narzucanych przez zmysły, na przykład jako zbiór punktów prostej, czy też zbiór piasczynek, które niesie wiatr, gromada ptactwa. .

W systemie Gaussa liczb całkowitych zespolonych, nie zbiór, lecz jego dynamiczna algebraiczna struktura, jest tym, co przeważa w jego widzeniu. Istotą nie jest więc tworzywo i jego elementy, lecz system. Nie musimy elementów systemu n a z y w a ć liczbami, bo one s ą już liczbami jako elementy zorganizowanego w strukturę systemu.

A chodzi tu w istocie nie nie o liczbę, lecz o l i c z b o w o ś ć. To właśnie liczbowość kierowała Cantorem, kiedy będąc na kroku ω stawiał kroki ω + 1, ω + 2 i dalsze. Ale, czy były one oczekiwane przez jego świadomość, czy był to raczej przymus myślowy, któremu się poddawał? Z tego, co możemy wyczytać z jego Memoire Nr 5, była to sytuacja wymuszona. Po przekroczeniu progu nieskończoności nie odczuwamy spodziewanego poczucia poetyczności. Skala liczb porządkowych jest w swoich początkowych partiach, po wyjściu poza liczby naturalne, szara. Dopiero w dużej skali ujawnia echo znanego wczesniej rytmu pierwotnego, następstwa i niemożliwości powiedzenia s t o p. To sama natura naszego myślenia daje nam w podarunku porządek, który nazwany jest d o b r y m . Porządki – tak zwane z w y k ł e - nasza myśl zapożycza ze zjawisk spoza świata S.

Idąc za Wittenbergiem, nie widzimy, by zbiory wyprzedzały liczbę jako aprioryczny element matematyki. Ale też i liczba – jako rytm i system – również nie pojawia się inaczej niż we wcieleniu w zbiór. Wspólny aprioryczny początek matematyki mógłby być więc j e d e n.

Tymczasem - cytat z Andrzeja Lelka - z b i o r y s ą w s z ę d z i e. Może to właśnie dlatego dawano pierwszeństwo zbiorom. Frege proponował widzieć liczbę jako abstrakt powstały po utożsamieniu wszystkich zbiorów tej samej liczebności, ograniczając liczbę – o czym już wspominaliśmy – do jej aspektu ilościowego. Russell wskazał na niewykonalność tego zamiaru z powodu trudności logicznych związanych z wymaganiem, by rozważać w s z y s t k i e zbiory. Tymczasem, Cantor upatrywał załamanie się idei Fregego już w samym jej zamyśle, widząc aspekt ilościowy liczby w a l e f a c h, to jest w pewnych wyróżnionych elementach swojej skali liczb porządkowych. Abstrakcja Fregego jest zbędna – twierdził - skoro dla abstraktów mamy zawczasu gotowe reprezentanty. Wspominaliśmy o tej kontrowersji Filozofów przy okazji rozumianienia uniwersalium 3.

Zbiory – to za Dedekindem – zbliżają nas ku lepszemu rozumienia rzeczy. Rozumiemy lepiej prostą geometryczną, jeśli - za Dedekindem - wykorzystamy jej punkty do zbudowania na jej podobieństwo zbioru nazywanego c o n t i n u u m, którego system elementów odzwierciedla w sensie porządku system punktów prostej. Według Dedekinda, continuum nie będąc tym samym co prostą, o b j a ś n i a nam pewne aspekty jej budowy.

Ale, według Cantora, punkty zbioru są b u d u l c e m continuum. Widzenie drogi jako zbiorun punktów i czasu jako zbioru chwil spotykało się oddawna ze sprzeciwami. Prowadziło to do znanych trudności związżanych z rozumieniem ruchu, które przedyskutował Arystoteles, znając wcześniej wypowiedziane obiekcje Zenona z Elei. Wchodzimy zatem w dawne błędy, ufając – jak Russell – że będąć mądrzejsi o stulecia, zdołamy je teraz pokonać.

Nie odmawiamy jednak sensowności zbudowanemu przez Dedekinda wspomnianego już continuum. Idąc za Dedekindem, powinniśmy widzieć zbiór raczej jako c o ś c o s ł u ż y , a nie to co s t a n o w i. Tak widział Dedededekind rolę zbiorów w "Stetigkeit und irrationale Zahlen", które objaśniały mu znaną wcześniej liczbę V2. Zbiór – jak rozumieniemy Dedekinda - jest tą składową aprioryczności, tą która zbliża nas ku r o z u m i e n i u, także ku rozumieniu liczby, tego tajemniczego zjawiska, jakim była dla niego liczba ujawniająca się w jego "Was sind und was sollen die Zahlen?".

D o b r y p o r z ą d e k

Profesor Mikusiński chciał się koniecznie sam przekonać, że lemat Zorna można wyprowadzić nie używając liczb pozaskończonych, i podał własny ładny tego dowód. Budował w tym celu w danym zbiorze częściowo uporządkowanym łańcuch nieprzedłużalny przy pomocy samego tylko pewnika wyboru. Lubił przypominać ten swój ładny dowód, ale za którymś razem można było usłyszeć uwagę, że oto chciałem ominąć liczby porządkowe, ale kiedy budowałem łańcuch nieprzedłużalny, ten – mimo, że wcale o to nie zabiegałem - okazał się s a m dobrze uporządkowany.

