JERZY MIODUSZEWSKI

Twierdzenie Cantora-Bernsteina – znany dowód zapisany inaczej

Współczesna matematyka dostarcza pojęć, które pozwalają na proste przedstawienie wielu rozumowań, nawet jeżeli nie zmienia się ich istoty. Takim jest jeden z dowodów twierdzenia Cantora-Bernsteina o porównywaniu liczebności zbiorów.

1. Ustalenie znaczenia kilku znanych pojęć. Niech f będzie odwzorowaniem zbioru X w siebie. Dla punktu x tego zbioru rozważmy ciąg

$$x,\ f(x),\ f(f(x)),\ \ldots,\ f^n(x),\ \ldots \tag{1}$$

wartości kolejnych iteracji $f^n(x)$ dla tego punktu. Jeśli odwzorowanie f jest różnowartościowe (co będziemy już do końca zakładać), tj. takie, że z $f(u)=f(v)$ wynika zawsze $u=v$, to możliwe bywa przedłużanie ciągu (1) wstecz, jeśli punkt x jest wartością odwzorowania w jakimś innym punkcie; tego rodzaju punkt może być – wobec różnowartościowości – tylko jeden. Powstaje *orbita* punktu x. Przedłużanie wstecz może się po pewnej liczbie iteracji zakończyć, bo nie zakładamy, że odwzorowanie f jest odwzorowaniem zbioru X *na* siebie.

Są możliwe następujące rodzaje orbit.

Przypadek 1. – orbita mająca *początek*.

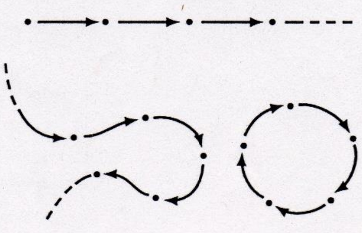
Może się wszakże zdarzyć, że orbita nie ma początku. Wtedy są możliwe dwa przypadki:

Przypadek 2. – orbita zamyka się i jest wtedy skończona – będzie tak, jeśli $f^n(x)=x$ dla pewnego n;

Przypadek 3. – orbita jest w obie strony otwarta będąc w obie strony nieskończona.

Orbity (odwzorowań różnowartościowych) nie mają samoprzecięć i są jako zbiory – rozłączne, jeśli nie są identyczne. Odwzorowanie f przeprowadza każdą z orbit w siebie przesuwając ich punkty o jedną iteratę, z tym że każda z orbit typu 2. i typu 3. przechodzi przy odwzorowaniu f *na* siebie; orbity typu 2. i 3. stanowią zbiory, które nazywamy *niezmienniczymi*.

Wszystkie trzy rodzaje orbit i ich zachowanie przy odwzorowaniu f zilustrowane są na rysunku 1.

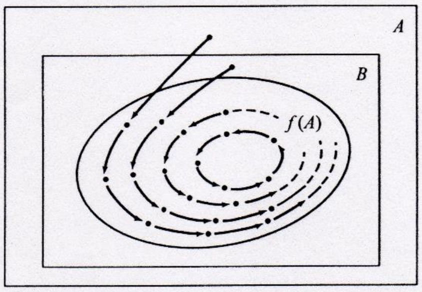


Rys. 1. Orbity odwzorowania różnowartościowego

2. Niech A i B będą dowolnymi zbiorami. Twierdzenie Cantora-Bernsteina orzeka, że *mając odwzorowanie różnowartościowe zbioru A w zbiór B i odwzorowanie różnowartościowe zbioru B w zbiór A, można zbudować odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne między tymi zbiorami*, tj. odwzorowanie różnowartościowe jednego zbioru *na* drugi.

Wystarczy mieć na uwadze sytuację, kiedy jeden ze zbiorów, załóżmy że B, jest zawarty w drugim, $B \subset A$, bo dla prawdziwości twierdzenia jest bez znaczenia, czy rozważamy zbiór B, czy – będący z nim w odpowiedniości wzajemnie jednoznacznej jego obraz zawarty w A. Dlatego twierdzenie wypowiada się prościej: *jeśli $B \subset A$, to mając odwzorowanie różnowartościowe f zbioru A w zbiór B, można zbudować odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne zbioru A na zbiór B.*

D o w ó d. Odwzorowanie f jest (wobec $B \subset A$) odwzorowaniem zbioru A w siebie. Orbity odwzorowania f mające początek poza zbiorem B, poddajmy przesunięciu o jedną pozycję tj. poddajmy odwzorowaniu f. Obraz orbity znajdzie się w ten sposób całkowicie w zbiorze B. Punkty innych orbit – te leżą całe w zbiorze B – pozostawmy na miejscu. Dostajemy odwzorowania o wartościach w zbiorze B, różnowartościowe na każdej orbicie z osobna, a więc – wobec rozłączności orbit – składające się na odwzorowanie różnowartościowe zbioru A, którego obrazem jest zbiór B (bo każdy element B należy do pewnej orbity); p. rysunek 2.



