Jerzy Mioduszewski

M a t e m a t y k a n i e o p i s u j e, l e c z w y c h o d z i ś w i a t u n a p r z e c i w

Pochodne i całki, wzory Eulera w rodzaju $\pi^2/6$, teoria mnogościi. Jedno mogłoby istnieć bez drugiego. To wszystko matematyka. Czy jest jakąś całością? Jest anegdota o Erdosu, który zwierzył się swojemu równie znakomitemu koledze, że nie zrozumiał nigdy teorii Galois. To nie dla ciebie, Paul – usłyszał w odpowiedzi. Dla kogo zatem twierdzenie matematyczne? Na czym nam w nim zależy? Arystoteles uważał, że nie jesteśmy przywiązani do samej treści twierdzenia matematycznego. Równie dobrze przyjmujemy jego negację, o ile okaże się prawdziwa. Pewne obserwacje są za tym, by zgodzić się z Filozofem, ale w wyniku naszych dalszych rozważań dojdziemy i do innych konkluzji, bo może chodzi tu jeszcze o coś innego.

R y t m D n i a P i e r w s z e g o

Lokum matematyki to „ś w i a t S n a s z y c h m y ś l i”. Zwrot pochodzi ze słynnego, chociaż niewielkiego i nie do końca zrozumianego przez matematyków, dzieła Richarda Dedekinda „Was sind und was sollen die Zahlen?” (1888).

Pomyślmy m y ś l - pewien ustalony element wspomnianego świata S. Umysł nie jest w stanie powstrzymać się od „myśli o tej mysli”, a w rezultacie od „potoku myśli”, który jest podobny do p o t o k u l i c z b. Nie od razu Dedekind doszedł do tego wniosku. Poświęcił dziesiątki stronic, aby z owego potoku myśli, wydobyć wspomnianą minimalną nić. Nie wskazywał żadnej konkretnej liczby, lecz r y t m przenikający świat S, który jest n i e s k o ń c z o n y. Po przesunięciu o jedną myśl dostajemy ten sam świat S. Liczba nie jest u Dedekinda wytworem ani czasu rozumianego fizycznie, ani przestrzeni, jak u Kanta. Mogła powstać już w P i e r w s z y m D n i u, już w samej myśli Stwórcy.

Giuseppe Peano dwa lata później zredukował myśl Dedekinda do aksjomatu indukcji w zakresie liczb naturalnych. Dedekind w milczeniu przyjął to uproszczenie.

Doświadczenie myślowe Dedekinda skłania do wniosku, że w naszej myśli mogą powstawać pewne konstrukcje niezależnie od bodźców zewnętrznych. Nasza myśl nie staje wobec świata bezbronna, Napisał gdzieś Max Scheller: żyjemy światu naprzeciw. Narzucamy światu rytm następstwa i widzimy go jako nieskończony, nie zapytując świata, czy życzy sobie takiego jego rozumienia.

Nie było nas w Pierwszym Dniu, a jeśli byliśmy, to bez świadomości, i do świadomości naszej ten pierwotny rytm nie zawitał. Nie znaczy to, by nie odcisnął się w nas w jakiejś pierwotnej formie na naszym świecie S. Dlatego, nie są nam obce pierwsze jego takty jakie były nam wtedy darowane. Czy rytm świata S jest fragmentem czegoś szerszego, tylko się domyślamy.

Jest to rytm następstwa. Ale znamy też kontemplację, kiedy myśl płynie w sposób ciągły, My wszakże wyodrębniamy oddzielne stany i formułujemy oddzielne sądy. Na ich rytmie i następstwie oparte sa nasze czynności logiczne. I chociaż myślenie mogłoby być ciągłe, to nasza jego ekspresja zdaje się wymagać zamknięć w zdania, które są jakby jegp atomami. Atomizm myślowy jest wielką zagadką naszego świata S, jego byc może jakąś niechcianą koniecznością.

Nie panujemy nad pierwotnym rytmem naszych myśli i nie od razu rozpoznajemy jego dla nas znaczenie. Potokowi myśli jakim obdarza nas indukcyjne następstwo nie towarzyszy bezpośrednia refleksja. Jak pisze Andriej Biełyj, inspirowany matematyczną filozofią swego ojca Nikolaja Bugajewa, „myśli same się myślą"', a wspomnijmy jeszcze potok myśli u "Herzoga" Saula Bellowa. Jesteśmy zniewoleni do wchodzenia w ich rytm. Nie umiemy wyłączyć się z ich strumienia, o czym pisał Bergson, oraz w znanej przed laty książce Ernest Dimnet, a powtarza współczesny nam Eckhart Tolle.

N a p r z e c i w   ś w i a t u.

Świat S jest wszakże bogatszy niż to co daje sam rytm indukcji. Jesteśmy dziećmi D n i a S z ó s t e g o. To wtedy dostaliśmy w podarunku ś w i a d o m o ś ć, to znaczy poczucie kierowania sobą, poczucie naszej odrębności wobec tego co nas otacza, a jednocześnie poczucie wspólnoty ze światem.

I dano nam tego Dnia zmysły, które lokują w świecie S całe obrazy świata zewnętrznego. Swiat S nie poprzestaje na ich kontemplacji, ale stwarza środki wychodzące n a p r z e c i w obrazom atakującym jego zmysły. Zastępuje te obrazy właściwą sobie konstrukcją własną. Nie jest przez to biernym odbiorcą wrażeń.

Konstrukcja. jaką świat S obudowuje odbierane obrazy, świat S. nie należy do rzeczy samych w sobie w znaczeniu Kanta. Jest polem wewnętrznym, jakie świat S tworzy w odpowiedzi na atakujące go z zewnątrz zjawiska.   Oto tworzy pojęcie koła, którego formę narzuca „kołom” obecnym w świecie zewnętrznym. Postrzegając te "koła", wchodzi jedynie w te ich aspekty, które są obecne we wzorcowym kole mającym siedzibę w jego wnętrzu, to jest w naszej świadomości. Nie wszystkim obrazom śiwat S potrafi przeciwstawiać wzorce, ale ewolucja polega na wzbogacania ich zakresu.

Wzorce, którymi otacza się świat S stanowią mur obronny przed nieznanym nam zewnętrzem. Chcemy, jak m o n a d a   L e i b n i z a,   być odcięci od wpływów zakłócających nasze wnętrze, Obrazy selekcjonujemy według kierujących nami upodobań. Od siebie nawzajem odbieramy jedynie te sygnały, które przekazują określony rodzaj treści. Nie uczymy się od siebie przelewając sobie nawzajem całe mózgi. Odbieramy jedynie izolowane sygnały wystarczające dla rozbudzenia w monadzie jej wewnętrznego świata.