Podziwia się Cantora za jego konstrucję skali dobrze uporzadkowanej, Ale nietrudna obserwacja przekonuje nas, że ten dobry porzadek tworzył się - i u niego – s a m. Wcześniej niż Cantor przekonał nas w "Was sind und was sollen die Zahlen?" o apriorycznym wbudowaniu w nas dobrego uporządkowania Dedekind. Nie potrafimy uwolnić się od przymusu iteracji i wpadamy w indukcyjnie dynamiczny system liczb naturalnych, na którym nie potrafimy poprzestać.

Uważa się dobry porządek za wymaganie dodatkowe. Nic błędniejszego! Znaczyłoby to bowiem, że dla uzyskania dobrego porządku wystarczyłoby najpierw mieć porządek jakikolwiek, a potem go ulepszyć. Tymczasem, jak zauważą Wittenberg, nie umiemy zrobić tego j a k i e g o k o l w i e k porządku samą konstrukcją myślową. Wymaganie zwykłego liniowego porządku jest logicznie słabsze, ale matematyka, ta apriorycznie w nas wbudowana, nie obdarzyła nas żadnym przykładem innym niż dobry porządek. . Continuum, które punktami wypełnia prostą, budujemy – wraz z jego uporządkowaniem - mając wcześniej podpowiedź od przyrody w postaci sztywnego fizycznego pręta.

Również pomyślenie tak zwanego d o w o l n e g o z b i o r u jest niemożliwe bez odwoływania się do zmysłowych spostrzeżeń. Wspomnieliśmy Alexandra Wittenberga, który spostrzegł, że nie widzi innych przykładów czysto myślowych zbiorów poza systemem liczb naturalnych i odcinkami początkowymi skali liczb porządkowych. Nie mamy innych apriorycznie wbudowanych w nas zbiorów niż zbiory dobrze uporządkowane, które w istocie są l i c z b a m i. Nie zwracają na ten paradoks twórcy teorii mnogości.

Matematyka aprioryczna w nas wbudowana jest matematyką a r y t m e t y c z n ą. Jest s o l ą naszej matematyki, a jej niepodzielnym myślowym r d z e n i e m zdaje się być dobry porządek. Henryk Rzewuski – autor "Mieszanin obyczajowych" (1841) - oponował przeciwko poszukiwaniom b e z z a l e ż n e g o - jak nazywał - atomu dla metafizyki. Oponowałby także przeciwko temu ż e l a z n e m u rdzeniowi apriorycznej myśli jaki upatrujemy w skali dobrego porządku. Według Rzewuskiego, metafizyka nie zna sygnału stop w regressum ad infinitum.

Skala liczb porządkowych pozostawiona sama sobie nie jest twórcza i sama matematyki nie buduje, jest wszakże jakimś dla niej oparciem. Daje lemat Zorna, który uwidacznia nam atomy myślowe algebry jakimi są bazy, w szczególności b a z y H a m e l a. Uwiarygadnia potrzebę metody niepodzielnych, daje nam u l t r a f i l t r y, przez co nie czyni nas całkiem bezradnymi wobec problemów mnogościowych, na przykład wobec problemu kompozant kontinuów nierozkładalnych.

K w i a t e m matematyki jest wszakże matematyka s ł a b a, to jest ta, którą musimy myślowo sami wypracować. Jej przykładem są kontemplacyjne zasady geometrii i calculusu. "Dowodzę coraz słabszych twierdzeń – ale coraz bardziej mi się one podobają" – to słowa matematyka, który po latach uwolnił się od przymusu arytmetycznego. Ale ta "słaba" maytematyka to także topologia przestrzeni euklidesowych, w której dopiero dzięki metodom, które doporowadziły do rozstzygnięcia hipotezy Poincare'go zaczynamy rozumieć wymiar 3. Matematyka karmiona postrzeżenimi idącymi od świata zewnętrznego i tworzona przy pełnym udziale naszej świadomości jest tym dla której jesteśmy matematykami.

N i e s p e ł n i o n e o b i e t n i c e.

Pojęcie z b i o r u pojawia się w teorii nnogości Cantora jako "złożona z mających indywidualność elementów c a ł o ś ć M zespolena zgodnie z naszym oglądem i przemyśleniem". Ma to więc być i d e a, która w i e l o ś ć formuje w j e d n o ś ć, aby zadośćuczynić jakiejś potrzebie naszego umysłu. Mieli tę potrzebę Grecy. Zastanawiał się Zenon, w jaki sposób naszej myśli powstaje z wielośći jedność, aby nadać swoje rozumienie myśli Parmenidesa o jedności świata, sam widzac wszędzie wielość. Próbowali zrozumieć jedność w wielości - jak czytamy u Focjusza - filozofowie bizantyjscy XI wieku. Jest to też problem u n i w e r s a l i ó w, którym żyła scholastyczna Europa.

Ale w materialnie widzianej w i e l o ś c i nie zawsze daje się rozpoznać ideę. Można ominąć tę trudność, uznając za ideę już s a m o z n a l e z i e n i e s i ę w kolekcji. Teoria mnogości – ta, którą namy – zapomniała o deklaracji Cantora i dopuszcza to t a u t o l o g i c z n e rozumienie zbioru, pozbawiając się juz na samym wstępie filozoficznych ambicji. Czytamy w obowiązującej monografii: "zbiory A i B mające jednakowe elementy są identyczne" – i nic więcej o zbiorach nie chce wiedzieć jej autor. W teorii stworzonej przez Cantora, a przejętej przez Hilberta, zbiór w znaczeniu idei pozostał nigdy nie spełnioną obietnicą.