Rys. 2. Odwzorowanie polega na „wepchnięciu" do zbioru B orbit wystających poza B

3. Dowód jest zakończony, ale dla wyrazistości zapiszmy uzyskane odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne A na B – oznaczmy je przez h – w postaci ogólnie przyjętej. Mamy

$$(2) \qquad h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dla punktów } x \text{ na orbitach mających początki poza } B, \\ x & \text{dla pozostałych punktów } x. \end{cases}$$

Odwzorowanie h zostało określone w sposób efektywny przez podanie wzorami jego wartości w punktach, zależnie od tego gdzie te punkty leżą i jakie wartości ma w nich dane odwzorowanie f. Podane określenie poszukiwanego odwzorowania h nie jest jedynym możliwym, np. dla punktów x na orbitach zamkniętych i dla punktów x na orbitach rozciągających się w obie strony, tj. na orbitach typu 2. i 3., można równie dobrze przyjąć $h(x) = x$ jak i $h(x) = f(x)$. Jest tak dlatego, że orbity te leżą całkowicie w B i są zbiorami niezmienniczymi odwzorowania f.

Oznaczmy przez M zbiór punktów x zbioru A leżących na orbitach mających początki poza B. Jest to zbiór, na którym odwzorowanie h dane wzorem (2) jest równe odwzorowaniu f. Jeśli powiększymy zbiór M do zbioru M' przez dodanie do M ilukolwiek orbit spośród tych, które są bądź zamknięte bądź otwarte w obie strony, to – jak zauważyliśmy – odwzorowanie h' równe f na M' i poza tym tożsamościowe jest również odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym zbioru A na B.

Dołączając do M *wszystkie* orbity typów 2. i 3. dostaniemy największy spośród zbiorów M', na którym poszukiwane odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne może być określone jako f. Nie może być ono jednak określone jako równe f na orbitach mających początki w punktach zbioru $B-f(A)$.

4. Mówimy, że zbiory X i Y są *równej mocy*, co zapisujemy symbolem $\overline{\overline{X}}=\overline{\overline{Y}}$, jeśli te zbiory można odwzorować na siebie wzajemnie jednoznacznie. Piszemy $\overline{\overline{X}}\leq\overline{\overline{Y}}$, jeśli zbiór X ma odwzorowanie różnowartościowe w zbiór Y. Z twierdzenia Cantora-Bernsteina wynika, że

(3) $$\overline{\overline{A}}\leq\overline{\overline{B}} \text{ i } \overline{\overline{B}}\leq\overline{\overline{A}} \Rightarrow \overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}.$$

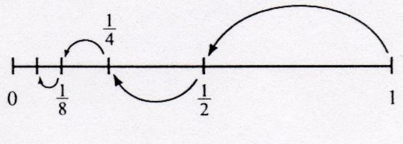
Ten wniosek nie ma pełnej siły twierdzenia, bo (3) orzeka jedynie o *istnieniu* odwzorowania wzajemnie jednoznacznego między A i B, nie mówiąc nic o sposobie jego konstrukcji za pomocą odwzorowań realizujących nierówności. Dla początkujących tak wypowiedziane twierdzenie może być powodem nieporozumień, jeśli symbolowi przypisywać własności zwykłej słabej nierówności.

5. Twierdzenie sformułował Cantor. Pierwszy dowód podał Felix Bernstein (1908). Znane książkowe dowody – por. K. Kuratowski, *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, Warszawa 1962, G. Birkhoff i S. MacLane, *Przegląd algebry współczesnej*, Warszawa 1960, Y. N. Moschovakis, *Notes on set theory*, Springer 1994 i in. – mają swe źródło w dawnych dowodach Bernsteina, Koeniga i Zermeli. Zamieszczony tu dowód jest innym zapisem tych dawnych dowodów, o których można więcej dowiedzieć się w artykule R. Mańki i A. Wojciechowskiej, *O dwóch twierdzeniach Cantora*, Wiadomości Matematyczne 25 (1984), 191–198.