Jak zauważa niezapamiętany z imienia Filozof – staramy się, by nasz świat wewnętrzny był nieprzystępny dla zewnętrznej - jak pisze - pospolitości. Bo przyjrzyjmy się obudowie monady w postaci pięknej muszli. Dzieło sztuki, aby obronić się przed przetworzeniem w kicz, zaznacza choćby jednym szczegółem – może być to nawet skaza – swoją odmienność od środowiska.

Ale przeciez, tym środowiskiem zewnętrznym się karmimy. Według Arystotelesa, nie ma niczego w naszych myślach co by nie przeszło wcześniej przez zmysły. Myśl pozostawiona samej sobie zawęża się. I chociaż wdrukowany w nas rytm pierwotny sprawia, że nie zawęzi się do końca, to jednak ten rytm nie wzbogaca naszej świadomości.

Zmysły, które zasiedlają świat S, walczą w nim o miejsce dla siebie. Widzimy wśród nich również z m y s ł, którego zadaniem jest tworzenie wspomnianej konstrukcji odpowiadającej doznaniom zmysłowym przychodzącym z zewnątrz. Nazwijmy ten zmysł z m y s ł e m m a t e m a t y c z n y m. Zmysł matematyczny odczuwa przykrość, jeśli dla odbieranego przez siebie spostrzeżenia nie znajduje miejsca w budowanej konstrukcji. Odczuwa zadowolenie, wręcz spełnienie, z wprawnie wykonywanych czynności. Zmysł matematyczny bierze udzial w tworzeniu pojęć i jest tam uwikłany w emocje dostarczane mu przez cały koncert zmysłów. Nie nazwalibyśmy go z m y s ł e m, gdyby nie wracał w swych poszukiwaniach do swych źródeł, ograniczajac się do roli kurirera przenszonych przez siebie komunikatów. Nie pojdziemy więc za Arystotelesem aż tak daleko, by odmawiać zmysłowi matematycznemu zainteresowania treścią przenoszonych prawd. Rozumiemy jednak sceptycyzm Filozofa, jesli przyjrzymy się codzienności do której działanie zmysłu matematycznego bywa ograniczane.

Twórcy matematyki są coraz bardziej skłonni przyjąć, że wyjaśnienie istoty matematyki leży bardziej w rozpoznaniu natury świata S i zmysłów, które go zaludniają, niż w rozpoznaniu treści, które niesie matematyka. John von Neumann w swoich wczesnopowojennych esejach przyznaje, że nie poznawczość, lecz estetyzm – wręcz samolubność – dodajmy od siebie – jest tym, co kieruje matematyką. Hardy wręcz twierdził, że taka właśnie jest natura matematyki. Ukształtowany w innym świecie pojęć Sziłow również twierdzi, że matematyka kieruje się w swym rozwoju własnymi prawami.

Z niepokojem zauważamy, że świat S naszych myśli mógłby się zamknąć w zbudowanym przez siebie gmachu, jeśliby zmysł matematyczny pozostawić samemu sobie. A dodajmy, że samolubność nie jest cechą wyłacznie tego zmysłu.

M e t a f i z y k a   m a t e m a t y k i.

Nasze poznawanie świata poprzedzone jest p r z e k o n a n i a m i, nazwijmy je m e t a f i z y c z n y m i. M e t a f i z y k a to a p r i o r y c z n e przekonania - oczekiwania – ale też i uprzedzenia – wobec tego, co może przyjść z zewnątrz. Jest podarunkiem Dnia Szóstego – ale jako o metafizycznym wypada nam mysleć i o darowanym nam wcześniej rytmie Dnia Piierwszego. Poznanie matematyczne, poprzedzone apriorycznymi przekonaniami, tworzy coś co nazwalibyśmy m a t e m a t y c z n o ś c i ą.

Dla tych pierwotnych wdrukowań i budowanych na nich przekonań świat S poszukuje potwierdzeń, dzięki którym stają się one p r a w d a m i, trwałymi elementami konstrukcji. Kryterium prawdy to wewnętrzna harmonia prawd – s p ó j n o ś ć - będąca wyrazem wzajemnego dopasowania. Nie dopuszczeni jestesmy do wglądu, jak ta harmonia ma się do t r e ś c i prawd, to jest do prawdy w znaczeniu powszechnie przyjętym. Światu S musi wystarczać ich wewnętrzna zgodność. Za zgodność ze światem zewnętrznym odpowiada jako c a ł o ś ć. Dba o tę zgodność ze względu na wewnętrzną potrzebę zachowania swej wiarygodności i przydatności, gotowy, w razie pojawienia się ych trudności, do przebudowy konstrukcji. Nie szuka potwierdzeń w świecie zewnętrznym dla każdego swego "dwa a dwa cztery".

Prawda matematyczna jest ż y w a, jeśli jest obecna w naszej świadomości. Trwa w umyśle dopóki trwa emocja z nią związana. Są przebłyski prawd matematycznych goszczące w umyśle przez chwilę. Słyszało się, że niezapisane w porę dowody powstałe w Kawiarni Szkockiej bezpowrotnie ginęły. Ale, prawdy matematyczne, nawet zapisane, mogłyby nie odżyć, jesliby nie były dłuższy czas aktywnie przeżywane. Mimo to chcemy wierzyć, że są trwałe, a nawet wieczne, w tym znaczeniu, że jeśli przebłysk prawdy matematycznej zechce do nas zawitac po raz drugi, będzie ten sam, co przedtem.

Dopóki zainteresowaniem matematyki były figury geometrii i liczby w swych zjawiskowych indywidualnych postaciach, platoński pogląd na matematykę wydawał się właściwy. Ale wiek dziewiętnasty uwidocznił, jak wiele w matematyce zależy od nas samych. Brouwer na początku XX wieku zwrócił uwagę na wpływ jaki na prawdę matematyczną ma nasza logika. Interwencja logiczna jest interwencją ad hoc, polegającą na zapełnianiu luk myślowych. Te mogłyby pozostać niezamknięte, ale logika – cierpiąc na horror vacui - zamyka je na użytek doraźny w zdania, które w tej postaci są petryfikowane jako prawdy niezmienne. Wiele z nich zawiera prawdy niepotrzebne, z których matematyka, jak każdy organizm, musi się uwalniać.