Utrzymanie obietnicy Cantora było trudne. Znamy sytuacje, kiedy brane z osobna w swoich kontekstach zbiory A i B reprezentują określone idee, a dla idei reprezentującej ich sumę nie potrafimy znaleźć. Każdy z krajów Europy reprezentuje określoną ideę, która łączy w jedność jego obywateli. Szukając wspólnej idei dla ich sumy popadamy w trudność, zadawalając się w końcu rozwiązaniem, że może to być na przykład wspólny zwyczaj zachowania się przy stole.

Naiwna teria mnogośći nie jest zobowiazana obietnicą Cantora. Jej zbiory, to zbiory wcielonene w sytuacje matematyczne, skąd idea ich zaistnienia. Eleementy tej tak zwanej naiwnej teorii są postrzegane zmysłowo, i te o wspólnej naturze nasza myśli formuje w zbiór w taki sposób jak formowane są inne pojęcia świata S. .

Myśl Joscelina z Soissons, któremu Władysław Tatarkiewicz w swojej "Historii filozofii" przypisuje autorstwo utożsamienia idei i zbioru, należy traktować jako rozwiązanie częściowe. Bo, czy można, nawet tak nieskomplikowaną ideę, jaką jest koło,   zastąpić wyobrażeniem o zbiorze wszystkich istniejących w świecie kół? Idea koła powstaje w wyniku jakiegoś myślowego procesu przebiegającego w naszym świecie   po wpływem spostrzeżeń zmysłowych. Pojęcie kolekcji porządkuje, ale czy coś wyjaśniania?

Sięgając po uniwersalia dotykamy samych granic naszego myślenia. Zainteresowane nimi było Średniowiecze, ale w wieku dziewiętnastym nastąpił nawrót, a dokonało się to w okresie największego rozkwitu matematyki. Sięganie do podstaw i poszukiwanie granic ma zazwyczaj przyczynę w poczuciu, że w patrzeniu wprost przed siebie wyczerpaliśmy swoje możliwości. Sytuacjom w których kierujemy spojrzenie ku samym sobie nie towarzyszy radość. Ale spojrzenie wstecz może się też wiązać z poczuciem wypełnienia zadania. Wiek dziewiętnasty mógł tak o sobie myśleć. Był to wiek wielkich teorii, chociaż poza wspomnianym koncertem paradoksalnych konstrukcji w teorii funkcji, nie widać w nim dawnej keplerowskiej i eulerowskiej świeżości. Nowe gałęzie matematyki rozwijały się jakby dla wypełnienia p o w i n n o ś c i   i zwieńczania swoich dokonań. Nasz wiek również sięga ku podstawom i po uniwersalia, ale to dlatego, że sięga po wszystko, z nadzieją, ale bez przekonania, znalezienia dla siebie jakiejś legitymizacji.

Trudności z rozumieniem idei nadrzędnych powodowały pojawianie sie się rozwiązań wykraczających całkowicie poza kontrolę myślową. Oto, powstawaniu idei towarzyszy pojawienie się jej n a z w y, która jakoby nawet t poprzedza powstanie samej idei. Dobrze dobrane słowo pobudza. Stąd kult słowa, obecny w teologii i kabale. Kultowi "imiesławja" (kult imienia) ulegali, jak się słyszy, rownież wielcy. Ale jest też kult s t o p y. Przypomnijmy parepatetyków, których odkryciom towarzyszył spacer. Nasza myśl nie jest zamknięta w czaszce, jej nici wybiegają dalej, ale o stopie słyszy się najczęściej. To moze być Poincare' stawiający stopę na stopniach pociągu odjeżdżającego do Caen iTarski stawiający stopę na fotelu dentysty. Ale niech wolno będzie również dorzucić coś autorowi od siebie, który przechodząc od kościoła Św. Elżbiety na wrocławski Rynek postawił stopę w kałużę.

Można sie też zastanawiać nad tym, że wielkim odkryciom matematycznym wydają się sprzyjać wielkie - nawet katastroficzne - wydarzenia, które wypłaszają matematyczne lęki, odblokowując myśli. Wynikania odwrotnego wszakże nie ma. Ani słowne zaklęcia, ani usilne spacery, stopnie Schodów Hiszpańskich, ani wywoływane burze wojenne, same nie spowodują odkryć matematycznych i nie spowodują rozbłysku dającego zrozumienie pojawiającego się skokiem uniwersalium.