Mimo zwięzłości przedstawionej nowej wersji tych dowodów, nie można twierdzić, że i ta wersja jest pozbawiona elementu niespodzianki. J. E. Littlewood w *A mathematician's miscellany* (~~str. 14~~ wyd. ros., str. 14) pisze o swoistej elegancji rozumowań na zbiorach, w których korzysta się nie z wiedzy lecz z pomysłu, w których wystarczy widzenie zbiorów w oparciu o zdrowy rozsądek. Tego rodzaju rozumowania składają się na dyscyplinę nazywaną *kombinatoryką mnogościową*. Dowód twierdzenia Cantora-Bernsteina może służyć jako wstępny krok do tej dyscypliny.

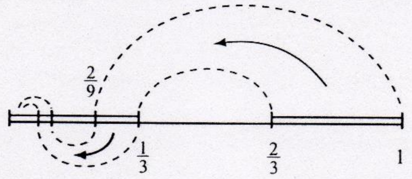
6. Prześledźmy na dwóch prostych przykładach efektywność opisu odwzorowania wzajemnie jednoznacznego między zbiorami A i B danego wzorem (2).

(a) *Odcinek z oboma końcami jest równoliczny z odcinkiem z jednym końcem.* Niech będą to odcinki $A=[0,1]$ i $B=[0,1)$. Mamy $B\subset A$. Weźmy pod uwagę odwzorowanie jednokrotne przeprowadzające odcinek $[0,1]$ na odcinek $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ przez podobieństwo $f(x)=\frac{x}{2}$. Mamy $f(A)\subset B$. Równoliczność między $A=[0,1]$ i $B=[0,1)$ daje – zgodnie ze wzorem (2) – odwzorowanie h, które jest wszędzie tożsamościowe na odcinku $[0,1]$ z wyjątkiem punktów ciągu $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$, będącego orbitą punktu 1, który jest przez odwzorowanie h przesuwany o jedno miejsce; p. rysunek 3.



Rys. 3

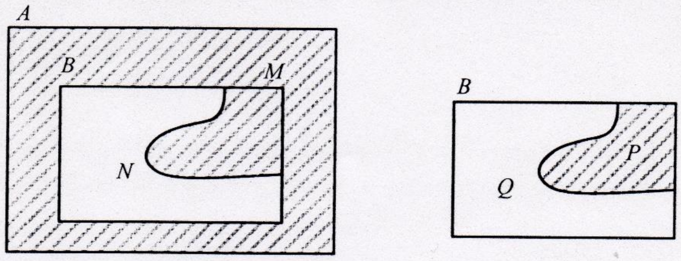
(b) *Odcinek z końcami jest równoliczny z sumą dwu podobnych mu odcinków rozłącznych.* Zreprezentujmy odcinek jako zbiór $A = [0,1]$, a sumę dwu odcinków jako zbiór $B = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Mamy $B \subset A$. Weźmy pod uwagę odwzorowanie różnowartościowe przeprowadzające punkt x prostej w punkt $f(x) = \frac{x}{3}$. Mamy $f(A) \subset B$. Równoliczność między A i B daje – zgodnie ze wzorem (2) – odwzorowanie h, które przeprowadza przez podobieństwo odcinki $\left[\frac{1}{3^{n-1}}, \frac{2}{3^n}\right]$ na odcinki $\left[\frac{1}{3^n}, \frac{2}{3^{n+1}}\right]$, wszędzie poza tym będąc tożsamością; p. rysunek 4.



Rys. 4

Wydaje się, że nie ma prostszych sposobów ustalenia równoliczności zbiorów z przykładów (a) i (b) niż te, które daje wzór (2).

7. Przeprowadzony dowód pozwala na wyciągnięcie wniosku znanego jako *twierdzenie Banacha* (1924), które przy tych samych założeniach co twierdzenie Cantora-Bernsteina dopowiada, że istnieją (wtedy) rozbicia zbioru A na zbiory M i N oraz zbioru B na zbiory P i Q takie, że M jest równoliczne z P i N jest równoliczne z Q. Przeprowadzony dowód (przy nadal utrzymywanej nie ograniczającej ogólności umowie, że $A \subset B$) daje tego rodzaju rozbicie: za zbiór M wystarczy wziąć tak samo dotąd oznaczaną, a mianowicie przez M, sumę orbit odwzorowania f zaczynających się poza B i przyjąć $N = A - B$, $P = f(M)$ i $Q = B - f(M)$. Widzimy, że część M zbioru A przechodzi na część P zbioru B za pomocą odwzorowania f wzajemnie jednoznacznie, a części N i Q są równe (jeśli zauważyć, że $B - f(M) = B - M$).