Logika jest potrzebą naszą, nie świata. Daje motywacje dla zwieńczeń naszych wyobrażeń o świecie. W tak widzianym ujęciu petryfikuje się skrajności świata S, do których on bywa zmuszany okolicznościami, które przy innym na nie spojrzeniu są jak najbardziej efemeryczne. Zwieńczając efektownymi zamknięciami wspomniane otwarte wątki myślowe, uwalnia nas od mierzenia się z pytaniami, odpowiadając na nie za nas. Zdarza się, że ulegamy i korzystamy z wygodnego prezentu.

Chociaż nie wykluczamy, że niektóre z naszych zmysłów i związane z nimi doznania odzwierciadlają sens uniwersalny, to jednak w samym charakterze zmysłu jest efemeryczność i gra. Zmysły nas zwodzą, wciągajac do gry, mając swoje własne w niej cele. Razem tworzą wiecznie ewolującą żywą konstrukcję, którą świat S ustawił naprzeciw światu. W zrozumieniu natury świata S powinna nas wspomóc, jak sądzimy, wiedza o organizmach żywych, ku której z obawą jednak sięgamy, by nie usłyszeć prawdy, z którą sobie nie poradzimy.

Matematyka nie jest tworem jednorodnym. Abstrakty geometrii, takie jak punkt, prosta i koło, mają niemal idealnie jednoznaczne reprezentacje w świecie rzeczy objawiających się nam w postaci punktów, prostych i kół fizycznych. Abstrakcja wydaje się tu wręcz niepotrzebna. Według Mosesa Mendelssohna, punkty, proste i koła, nazywane figurami, po prostu s ą.

A r y t m e t y k a

Inaczej jest z a r y t m e t y k ą i ogólniejszą od niej a r y t m e t y c z n o ś c i ą, której rytm – jak sądzimy - był obecny w świecie już od jego Dnia Pierwszego. Liczba nie istnieje sama. Istnieje, jak pisze Mendelssohn, poprzez swoje w c i e l e n i a w świat przyrody. Jesli istnieje bezpośrednio, to jedynie jako element świata S. Mendelssohn nazywa arytmetykę „inną nauką". co znaczyłoby, że stawia ja poza nauką. Liczba potrafi wcielić się w figurę jako jej aspekt, np. ilościowy, ale może się prezentować jako kolekcja punktów lub figur, to jest jako zbiór elementów. Potrafi się wcielić także w liczbę 5

Bo pewne indywidualne liczby, odbierane są zjawiskowo i pojawiają się niezależnie od rytmu indukcji. Liczby 13 i 7 poznajemy wcześniej niż liczbę 6, która pojawia się nawet później niż biblijne dziesięć tysięcy. Jan Potocki słowami Velasqueza przekonuje nas, że liczby zjawiskowe nieobce są one również naszym braciom mniejszym. Nie jest to wszakże l i c z b a wbudowana w system, którą znamy z doświadczenia myślowego Dedekinda. Tej nie widzimy, nie dotykamy i nie słyszymy. Jest ukryta przed naszymi zmysłami, mimo ze jest w naszych myślach.

Pojedyńcza liczba naturalna nabiera znaczenia, jeśli jest w ś r ó d ogółu liczb systemu. Muszą być obok ime liczby, aby miało znaczenie stwierdzenie, że liczba ta nie ma istotnych dzielników, tj. że jest l i c z b ą . p i e r w s z ą. Jedną z cech liczby jest jej - jedyny możliwy - rozkład na czynniki pierwsze, co określa jej położenie względem liczb pierwszych na mapie systemu. Dodatkowe usytuowania dają liczbie liczne sytuacje matematyczne, o ile dana liczba w nich uczestniczy.

Oto, liczba 17 pojawia się jako liczba boków wielokąta foremnego możliwego do skonstruowania w sposób klasyczny cyrklem i linijką. Gauss dowódł, że nie tylko liczba 17, ale też 257 (i wcześniej, oprócz potęg dwójki, znane liczby 3 i 5) mają tę własnośc. Jest to zjawisko darowane pozasystemowo liczbie 17. Bok siedemnastokąta foremnego wpisanego w koło o promieniu 1 spełnia pewne warunki algebraiczne konieczne dla wspomnianej konstrukcji. Dzięki tej konstrukcji liczba 17 uzyskuje matematyczne w c i e l e n i e, w pewną sytuację geometryczną. To tego rodzaju wcielenia mógł mieć na myśli Moses Mendelssohn. Geometria dostarcza wielu sytuacji dla tego rodzaju wcieleń, dośc porostych dla ticzb takich jak 2, i 3. Ale wspomijmy też trójki pitagorejskie poczynając od (3, 4, 5).

Pewnym liczbom takim jak 2 i 5 wcieleń dostarcza już przyroda. To nasze pięć palców, nie matematyka stworzyła system dziesiętny. Ale system dwunastkowy mógł już być dyktowany samym systemem arytmetycznym, chociaż nie wykluczamy magii związanej z liczbą 12. Liczne przykłady zjawiskowego zaistnienia liczb, mogły prowadzić do przypuszczenia, że jest system, który je jednoczy. Tak chcieli widzieć lczbę Pitagorejczycy.

Zjawiskowa obecność liczb jest czymś innym niż ich obecność w systemie. Do Bernoullich należy twierdzenie, że n jest mniejsze od n-tej potęgi liczby 2 . Nie jest to seria pojedyńczych stwierdzeń, lecz j e d n o twierdzenie, z którego wynika, że nie tylko całość systemu, lecz i jego część złozona z potęg dwójki rozciąga się w nieskończość. Dla dowodu trzeba uruchomić pełny aparat indukcji tkwiący w systemie Dedekinda. Cały rozdział w "Nauce i hipotezie" pośięcił Poincare magicznej dla niego sile indukcji, ale zdarzało mu się naiwnie myśleć o twierdzeniach danych indukcją jako o kolekcji nieskończenie wielu twierdzeń.

Sama liczba nie dba o to, czy reprezentuje fizyczność lub geometryczność, czy istnieje przestrzeń, w której może ukazać swą obecność. Można pomyśleć świat nie mający nic oprócz indukcyjnego rytmu liczby, nie usytuowany w żadnej przestrzeni.

Pojęcie o liczbie mogłoby zamknąć się w sobie. Liczba stara się jednak być obecną w całej matematyce. Czy wspomaga ją w tym rytm pierwotny? A może sama przyroda ma w sobie liczbę? Pytanie należy rozbić na dwa: jedno dotyczy liczb jako zjawisk, drugie dotyczy liczby jako systemu, który wykracza poza te zjawiska. Obserwacja przyrody nie wykłucza obecnośći w niej zjawisk liczbowych, jak też przenikającego przyrodę indukcyjnego rytmu pierwotnego. W obu tych formach liczba pojawia się także w naszym umyśle.

G e o m e t r i a.