Opisowy charakter rozwiniętej, z dawnego jej naiwnego początku, teorii mnogości jest jej cechą, a więc nie na miejscu byłby zarzut. Jej entuzjaści twierdzą – być może prawdziwie - że każdą rzecz matematyczną można o p i s a ć w języku zbiorów. Tymczasem, jako sceptycy, nie znamy pojęć, które w e s z ł y b y do matematyki motywowane samym należeniem elementu do zbioru. Nie jestb też tak, by całą matematykę można było przelać jednym ruchem ręki w system stworzony ze zbiorów, chciażby dlatego, że ni e istnieje coś takiego jak c a ł a matematyka,

Ale to właśnie teoria mnogości miała być tym co połączy matematykę w całość. Dla tego celu zaczęto formować jej pojęcia w całość na sposób algebraiczny. Mając na uwadze zamierzoną uniwersalnoąść, dołącza do akceptowanych już zbiorów ich formalne połączenia, na przykład ich sumy, Same kolekcje zbiorów uznaje się za zbiory,, a potem tworzy się ich produkty wyróżniając w nich podzbiory maję charakter dawniej znanych funkcji. Ten czysto formalny tryb rozbudowywania systemu poza granice tego, co mógłby kotrolować zmysł matematyczny, nie daje spodziewanej całości, bo jest to pomnażaniew bytów ad infinitum, a jedynymi niekestionowanymi elementami tego systemu jest zbiór liczb naturalnych i jego przedłużenie jakim jest skala liczb porządkowych Cantora. Wspominane fizyczne continuum nie nie ma sposobu znalezienia się w systemie, chyba że uzna się za continuum jego substytuty powstałe w wyniku jego dobrego uporządkowania.

Continnum należy do tej części teorii mnogości, która obdarzane jest przymiotnikiem n a i w n a. Jest to teoria uznająca hierarchie. Można w niej obok elementu a rozważać zbiór jednoelementowy {a} ale już nie ich sumę, chociaż można utwożyć z nich kolekcję. Naiwną teorię zbiorów zajmuje aspekt ilościowy zbiorów. Teorię liczb porządkowych Cantor stworzył jakby obok tego. Do tej pory nie znaleziono harrmonijnego wspólnego ujęcia obu tych aspektów zbioru. . Zbiory naiwnej teorii mnogości wymykają się systemowemu zamknięciu opartym na dobrym porządku, chociaż każdy z osobna zbiór można poddać temu wymaganiu.

Nie nazwiemy metafizyczną całością w a l i z k i, do której zawsze można dołożyć zapomniany krawat. Po okresie obiecującego rozwoju i ukazywaniu matematyce nowych horyzontów, teoria mnogości zauważyła w końcu swoje arytmetyczne bezdroże. Zamiast przyznać się do porażki, weszła w ofensywny sojusz z logicyzmem, przyjmując rolę matematycznego w i e l k i e g o i n k w i z y t o r a.

C z y m t o s i ę r a z e m t r z y m a?

Zwrot "co to jest matematyka?" jest zwrotem obiegowym, chociaż raczej nowym, bo dawni matematycy mieli gotową odpowiedź. Matematyka była dla nich "nauką o liczbach i figurach" i wspomniane pytanie nie budziło emocji. Teraz musża nam one bardzo dokuczać, skoro pytanie tak postawione spotyka się w tytułach ksiażek.

Nie ma czegoś takiego jak całość matematyki. Mamy n a u k i m a t e m a t y c z n e, ale o matematyce rzadko mówimy jako o nauce. Od nauk wymagamy, by miały p r z e d m i o t badań. Mógłaby go mieć matematyka, gdyby rozwijała się jak drzewo. Tak było jescze do niedawna. Do kiedy, trudno orzec, ale przyjmijmy, że do początków wieku dwudziestego. Obecna matematyka sięga dalekimi skokami ku zastosowaniom, które zmuszają ją do tworzenia niepowiązanych ze sobą enklaw. Z drugiej zaś strony tworzy wokół swoich pól badań emanacje potrzebne umysłom, aby ją rozumieć. Zaspakajała tę potrzebę powstającą w pierwszej polowie dziewiętnastego wieku algebra abstrakcyjna. Ale pojawiająca się t w ó r c z o ś ć matematyczna, oceniana bywa krańcowo różnie. Twórczości Cantora nie akceptowali wybitni jego epoki, Kronecker, Poincare, Weierstrass, a nawet Dedekind. Kronecker wręcz twierdził, że matematyka nie potrzebuje ekspansji pojęć.

W matematyce ceni się o d k r y c i a. W swoim czasie Platon twierdził, że pojęcia matematyczne mają byt absolutny, nie od razu nam wiadomy, który - podobnie jak wyspy na Pacyfiku – jedynie odkrywamy. Jesteśmy starsi od Platona o przeszło dwa tysiące lat i nie myślimy tak prosto. Mieliśmy przecież potem Kanta, który ośmielił nas dociekać jak rodziły się owe absolutne byty platońskie.

Autor nie słyszał tego od samego Andrzeja Schinzla, ale przyjmuje przypisywany mu pogląd, ze teoria liczb to penetracja nieznanego świata, a odkrywane twierdzenia to jakby odkrywane nowe lądyu, czy nowe gwiazdy. Nie ma konieczności do wiązania tych odkryć w całości. Nie szukamy związku hipotezy Goldbacha z liczbami bliźniaczymi. Zdarza się to i w innych partiach matematyki. w których pewne odkrycia wydają się mieć ten charakter. Raz można było odkryć lemat Spernera i twierdzenie Morleya.

Analiza matematyczna była odkryciem. Ale nie porównujemy tego z odkrywaniem wysp na Pacyfiku. Droga ku odkryciu calculusu to przeszukiwanie pokładów naszej myśli dla znalezienia punktu zaczepienia dla rozwinięcia właściwych intuicji, a potęm prostowanie błędnych w niej ścieżek. Dopiero po odkryciu właściwego tropu przez scholastyków z Merton College i pierwszej matematyzacji w postaci teorii niepodzielnych, poszukiwania zwieńczone zostały jednym twórczym błyskiem myśli przez Newtona. Nie nazwiemy tego p r o c e s u myślowego jednym słowem, bo był to zarówno prces twórczy jak i odkrywczy. . To, co prowadzi ku odkryciom matematycznym to i n t u i c j a. Jesłi byłaby wrodzona, nie zasługiwała na inne okrślenie niż instynkt. Tymczasem, intuicja jest czymś, co może się rozwijać.