Rys. 5

Twierdzenie Banacha implikuje w oczywisty sposób twierdzenie Cantora-Bernsteina, które często bywa dowodzone właśnie via twierdzenie Banacha. Nie twierdzimy, że jest na odwrót, bo twierdzenia Banacha nie wyprowadziliśmy z twierdzenia Cantora-Bernsteina, lecz z przesłanek przeprowadzonego dowodu. Twierdzenie Banacha nie jest konieczne dla dowodu twierdzenia Cantora-Bernsteina, chociaż pozwala lepiej uwydatnić jego treść. Dla uzyskania postulowanego w nim rozbicia można równie dobrze posłużyć się zbiorem M jak i którymkolwiek ze zbiorów M' rozważanych w rozdziale 3.

8. Na zbiory niezmiennicze odwzorowania można patrzeć jako na punkty stałe stowarzyszonego z nim odwzorowania wielowartościowego przyporządkowującego zbiorom ich obrazy. Na zbiór M z tezy twierdzenia Banacha można patrzeć jak na punkt stały odwzorowania przyporządkowującego podzbiorowi X zbioru A zbiór $\phi(X) = A - (B - f(X))$. Dla zbioru M przytaczamy sprawdzenie: $\phi(M) = M$, bo $B - f(M) = B - M$, skąd $\phi(M) = A - (B - M) = M$. Podobnie jest dla zbiorów M' wspomnianych w 3. Jakkolwiek interpretacja twierdzenia Banacha jako twierdzenia o punkcie stałym jest spotykana często w literaturze, to nie jest ona konieczna, a już tym bardziej nie jest potrzebne powoływanie się na twierdzenie o *istnieniu* punktów stałych w postaci *lematu Knastera,* który orzeka, że *odwzorowania niemalejące monotoniczne zbioru częściowo uporządkowanego mającego punkt końcowy mają punkty stałe;* przypadek nas tu interesujący to podzbiory zbioru A uporządkowane przez inkluzję i określone na tych podzbiorach odwzorowanie ϕ. W przedstawionym w punkcie 2 dowodzie punkty stałe pojawiły się, ale były otrzymane przez podanie wzoru i jakikolwiek dowód ich istnienia nie jest potrzebny. Znaczenie lematu Knastera polega na innych jego zastosowaniach.

9. Zamieszczony w punkcie 2. dowód twierdzenia Cantora-Bernsteina autor przedstawia od przynajmniej kilkunastu lat na wykładzie „Wstępu do matematyki" na I roku studiów. Przeszło rok temu autor przesłał ten dowód Redakcji *Matematyki*, ale Redakcja znalazła ten rodzaj dowodu u znanego matematyka belgijskiego Papy'ego (*Mathématique moderne. Premier volume. Par Papy avec Frédérique Papy*, Marcel Didier, Editeur, Bruxelles–Paris 1964).

Po pewnym namyśle autor postanowił mimo to upowszechnić ten dowód w przekonaniu, że może się on przydać studiującym. Komentarze następujące po właściwym dowodzie twierdzenia Cantora-Bernsteina nie byłyby konieczne, jeśliby nie to, że wokół tego twierdzenia i jego dowodów narosło z upływem czasu wiele logicznych uwikłań.

20. Powtórzona liczba

Niezwykły trik salonowy możesz przeprowadzić w sposób następujący. Prosisz widza A o zanotowanie jakiejkolwiek liczby trzycyfrowej, a następnie dopisanie tej samej liczby obok tak, by utworzyć liczbę sześciocyfrową (np. 394 394). Następnie odwracasz się tak, aby nie widzieć tej liczby i prosisz osobę A o pokazanie kartki widzowi B, którego prosisz o podzielenie tej liczby przez 7.

„Nie martw się o resztę", mówisz mu, „bo reszty nie będzie". B jest zdziwiony tym, że masz rację, bo rzeczywiście reszty nie ma (np. 394 394 : 7 = 56 342). Bez podawania Ci rezultatu, B przekazuje wynik widzowi C, którego prosisz o podzielenie wyniku przez 11. I znów oznajmiasz, że nie będzie reszty, co okazuje się prawdą (56 342 : 11 = 5 122).

Ciągle odwrócony tyłem, nie znając kolejnych wyników, prosisz widza D o podzielenie ostatniego wyniku przez 13. I znów wynik jest liczbą całkowitą (5122 : 13 = 394). Ten końcowy rezultat jest zapisany na karteczce, którą widz D składa i podaje Tobie. Bez zaglądania przekazujesz ją widzowi A.

„Otwórz ją", mówisz mu, „a znajdziesz na niej swoją trzycyfrową liczbę".

Udowodnij, że ten trik działa zawsze, niezależnie od liczby wybranej przez pierwszego widza.