Geometria, ta jaką widzimy u Talesa, jest wolna od pojęcia o liczbie. Jest, co widzimy u Euklidesa, fizyką naszego z m y s ł u w i d z e n i a. Ale zaczynamy dodawać do siebie odcinki prostej, a Pitagorejczycy upominają się o ich wspólne miary. Ten prosty sposób na arytmetyzację zawodzi. Niedługo później jednak, Euklides (a może Eudoksos) proponuje algorytm, który odkrywa bogactwo natury arytmetycznej w zakresie niewspółmierności, które za Teajtetem wyrażamy ułamkami łańcuchowymi. Geometria nagle wzbogaca się o metody nieskończonościowe, których sama w swoich początkach się nie spodziewała. Eudoksos, a za nim Archimedes, starają się uchronić geometrię od trudności powstałych na skutek inwazji nowego żywiołu. Ustępuje geometria. Prostej wprawdzie nie zabrania się być nieskończoną, ąle dla zaspokojenia wymagań arytmetyczności każdy jej punkt ma być osiągalny odkładaniem odcinka, nawet jakkolwiek małego. Ustępuje w ten sposób również arytmetyka, rezygnując z pozaskończoności. Dzięki temu rozszerzone prawdy matematyczne nadal pozwalają się lokować w naszej świadomości.

Adaptacja prawd arytmetycznych do świadomości matematycznej ukształtowanej w Dniu Szóstym będzie odtąd stałym problemem matematyki. Znane jest powierdzenie Eulera, że jego ołówek odkrywa rzeczy bez jego w tym udziału.

Platon, który prawdy matematyczne uważał za przedwieczne, musiał mieć na myśli prawdy arytmetyczne. Wchodzą w nasz świat S bez naszej zgody, formując go na swój sposób. Od prawdy arytmetycznej nie ma apelacji, a według powiedzenia Cantora, nie ma w arytmetyce miejsca na hipotezy, to jest na zdania których prawdziwość byłaby zależna od czegoś poza nią.

W geometrii nie jesteśmy biernymi widzami. Geometria i rozwinęta później w oparciu o nią fizyka matematyczna jest naszym konstruktem, dając matematyce prawo do nazywania się n a u k ą. Pojęcia geometrii wspomagają nas w kształtowanie pojęć o przestrzeni, rozważając rozmaite jej warianty. Ale bywa, że uprzedza nas w tym arytmetyka, przez co nasze wyobrażenia o przestrzeni nie są całkiem nasze.

Gotowi bylibyśmy widzieć geometrię po prostu jako matematykę naaszego zmysłu widzenia. Nie idziemy wszakże w tym za daleko. Koło dla Greków było kołem niemal fizycznym. Jeśli jednak zapomnimy o wypełniajacym koło fizycznym płaskim dysku, to zobaczymy w nim linię zamkniętą, po której może coś biec. Istotnym aspektem koła staje się c y k l . A jest jeszcze koło, które może się zawęźlać, a jest też koło, które moze być b r z e g i e m niekoniecznie dysku. Nie miał więc może do końca racji M o s e s M e n d e l s s o h n, bo równiez obiekty geometrii osiągają poziom trwałych wzorców cielających się na wiele sposobów w rozliczne sytuacje jakich doświadcza świat S. Jest też takim wzorcem nie tylko koło, bo również i t r ó j k ą t, chociaż może nie kwadrat.

Przebieg ewolucji pojęć, w końcu zalezny od zdarzeń nieprzewidzianych, nie pozwolił rozwinąć się pojęciom geometrycznym w sposób czysty jako t o p o l o g i c z n e . Nie jest nam jednak obca myśł o istotach żywych, których świat S ukształtowany jest przez zmysł d o t y k u, które nie mają innych pojeć niż topologiczne, którym nieobce jest pojęcie linii zamkniętej i prostej, rozumianej jako przegroda.

Wielkości geometryczne i fizyczne są u swoich źródeł wolne od wpływu liczby. Ale nie licząc sięz ich naturą, liczba się w nie w c i e l a. Wcielając się w dany rodzaj wielkości, liczba naturalna ewoluuje, wzbogacając się o cechy swego nosiciela, którym może być pole, masa czy przebieg czasu, przyjmując odeń na przykład cechę podzielności w nieskończoność, wreszcie i ciągłość. L i c z b a c i ą g ł a ma taki właśnie początek. Wyrasta z dwóch źródeł. Jedno jest już wspomnianym, czysto arytmetycznym, drugie jest czerpane z fizycznych właściwości rzeczy. Można wszakże pomyśleć dwie skrajnośći. Jedno, to bezliczbowe c o n t i n u u m Arystotelesa, nad którym w naszych czasach rozmyślał Hermann Weyl. Spotyka się wszakże pogląd, że pojęcie liczby ciągłej nie wymaga odwołań się do przyrody, że można je wyprowadzić logicznie z właściwośći tkwiących już w systemie liczb naturalnych, w oparciu o pojęcie zbioru. Przyjmując ten drugi pogląd, zgadzamy się na pełną arytmetyzację matematyki.

R u c h i z m i a n a

Matematyka Starożytnych była, jak to określał Arystoteles, nauką o bytach nieruchomych. Było to samoograniczenie wymuszone przez paraliżującą myśl aporię Zenona o strzale, blokującej rozumienie zmiany jako p r o c e s u. Tymczasem, zmiana jest istotą zjawisk fizycznych. Arystoteles poświęcił cały rozdział w "Fizyce" w z r o s t o w i i z a n i k o w i. Ale sytuacje, gdzie obserwujemy zmianę nie mają ze sobą powiązań. Może to być droga narastająca w czasie, nasilenie barwy, czy też tempo przyboru wody w strumieniu.

Ideę ich wspólnego ujęcia matematycznego podjęli filozofowie scholastyczni czternastego wieku. Calculatores z Merton College z Oksfordu i filozofowie z Paryża, wyszli od spostrzeżenia, że to, co bezpośrednio podlega obserwacji w zjawiskach, to nie sama wielkość zmiany, lecz jej i n t e n s y w n o ś ć, która obserwowana w określonym zakresie determinuje zmianę ilościowo. Jednym z przykładów była intensywność łaski Bożej spływajacej na człowieka, która się w nim nagromadza ilościowo, sumarycznie, na sposób, który Newton i Leibniz nazywali później c a ł k ą Jest też intenywność siły wtłaczanej w poruszające się ciało, która determinuje jego i m p e t – a więc prędkość. Jeśli więc s i ł a - a tak jest przy spadku swobodnym - jest niezmienna w czasie, prędkość wzrasta w czasie jednostajnie. Scholastycy zawierzyli wdrukowanemu w nas zmysłowi pozwalającemu nam odczuwać stopień natężenia oddziaływań. Galileusz nie wierzył tej wrodzonej nam intuicji i sprawdzał.