Podobnie poszukiwawczy charakter ma teoria funkcji zmiennej zespolonej, która odkrywa dalekie rejony geometrii, a jednocześnie nadaje im kszałt. Podobny charakter ma topologia, która odkrywa wstęgę Moebiusa, powierzchnię Kleina i kontinua Knastera. Dorzućmy do tego – choć wahaliby się Poincare' i Hermite – osobliwości funkcji rzeczywistych. Matematyka o d k r y w a tu całe p o l a b a d a ń, ale jednocześnie t w o r z y, nadając im kształt matematyczny,

Dlatego, nie stawiamy pytania o to, czy matematka tworzy czy odkrywa. Z większą sympatią patrzymy na odkrycia. Ale ten entuzjazm dla odkryć ma ograniczenia. Matematyka nie jest monolitem. Są niej siły konkutrujące ze sobą. Jest wiele sił niszczących. Widzimy jak niszczy sama siebie. Daleko posunięta arytmetryczności potrafi zniszczyć nawet liczbę.w jej naturalnej postaci. Pojawia się już potrzeba ochrona naszego środowiska przed atakującymi go zbyt ostrymi środkami matematycznymi.

Co do twórczości odczuwamy rezerwę, którą bardziej nrozumiemy. Widzimy w niej żywioł nie znający sygnału "stop". Pozwala rozwijać się sztukom wyzwolonym nawet in vacuum. Wchodząc do matematyki, zapełnia jej czasopisma etiudami.

Nielubiana jest d e d u k c j a jako i mało twórcza i mało odkrywcza. Ale to ona s k l e j a matematykę. Mimo to podziwiany jest kunszt d o w o d u. Majstersztykiem jest dowód twierdzenia o przestawianiu wyrazów w równości proporcji, otwierający drogę twierdzeniu Talesa ku trygonometrii, a innym dowód twierdenia Pitagorasa zdobiący "Elementy". Majstersztykami nsą twierdzenia Kroneckera i Hardy'go – Littlewooda.

Rodzaj tworczości, który pojawia się w dedukcji nie zawsze jest pierwszego gatunku, Dedukcja, która narodziła się w geometrii i pozostawiła w niej po sobie tyle matematycznych klejnotów, pokazuje inne oblicze kiedy zagęszcza detale parazwartości.

Dodajmy też, że dedukcja ma znaczenie jedynie w obrębie ustalonego, określonego dla danego zadania, kontekstu pojęciowego. Przejście od kontekstu arytmetycznego do gemetrycznego odnotowaliśmy jako metaforę wycodzącą poza dedukcję. Nie potrzebuje metafor matematyka kartezjańska, która arytmetyzuje wszelkie pojęcia matematyczne. Pojęcie trójkąta prostokątnego można ująć warunkiem arytmetycznym $a^2 + b^2 = c^2$. a wtedy wspomiana niewspółmierność redukuje się do arytmetycznej niewymierności $\sqrt{2}$. Metafory brak, bo jedna z dyscyplin – geometria – znikła.

Dedukcja nie umie wychodzić poza prawdę, jeśli się już w niej znajdzie. To jej wielka zaleta. Matematyka dedukcyjna również nie potrafi kłamać, Matematycy również. Ale, chociaż mówienie prawdy wymaga odpowiedniego wysiłku, to jednak dopiero formułowanie zdań niepewnych daje nadzieję na rozwój. Tak zwani rasowi matematycy mimo że nie cenią dedukcji, jeszcze bardziej nie cenią twórczości. A przecież to oni pchają naprzód matematykę. Jakim sposobem zatem matematyka się rozwija?

T r u d n o ś c i w e w n ę t r z n e S w i a t a S.

Świat S dozwala, by "myśli myślały się same". Kiedy zostaje sam ze swoimi myślami, nie broni się przed pytaniami, które powstają w wyniku wspomnienej tolerancji. Nie ma zdolności oceniania własnych myśli i w ten sposób wciąga się w sytuacje nieprzewidziane, przed którymi mogłaby nas ostrzec jedynie jedynie jakaś instancja nadrzędna. Upatrujemy ją w naszej m e t a f i z y c z n o ś c i.

Bo sama matematyka nauczy nas j a k mnożyć i j a k dzielić, ale nie nauczy nas k i e d y mnożyć, a k i e d y dzielić – przypomina Bronisław Knaster. Przy wychodzeniu myśli na obce jej pole, jesteśmy zdani na własny rozsądek, to jest na nasz zmysł metafizyczny. Dotyczy to to też metaforycznych przejść z jednej dyscypliny matematycznej do drugiej. Jesteśmy wtedy poza logiką, ale nadal w matematyczności, która potrafi wyjść poza swoje formalizmy ściśle matematyczne i logiczne. .