Pełne włączenie tej idei czternastowiecznej w zarysowującą się już konstrukcję matematyczną zawdzięczamy Newtonowi i Leibnizowi, chociaż pominęliśmy prekursorów, Keplera i Torricellego, a przede wszystkim Arystotelesa, bo to na gruncie jego planu powstawał opisywany tu nowy dział matematyki - a n a l i z a m a t e m a t y c z n a – w której Newton widział geometrię Euklidesa, wzbogaconą o naukę o ruchu.

Był to skok w rozwoju, ale – wróćmy do naszej mitologii – skok w obrębie pojęć matematyki Dnia Szóstego. Zauważmy przy tym, że intensywność zmiany ma jakieś podobieństwo do liczbowego rytmu Dnia Pierwszego, jest jakby tego rytmu c i ą g ł y m wypełnieniem. Podobnie jak rytm arytmetyczny, ma zastanawiającą rozmaitość wcieleń, nadając pojęciom matematycznym nowe szybsze tempo rozwoju. Nie trzeba będzie nawet stu lat, aby C a l c u l u s przeszedł w równania struny u Eulera. Często nadal zapominamy, że to właśnie intensywność - wielkość - która była tak trudna do określenia - jest tym, co podlega bezpośrednio obserwacji, a także pomiarowi. Tę prawdę wyraża nam równanie różniczkowe, które z danych związków między intensywnościami obiecuje nam odtworzyć związki między samymi wielkościami, które bezpośredniej obserwacji nie są dostępne.

Rozumienie metod różniczkowych nie zawsze będzie nadążało za rachunkiem. Przyznawał to Euler we wstępie do swojego trzytomowego dzieła, a nie chodziło już tylko o anegdotyczny ołówek. Motywacje analizy wywodzą się z szerszego zakresu niż te, które wystarczały geometrii. Włącza się zmysł poczucia czasu, natężenia siły i poczucia nagromadzania się wielkości, na wiele sposobów wcielając się w matematykę.

Metafizyczność tych motywacji odczuwamy dużo silniej niż w zakresie klasycznych motywacji geometrycznych, których źródło jest niemal bezpośrednie. Motywacje analizy są głęboko w nas ukryte, najczęściej nie są naszymi bezpośrednimi przekonaniami wynikającymi z własnego doświadczenia, lecz zdają się raczej wynikiem w d r u k o w a n i a ich w nas – używając zwrotu Konrada Lorenza – we wczesnych stadiach naszej ewolucji, chociaż może nie chodzi tu o Dzień Pierwszy. Słowacki w „Genesis z ducha” dziękuje mrówce, której doświadczeniem się kieruje.

My to wszystko nazywamy i n t u i c j ą. Na przykładzie intuicji, która doprowadziły do odkrycia Calculusu, widzimy intuicję jako sumaryczne doświadczenie przedmatematyczne, , c a ł k ę z naszych doświadczeń, nie tylko nas samych, lecz całego biegu ewolucji. Bywa, że nie ufamy intuicji, ale Pascal dopowiadał, że to dlatego, że aż nazbyt często bywa bezbłędna. Bo, dodajmy, że nie każde przekonanie powinno być nazwane intuicją.

Matematyka Scholastyków i Newtona, a nie pomińmy Keplera i Cavalleriego, zaczerpnęła jeszcze raz pełną garscią z dostępnego nam zmysłami świata. W swoich początkach była jeszcze wolna od wpływu arytmetycznego. Było to jeszcze wtedy, kiedy Newton formułował prawa dynamiki i poddawał im prawa Keplera rządzące ruchem planet, a nawet jeszcze wtedy, kiedy Jan Bernoulli wyjaśniał problem brachistochrony, a Euler problem struny.

M a t e m a t y c z n o s ć p r z y r o d y

Przyroda pozwala się widzieć matematycznie. Dla przedstawienia problemu, wróćmy do pełnego toku naszych wywodów. Mówiliśmy o świecie S i w budowannej weń konstrukcji pojęc. Nie dzieliliśmy tej kontrukcji na matematyczną i niematematyczną. Dopiero w którymś momencie pojawiła się matematyka, którą zazwyczaj wyodrębnia się spośród ogółu dociekań ś c i s ł o ś c i ą - inaczej, r y g o r e m – cechą wcale dla niej nie najważniejszą. Nierygorystyczne fazy rozumowań sa również matematyką, chociaż woleliśmy je nazwać matematycznością,aby nie wychohodzić poza ustalony zwyczaj. Nie wykluczamy więc, ze wszystko w świecie jest matematyczne, przynajmniej potencjalnie.

Męczył się długo w swoich pismach ku rozumieniu samego siebie Witkacy, aby w końcu stwierdzić, zgadzając się z uczciwymi myslicielami, ze zaistnienie tak zwanych f a k t ó w jest niemozliwe, jesli przedtem nie zostały pomyślane.
Wiedzą to eksperymentatorzy, Matematyczność przedmiotu jest zdeterminowana już samym faktem jego w nas zaistnienia.

Pozostaja wszakże całe obszary zjawisk przyrody, do których z zaawansowaną matematyką matematyką nie zaglądamy. Z geometrią Euklidesa można iść w dowolnie dalekie regiony kosmiczne, uzyskując nadal sensowny opis zjawisk. Ale już Riemann zauwazył, że wiarygodność fizyczna naszej geometrii zatraca się, jeśli przechodzimy ku mikroskali. Naiwne przekonania o symetrii, w jakiej pozostają do siebie nieskończoności i zero, trzeba odrzućić. Riemann dokładnie się nie wypowiadał, ale już w jego czasach budowa punktowa otoczenie zera była uświadomioną trudnością myslową.

Fizyka dwudziestego wieku, wchodząc w mikroświat, doświadczyła tego, co było przeczuciem Riemanna. W mikroświecie nie ma nic do powiedzenia nasza geometria. Matematyka potrafi się tam dostać, ale za pomocą konstrukcji przestrzeni abstrakcyjnych, a więc w istocie za pomocą arytmetyki, która w matematyczności ma pozycję specjalna. Nie uzyskujemy obrazu podlegającego kontroli naszych zmysłów. Wymiar, o jakich mówi się w teoriach kwantowych nie tłuimaczy się na wymiar odbierany zmysłowo. Pewne rzeczy można przybliżać wyobraźni poprzez analogie w stylu Bohra, w istocie poprzez metafory.