Myśl deformuje myśl myślaną. Aby tego uniknąć, próbujemy traktować myśli podległące naszemu oglądowi jako zjawiska zewnętrzne. A przecież są one w istocie naszymi myślami. Jak rozpoznać, że zbiór poddany myśli jest zbiorem świata zewnętrznego, czy jest jedynie pomyślany. Nie miała tego kłopotu matematyka liczb i figur, a nawet matematyka calculusu, prowadzona wbudowanymi w nas intuicjami. Nie mamy też kłopotu z arytmetycznościa, ale to dlatego, że jej procedury przechodzą o b o k naszych myśli. Dwie składowe naszego aprioryzmu – liczba traktowana arytmetycznie i zbiory - pełnią niejednakowe role w naszym świecie S.

Myśl błądzi wśrod zdań z udziałem zwrotu w s z y s t k o. Matematyka była długi czas wolna od tych trudności. Nie musieliśmy nigdy myśleć o wszystkich figurach. Ale zetknęli się z tą trudnością filozofowie scholastyczni w dyskusjach o uniwersaliach takich jak praprzyczyna i omnipotencja. Była to burza, która nie sięgała jeszcze wtedy matematyki. Nastąpiło to dopiero wtedy kiedy obiektami matematyki stały się przedmioty naszej twórczości. Nie ma jednak kłopotu, jeśli mówimy o wszystkim w obrębie ustalonego zakresu. Jeśli się tego nie powie, to to w s z y s t k o przestaje być wszystkim, bo można zawsze dołączyć myśl o t y m
w s z y s t k i m.

Znaną tego rodzaju trudnością jest a n t y n o m i a R u s s e l l a. Pomyślmy bowiem w s z y s t k i e zbiory. Tego nie zabraniają znieczuleni na treść przenoszonych przekazów kurierzy świata S. Tak zwana naiwna teoria zbiorów sobie z tym radzi, i nie dopuszcza do rozważąń zbioru wszystkich zbiorów, bo zbiór wszystkich podzbiorów tego zbioru byłby w nim zawarty, a zatem byłby mocy nie większej niż sam ten zbiór, co przeczyłoby akceptowanemu przez tę teorię znanemu twierdzeniu Cantora. Dlatego nie w p r o w d z a do rozważań z b i o r u w s z y s t k i ch z b i o r ó w. , .

Ale znana jest bardziej ogólna argumentacja. Oto zbiór wszystkich zbiorów - ja0 zbiór – byłby elementem samego siebie, Tego rodzaju zbiór powinien być wykluczony ze zrozumiałych racji m e t a f i z y c z n y c h. Cantor już wiele lat wcześniej przeczuwał tę argumentację kiedy rozważał zbiór Ω liczb porządkowych II klasy (tj. liczb porządkowych przeliczalnych). Stwierdził, że jest to zbiór mający nieprzeliczalnie wiele poprzednilków na budowanej przez siebie skali, przez co nie jest żadnym ze swoich elementów, które - interpretowane jako zbiory - są przeliczalne. Usuwał w ten sposób wspomnianą przeszkodę dla wprowadzenia zbioru Ω do rozważań matematycznych.

Świat S ma również trudności dotyczące s a m e g o m y ś l e n i a, Zdanie orzekające, że (*) "zdanie, które wypowiadam, jest kłamstwem" stwarza trudność, jeśli podejmujemy kwestię prawdy tego zdania w znaczeniu k l a s y c z n y m, to jest zgodności treści zdania z rzeczywistością, to jest przypisując zdaniu e t y k i e t ę prawdy w przypadku zgodności, a e t y k i e t ę fałszu w razie niezgodności z rzeczywistośćią. Jest to inne znaczenie prawdy niż to wewnętrzne, którym kieruje się świat S budując swoje koherentne struktury. Trudność, jaką stwarza zdanie (*), znana już Grekom, ma nazwę a n t ny n o m i i   k ł a m c y. Trudnośc uwidacznia się, jęsli zauważymy, że w myśl klasycznego rozumienia prawdy, zdanie (*) jest prawdziwe, jesłi wypowiada zapowiedziane w nim kłanstwo. Trudność jest pozorna, bo dlaczego nie jest dla nas oczywistośćią, że wypowiedziane zdanie jest prawdziwe, jeśli r z e c z y w i ś c i e kłamię. Sprzeczności nie ma, bo konfrontujemy ze sobą rzeczy z róznych światów myśli: etykietę i treść. I chociaż uczył nas Tarski, że zdanie "śnieg pada" jest prawdziwe wtedy kiedy snieg rzeczywiście pada, to jakaś trudność wszakże pozostaje.

Świat S jest świadom, że jego wewnętrzne przeświadczenie o prawdzie nie chroni go od błędu przy konfrontacji z zewnętrzną rzeczywistością. Ale prawda w znaczeniu klasycznym jest – jak widzieliśmy – po prostu zdradliwa, jeśli jesteśmy zbyt logiczni.

Logika towarzyszy matematyczności. Nie jest twórcza. Jej głównym pożytkiem jest to, że jej procedury nie wyprowadzają nas poza prawdę. W istocie, nie są do tego zdolne. Nie mając subtelniejszych rozróżnień niż dwie sytuacje prawdy i fałszu, wprowadza do matematyki pojęcie s p r z e c z n o ś c i, podczas gdy sama matematyka zna jedynie t r u d n o ś c i. W razie , pojawienia się trudności szuka dla nich adaptacji w przebudowanej strukturze pojęć. Dotyczyłoby to i logiki, gdyby można było znaleźć zmysł, któremu jest podporządkowana.

Antynomialność jest immanentną cechą świata S, w której myśl może być myślą o myśli, nie wykluczając, że o samej sobie. Sam fundament matematyki, jakim jest liczba i towarzyszący jej zbiór wyrasta na antynomialności, chociaż liczbie, jak wspominaliśmy, to nie szkodzi. Według Jana Potockiego, w świecie istot żyjących jedynie człowiekowi dana jest zdolność myślenia o własnych myślach. Z tym kłopotliwym prezentem musimy sobie dać radę. Polega to na niezadawaniu pewnych pytań i nieprzyjmowaniu każdej prawdy, nad czym czuwa nasza m e t a f i z y k a. Powinniśmy się zatem n a u c z y ć ż y ć z antynomialnością, która zagląda nam w oczy przy każdym wyjściu poza bezpieczny kontekst danej dyscypliny matematycznej i przy każdym wyjściu w zastosowania. .

Zjawisko antynomialności jest nieuchronne przy kartezjańkim zamknięciu się we własnych myślach. Nie pojawia się ono w d i a l o g u, gdzie antynomialności unikamy, przerzucając myśl o własnej myśli na rozmówcę.

W odbiorze sygnałow od i n n y c h świat S nie ma antynomialnych przeszkód i jest z d o l n y do ich o c e n y, bo ta ocena jest odniesiona do rzeczy zewnętrznej. To, co przejmujey od innych, jest z natury wolne od antynomii. Dlatego, u c z y m y się raczej od i n n y c h niż od siebie. Wiedza przekazywana nam w ten sposób z zewnątrz - i krytycznie odbierana

- jest tym czym karmiony jest nasz świat S przez środowisko. Nawet Konrad Lorenz, wnikliwy obserwator narzuconych nam przez ewolucję uwarunkowań, jest zdania, że to, co nam daje otoczenie cywilizacyjne, jest tym co przeważa w pomnażaniu naszej kultury,

Matematyka byłaby wolna od antynomii, gdyby dialog wystarczał. Tak jednak nie jest. Dialog można zastapić dialogiem wewnętrznym,który można w sobie wykształcić, co jednak jest sztuką przysługującą nielicznym. Na pewno posiadł ją Arystoteles. . Pojęcia matematyki tworzą się w obrębie jednego j a. To u Einsteina wykluła się teoria względności, u Diraca teoria kwantów, u Hilberta obecny kształt teorii mnogośći. Dopiero, kiedy pojęcia się ustalą, kształtują się nadal w dialogu, w którym rozmówcą może być przyroda. Dlatego, nie obawia się antynomialności potocznie rozumiana n a u k a. . .

Antynomialność najbardziej dokucza systemom aksjomatycznym, których natura wymaga myśli indywidualnej. Nie mając innej obrony przed antynomialnością, aksjomatyzacja ucieka się do rozmaitych ograniczeń, . Na przykład do lokowania pojęć we wcześniej znanym systemie. Dzięki temu udało się H i l b e r t o w i zaksjomatyzować geometrię Euklidesa, lokując jej pojęcia w systemie arytmetycznym jako danym.

Hilbert zaproponował wszakże zaksjomatyzowanie wspólne logiki i teorii mnogości wraz z współistniejącą z nią arytmetyką. Tu już nie było szerszego kontekstu, w którym można by to wszystko ulokować. Zadanie wykonał E r n s t Z e r m e l o, który musiał uciec się do cięć w formie pewnych z a k a z ó w Nie dozwala się tworzenia pewnego rodzaju konstrukcji, co uwalnia system aksjomatyczny od znanych antynomii. System ten ogranicza a r b i t r a l n i e nasze myślenie i nie jesteśmy pewni, czy mieści w sobie wsystkie prawdy, o które moglibyśmy pytać. Jest to świat p r z y c i ę t y ad hoc do procedur. Skrępowane wymaganiami systemu obiekty w nim umieszczone - jak wspominane pełne fizycznoścxi continuum - tracą swobodę swego wewnętrznego rozwoju,

S p o j r z e n i e w p r z y s z ł o ś ć

Niestosownym jest pytać o przyszłość matematyki w czasie kiedy na naszych oczach padły największe jej stuletnie problemy, a natężenie potoku rezultatów matematycznych przewyższa wszystko to co w przeszłości. Moglibyśmy też uznać, że matematyka rozwinęła sie już dostatecznie i domaganie się stałego jej rozwoju jest objawem jakiejś obsesji. Dlaczego tak nam na matematyce zależy? Czy na twierdzeniach, które gdy zyskają dowód, zyskują status szacownych przedmiotów kolekcji? Czy chodzi może raczej na utrzymaniu napięcia myślowego, tego niepokoju, który towarzyszy pytaniu matematycznemu. Nepokój matematyczny - jego natężenie - daje nam poczucie żywotności myślowej. Ale, jeśli ktoś nas zapyta o kierunek poszukiwań matematycznych, nie odpowiadamy. Matematyką jest zarówno wielkie twierdzenie Fermata jak i hipoteza Poincare'go. Nie odpowidziałby też Filozof, który według Arystotelesa ma wyręczać matematyków w wyborze drogi. A zatem, jakieś pytanie się pojawia.