To, że jakieś zjawisko pozostaje p o z a naszą matematyką, nie znaczy że jest niematematyczne. Jest po prostu dla nas matematycznie pustą krainą. Na tym m niewielkim fragmencie, który jest nam dostępny, stwierdzenie, że przyroda jest matematyczne, jest nie więcej niż t a u t o l o g i ą.

Pójdźmy jednak krok dalej za tautologicznością tej tautologiii. Przyjmijmy sposób widzenia zafascynowanego Schopenhaueren Witkacego. Świat zewnętrzny zawdzięcza swóją matematyczność, n a m. To m y odgadliśmy kwadrat w prawie ciążenia i jego związek z eliptycznością torów planet. Stwórca nie musiał tego zawczasu widzieć. Nic nie ujmiemy, a nawet przeciwnie, dodamy powagi Stwórcy, jeśli nie bęziemy wymagać od Stwórcy wykonywania za nas rozumowań matematycznych.

M a t e m a t y k a C a u c h y' e g o

Intuicje, które kierowały Calculusem, a które jeszcze wystarczały Eulerowi, zmuszone były w końcu dać się wyręczyć radykalnemu środkowi, jakim była arytmetyzacja analizy dokonana w początkach XIX wieku za sprawą Cauchy'ego. Analiza matematyczna Cauchy'ego jest od samego początku całkowicie arytmetyczna. Prostej nie musi się już widzieć geometrycznie. Prosta ma być teraz systemem liczbowym, a funkcje – dawne fluenty – określone są arytmetycznie punkt po punkcie. Nie musimy widzieć, by liczyć.

Cauchy nie poszerzał matematyki na ten sposób, w jaki kilka wieków wcześniej poszerzył matematykę Calculus, podporządkowując matematyce niedostępne jej dotąd rejony o d c z u w a n i a świata. Matematyka Cauchy'ego nie poszerzała zmysłu matematycznego. Był to nawet ruch wsteczny, wykluczający z analizy pewne jej idee, jeśli nie dawały się poddać idei nadrzędnej, jaką była ś c i s ł o ś ć natury arytmetycznej. Cauchy z r e d u k o w a ł analizę Newtona do pojęcia liczby. Nie był to wszakże powrót do idei pitagorejskiej. Nie wchodzi się dwa razy do tej samej rzeki. Liczba u Cauchy' ego nie była dawną czystą ideą pitagorejską, lecz tworem myślowym, który wszedł do matematyki jako c o n t i n u u m
l i c z b o w e, zbudowane tak, żeby mogło być polem, na którym dawne pojęcia i postulaty Newtona mogły być ukształtowane w teorię i twierdzenia. W niedługim czasie pojawiła się idea zredukowania całej matematyki do kilku prostych zasad, chociaż nie od razu przewidziano na jakiej drodze dojdzie do wielkiej unifikacji. Kronecker uważał, że samo pojęcie liczby należy zostawić takie, jakim było. Protestował, widząc próby szukania unifikacji w pojęciach bardziej pierwotnych.

W matematyce Cauchy'ego funkcja przestawała być prawem zależności. Nie było przeszkód dla określania funkcji punkt po punkcie, co pomijało ukształtowane dotąd intuicje, chociaż dowierzano funkcjom zadawanym dowolnym ruchem ręki, a więc c i ą g ł y m z samej swojej natury. Okazało się wszakże, że ciągłość nie wnika w pełni we wszystkie aspekty intensywniości procesów. Ciągłość nie zapewnia istnienia pochodnej, a całka nie zawsze jest zdolna do odtworzenia funkcji z istniejącej wszędzie pochodnej. Okazało się, że to przekonanie Calculatorów i Newtona ma jakieś wyjątki. Cała druga połowa dziewiętnastego wieku i wiek dwudziesty w matematyce to koncert frapujących wyjątków, jakie zaczęła dostarczać pozbawiona dawnych ograniczeń zarytmetyzowana matematyka.

Odczuwamy nostalgię za matematyką Dnia Szóstego, ale nie wydaje się, by mogła ona poddać swojemu oglądowi cały rytm Dnia Pierwszego. W świecie Dnia Szóstego zjawiska mają charakter jakościowy i objawiają się n i e r ó w n o ś c i a m i. Równościom pozostawiony jest status wątpliwych co do zaistnienia stanów granicznych. Arytmetyczność to koncert r ó w n o ś c i, t o ż s a m o ś c i i r ó w n a ń, a więc samych osobliwośIci z punktu widzenia świata Dnia Szóstego. Doznania redukują się do dwóch watości logicznych, otwierając jednocześnie furtkę ku dwuwartościowej kombinatorycznej eksplozji.

Hermite i Poincare sprzeciwiali się tej inwazjii osobliwości, ale też i odcięciu matematyki od jej źródeł przyrodniczych, z których matematyka już nie wyrastała, lecz do których jedynie mogła w r a c a ć poprzez z a s t o s o w a n i a - pojęcie dawniej nieznane.

P o s z e r z e n i e i n t u i c j i.

Okazało się jednak, że nasza wyobraźnia potrafi rozbudować się i adaptować wspomniane osobliwości. Potrafiliśmy rozszerzyć nasz zmysł matematyczny, wbudowując zarytmetyzowaną analizę w naszą świadomość. Zdolność naszej świadomości do adaptacji w sytuacjach daleko odbiegających od doświadczeń zmysłowych okazała się większa niż ta, którą widzieli wielcy sceptycy. Mimo że nie obserwujemy funkcji Cantora – Lebesgue'a w zjawiskach przyrody, to jednak umiemy ją umiescić nie tylko w naszym świecie S, ale potrafimy sobie wyobrazić pewne stany graniczne zjawisk przyrody, w których ta funkcja się pojawia się już nie jako osobliwość, lecz jako stan graniczny idealny.

Przykład zarytmetyzowanej matematyki stawia przed nami pytanie o to, jak daleko świat S naszych myśli może pójść w adaptacji osobliwości arytmetycznych, wbudowując odpowiednią w nas odpowiednią zmysłowosc juz ściśle matematyczną. Wydaje się, że ta zdolność adaptacyjna jest daleka od wyczerpania pod warunkiem wszakże, by nie naruszone były p r a w a jakimi świat S się rządzi. Dowód komputerowy twierdzenia o czterech barwach nie spełnia tego warunku. Świat S nie pozwala się wyręczać w potwierdzaniu nie wypracowanych przez siebie prawd. Akceptacja prawdy jest w jego gestii i żaden dowód, który nie angażaował emocjonalnie świata S, nie może być przed świat S uznany. Dano to kiedyś do zrozumienia Galileuszowi, który zważył pole pod cykloidą i mimo że wynik był prawidłowy, nie zaistniał w matematyce.