Schodzące ze sceny pokolenie, widząc obecny nieukierunkowany rozwój matematyki zapytuje, czy nie może się ona obrócić ku czemuś, czego nie chcielibyśmy widzieć jako matematyczności. Nie znajdujemy w wielu nowych poszukiwaniach tego kolorytu metafizyczności, który towarzyszył dawnym "liczbom i figurom". Patrząc na wiele nowych dyscyplin matematycznych widzimy je jako gorszego gatunku. Oczekiwania nie są tak silne jak dawniej. Nie spodziewa się wiele po matematyce przyrodoznawstwo.

Nauki przyrodnicze też przestały być hojne w problemy. To dzięki nim matematyka rozszerzała się o nowe pola badań i rozwijała sama siebie. Nie zaspakaja tej potrzeby zmatematyzowana krańcowo fizyka, która sięga pełną garścią do gotowych formalizmów, przez co jej problemy są w większości wtórnymi problemami matematycznymi. Niezależny od zawczasu przygowanej matematyki wgląd w mikroświat mógłby poszerzyć matematykę, ale tak się nie dzieje.

Utrzymujące się obecnie natężenie potoku odkryć matematycznych zawdzięczamy całemu, nie do końca wykorzystanemu, zasobowi środków, które znajdują dla siebie pokarm wśród problemów już dawniej postawionych. Nie myślimy, by ten zasób środków i problemów został w ciągu bliskich pokoleń wyczerpany. Ten zamknięty sam wc sobie obszar nazwaliśmy matematyką samolubną. Matematyka zawsze miała swój nurt samolubny, ale obecne jej "liczby i figury" sa odległe od bezpośredniego odczuwania i źródła zmysłowego. Pokłady wzorców, w które matematyka tak dotąd się bogaciła, wyczerpują tak jak wyczerpują się kopaliny. Silny jak dawniej jest trend arytmetyzacyjny. Rozmaitości euklidesowych nie możemy już widzieć bez metryk Riemanna, które im dotąd jedynie towarzyszyły i bez tak zwanej geometryzacji (będącej w istocie arytmetyzacją) w postaci potoków Ricciego. Możnaby zatem zapytać. czy rozstrzygnięta została hipoteza Poincare'go, czy rozwiązany został problem arytmetyczny. Ale problemy są postawione i b l i s k a przyszłość matematyki jest przewidywalna.

D a l e k a przyszłość jednak nie zależy od matematyki. Bardziej może od tego, czy matematycy potrafią odpowiedzieć na pytanie c z e g o od matematyki c h c ą ? Czy chcą zachować splendid isolation wobec nauk? Oto nauki przyrodnicze w swoim szalonym rozwoju występują ze swoich brzegów. Nie liczy na matematykę biologia. Odetnie się wkrótce od wpływów matematycznych fizyka. Więc, czy nie lepiej pozwolić tym naukom na samodzielny byt niż uczestniczyć z nimi – nie oszczęzajmy słów - w zapowiadającym się barbarzyńskim wyścigu po fakty. Spłaciliśmy już dług naukom przyrodniczym.

Jeśli tak, to tym bardziej trzeba zadbać o samą matematykę. Znamy jej słabości i nie chcemy gonić w niej ku każdemu celowi nie podporządkawanemu naszym metafizycznymm oczekiwaniom. I napełniać się prawdami nie mającymi nic więcej do powiedzenia poza tym, że są prawdami. Liczymy na nasze poczucie metafizyczności i na wbudowane w nas w ewolucyjnym rozwolu intuicje, które oceniają również wartość prawd. Oparte na intuicjach oczekiwania uchronią nas przed vacuum, którego bardziej obawiamy się niż sprzeczności.

Autorzy i rozmówcy, na których autor się (nie raz milcząco) powołuje:

Archimedes, Arystoteles, Sir Michael Atiyah, Issac Barrow, Saul Bellow, Bergson, Jan Bernoulli, Bernoulliowie, Andriej Biełyj, Alla Bloom, Bradwardin, L.E.J. Brouwer, Nikołaj Bugajew, Calculatorowie, Georg Cantor, Augustyn Cauchy, Bonaventura Cavalieri, Richard Dedekind, Stanislas Dehaene, Keith Devlin, Ernest Dimnet, Eudoksos, Stanislas Dehanae, Euklides, Leonhard Euler, Filip – student matematyki, Focjusz, Gottlob Frege, Friedrich Gauss, Alfred Gawroński, Kurt Goedel, Andrzej Granas, G. H. Hardy, Charles Hermite, David Hilbert, Jerzy Janik, Karl Jaspers. Joscelin z Soissons, Immanuel Kant, Johannes Kepler, Ojciec Kleofas, Bronisław Knaster, Georg Lakoff, Henri Lebesgue, Andrzej Lelek, Konrad Lorenz, Moses Mendelssohn, Jan Mikusiński, John von Neumann, Izaak Newton, Rafael Nunez, Blaise Pascal, Giuseppe Peano, Pitagorejczycy, Henri Poincare', Jan Potocki, Mojżesz Presburger, Bernhard Riemann, Fredeic Riesz, Bertrand Russell, Henryk Rzewuski (Bejla), Andrzej Schinzel, John R. Searle, Oswald Spengler, G. E. Sziłow (Gieorgij Kaciweli), Tales, Alfred Tarski, Władysław Tatarkiewicz, Teodoros z Kyreny, Eckhart Tolle, Torricelli, Hermann Weyl, Alexander Israel Wittenberg, Ludwig Wittgenstein, Zenon z Elei, Ernst Zermelo.