Z b i ó r i l i c z b a

Związek liczby ze zbiorem jest tak oczywisty, że nie powinno się zaczynać od Gaussa. Ale od Gaussa wywodzi sie widzenie tego związku inaczej. Liczby zespolone, pary liczb rzeczywistych, tworzą z b i ó r. Zbiór nie jest u Gaussa pojęciem, lecz jedynie wygodą słowną, ale z uwagi na obecnośc i formę działań określonych na parach zbiór staje się s y s t e m em z określoną s t r u k t u r ą, co dawało inne widzenie dawniej znanej rzeczy. Jeśli jednak ograniczyć się jedynie do par liczb całkowitych, to po rozszerzeniu na te pary pojęć podzielności, powstawał system liczbowy inny niż znany system lich całkowitych., a więc coś, co było już matematyczną nowością.

Dla Dedekinda – ucznia Gaussa i twórcy algebry abstrakcyjnej - nie było już wątpliwości, że na zbiory można patrzeć jako na tworzywo dla abstrakcyjnego pojęcia rozmaitych wariantów liczby.

Samo pojęcie zbioru nie ma wyraźnego wbudowania w naszą zmysłowość. Zaspakaja ja raczej jakąś nsszą potrzebę czysto myślową o wielości, i jak się zdaje było zauważone w trakcie rozmyślań filozofów wcześniej niż w działaniach praktyków. Nie było przez długi czas potrzebą matematyki. Odczuwamy świat zbiorów bardziej jako uosobienie przedwiecznego chaosu, niż jako cos co prezentuje jakiś wzorzec.

I n k l u z j a zbiorów jest bardziej odczuwalna zmysłowo niż wyeksponowane przez Cantora n a l e ż e n i e. Przeglądając algebraiczne poczatki idei mnogościowej u Dedekinda, wydaje się, że pojęcie inkluzji, bardziej związane ze s t r u k t u r ą ziborów, było u niego dominujące. E l e m e n t i n a l e ż e n i e elementu do zbioru gotowiśmy widzieć raczej jako potrzebę wtórną, która pojawia się w naszym rozwoju późno, a właściwie pojawiła się dopiero teraz. Słabe wdrukowane w naszą zmysłowość pojęcia należenia nakazuje nam wobec tego pojęcia, i opartego wyącznie na tym pojęciu idei zbioru, określony sceptycyzm.

Wobec swej nieokreśloności, zbiory wciskają się w materię matematyczną nieraz podstępnie bardzo daleko, a wchodząc w nieswoje role, mylą inne nasze zmysły. Jak pisze A l e x a n d e r W i t t e n b e r g w pełnej gruntownych przemyśleń książce, zbiory nie pojawiają się nigdy w formie czystej, widzimy je – a podobnie Moses Mendelssohn widział liczby - w rozlicznych i dalekich od siebie wcieleniach. Nawet najprostsze wcielenie, jakim jest zbiór liczb naturalnych, nie jest zbiorem czystym. Jest nam dane wraz z całą swoją dynamiką rytmu pierwotnego. Jest w tym pewien paradoks, Bo chcielibyśmy widzieć zbiory jako tworzywo liczby. Tymczasem, jedynymi konkretnymi czysto myślowymi przykładami zbiorów są zbiór naturalnych i jego odcinki początkowe, a więc systemy liczbowe.

Widzimy to również w systemie Gaussa liczb całkowitych zespolonych. Nie zbiór, lecz jego dynamiczna algebraiczna struktura, jest tym, co ten system tworzy. Uwidacznia sie to w sposób najbardziej widoczny u Dedekinda w systemie indukcyjnym liczb naturalnch z "Was sind und was sollen die Zahlen?". Nie elementy systemu, które nazywamy liczbami, lecz system wydaje się istotą liczby, to jest l i c z b o w o ś c i.

To właśnie liczbowość kierowała Cantorem, kiedy będąc na kroku ω stawiał kroki $\omega + 1$, $\omega + 2$ i dalsze. Ale, czy były one witane były z radością przez jego świadomość, czy był to przymus myślowy, któremu się poddawał? Z tego, co możemy wyczytać z jego Memoire Nr 5, była to radość wymuszona. Po przekroczeniu progu nieskończoności nie odczuwamy spodziewanego poczucia poetyczności. Skala liczb porządkowych jest w swoicj początkowych partiach, po wyjściu poza liczby naturalne, szara. Dopiero w dużej skali ujawnia echo znanego wczesnie rytmu pierwotnego, a mianowicie następstwo i niemożliwość powiedzenia s t o p. Sama struktura naszego myślenia daje nam w podarunku porządek, który nazwany jest d o b r y m . Porządki zwykłe nasza myśl musi sama wypracować.

Frege proponował rozumieć liczbę jako abstrakt powstały po utożsamieniu w s z y s t k i c h zbiorów tej samej liczności. Russell wskazał na niewykonalność tego zamiaru z powodu trudności związanych z pojęciem o zbiorze wszystkich zbiorów. Cantor był innego zdania. Widział liczby jako a l e f y - to jest jako pewne wyróżnione elementy swojej skali liczb porządkowych. Abstrakcja Fregego jest zbęna, skoro dla abstraktów mamy zawczasu gotowych reprezentantów.

Z b i o r y s ą w s z ę d z i e. Taki zwrot moąna znaleźć w książce A n d r z e j a L e l k a "Zbiory". Rozumiane to jest tak, że są budulcem materialnym, który znajdziemy wszędzie dla budowy obiektów geometrycznych, ale też i c o n t i n u u m oraz zjawiskowo traktowanej liczby. Dodajmy wszakże ze i ta skromna rola zbioru była – i jest dotad - poddawana dyskusji. Arystoteles nie pozwalał na widzenie figur jako zbioru punktów. Z tym poglądem na przestrzen i czas mierzył się Zenon z Elei. Widzimy nadał w tym trudność, nie odmawiając jednak tej trudności sensowności, budując w wiadomym trudzie – za Dedekindem i Cantorem, a wbrew Arystotelesowi - wspomniane continuum liczb ciągłych. Pojęcie zbioru ma charakter służebny. Zbiory pozwalają nam widzieć obiekty myślowe materialnie, nie zawsze jednk zgodnie z prostymi oczekiwaniami.

Cantora zaskoczyło odkrycie, że płaszczyzna ma tyle samo punktów co prosta, i trzeba było dopiero doświadczonego Dedekinda, aby widzieć, że nie obala to niczego, co naruszałony nasze wyobrażenia o wymiarze. Opisowe pojęcia mnogościowe idą o b o k głównego trzonu naszej zmysłowości. Fibonacci nie spostrzegł, że jego liczb jest „tyle samo” co wszystkich liczb naturalnych. Dopiero kilka stuleci później Galileusz zdobył się na poczynienie tego rodzaju uwagi. Nie wydaje się też, by zbiory - jako przedmioty - odzwierciadlały właściwości świata S naszych myśli, omijając całą jego dynamikę. Odwzorowanie f traci w teorii Cantora charakter nawet przyporządkowania, objawiając się już tylko jako zbiór par (x, f(x)). Należenie i zawieranie, do których ograniczają pojęcia o zbiorach, są sytuacjami o p i s o w y m i nie angażującymi zmysłu matematycznego rozpoznawanego w rytmie pierwotnym z „Was sind und was sollen die Zahlen?”.

D o b r y p o r z ą d e k

Profesor Mikusiński chciał się koniecznie sam przekonać, że lemat Zorna można wyprowadzić nie używając liczb pozaskończonych, i podał ładny tego dowód. Budował w tym celu w danym zbiorze częsciowo uporzadkowanym łańcuch nieprzedłużalny przy pomocy samego tylko pewnika wyboru. Lubił przypominać ten swój dowód, ale za którymś razem można było usłyszeć uwagę: chciałem ominąć liczby porządkowe, ale kiedy budowałem łańcuch nieprzedłużalny, ten – mimo, że wcale tego nie chciałem - okazał się dobrze uporządkowany.

Podziwia się Cantora za jego konstrucję skali dobrze uporzadkowanej, Ale nietrudna obserwacja przekonuje nas, że ten dobry porzadek tworzył się - i ua niego – s a m. Wcześniej niż Cantor przekonał nas w "Was sind und was sollen die Zahlen?" o apriorycznym wbudowaniu w nas dobrego uporządkowania Dedekind. Mając myśl, nie potrfimy uwolnić się od myśli o tej myśli i wpadamy w przymus iteracji, w indukcyjnie dynamiczny system liczb naturalnych.

Uważa się dobry porządek to wymaganie dodatkowe. Nic błędniejszego! Znaczyłoby to bowiem, że dla uzyskania dobrego porządku wystarczyłoby najpierw mieć porzadek j a k i k o l w i e k, a potem go poprawić. Tymczasem, nie umiemy zrobić tego jakiegokolwiek porządku samą konstrukcją myślową.

Continuum, które punktami wypełnia prostą, budujemy mając wcześniej podpowiedź od przyrody. Zgodziłby sięz tym Hermann Weyl. Ten o naturze fizycznej pręt n i e j e s t tworem arytmetycznym. Arytmetycznie budujemy tylko jego pewną egzemlifikację.

Wymaganie zwykłego liniowego porzadku jest logicznie słabsze, ale matematyka, ta apriorycznie w nas wbudowana, nie obdarzyła nas żadnym przykładem, Ogólniejsza podobną sytuacją jest pomyślenia d o w o l n e g o zbioru bez odwoływania się do żądnych zmysłowych spostrzeżen. Alexander Wittenberg spostregł, że nie widzi innych przykłsdów poza systemem liczb naturalnylch i jego odcinkami poczatkowymi. Dorzucmy od siebie dalsze liczby porzadkowe Cantora.

Nie mamy innych apriorycznie wbudowanych w nas zbiorów niż wspomniane zbiory l i c z b, które w istocie są liczbami. Nie zwracają na ten paradoks twórcy teorii mnogości.

Matematyka aprioryczna w nas wbudowana jest matematyką a r y t m e t y c z n ą. Ten n i e n a s z rdzeń jest s o l ą naszej matematyki. Ale, jej k w i a t e m jest matematyka s ł a b a, ta, która musimy myślowo sami wypracować. Jej przykładem są kontemplacyjne zasady geometrii i calculusu. Ta matematyka, karmiona postrzeżenimi idącymi od świata zewnętrznego, tworzona jest przy pełnym udziale naszej świadomości, Wydaje się, że mogłaby zaistnieć bez udziału arytmetyki. Można też pomyśleć matematykę czysto arytmetyczną. Myśląc o naturze matematyki, powinno się brać pod uwagę te dwie skrajności, wcale realne.

I d e a i z a k r e s

Mówimy o tym czy innym człowieku, ale coś innego znaczy samo słowo c z ł o w i e k. Czymś innym jest p i ę ć, a czymś innym pięć jabłek. Pojęcie ogólne w c i e l a się w indywidualne sytuacje. Ale powiedzieć tak możemy dopiero wtedy, kiedy pojęcie już zaistniało. Nie dane jest nam widzieć jak powstaje. Pojawia się s k o k i e m.

Jednym skokiem myśli pojawia się matematyczne pojęcie k o ł a, które potem wciela się w koła mniej lub bardziej godne tej nazwy. Mimo że to akurat pojęcie uważamy za własne, nie wiemy jakim prawem w nas zakiełkowało. Świat S nie jest skłonny do dopuszczania nas do wszystkich swoich sekretów.

Wyjściem z trudnej sytuacji miało być – według J o s c e l i n a z S o i s s o n s, filozofa scholastycznego z XIII wieku - zmaterializowanie niewytłumaczalnych myślowo u n i w e r s a l i ó w, widząc w nich z a k r e s y obejmujące indywidua mające wyrażane przez te uniwersalia własności. Pisze o tym Władysław Tatarkiewicz w swojej „Historii filozofii”. Oddaje to aspekt o p i s o w y uniwersalium, odsuwając na dalszy plan problem rozumienia natury a k t u, który je do tego istnienia powołuje, pomija trud zrozumienia jak z w i e l o s c i powstaje nowa j e d n o ś ć.

Ta sytuacja przeszła na współczesną teorię i mnogości. Pojęcie z b i o r u występuje w niej w dwóch znaczeniach - jako traktowany materialnie z a k r e s i jako i d e a - jedność prezentująca uniwersalium. Idea implikuje zakres, ale matrialnemu zakresowi – w i e l o ś c i - nie zawsze daje się przypisać ideę, z czym mocowali się scholastycy po obu stronach linii dzielącej Wschód i Zachód. Słowo „zbiór” obsługuje oba te aspekty. Język matematyczny nie był przygotowany na potrzebę tego rozróżnienia. Nie kazdemu z b o r o w i s k u potrafimy – a nie zawsze też i chcemy – przypisać ideę to zborowisko określajace.

Majac dwa zbiory uświadamiane pojęciowo, nie zawsze umiemy dopatrzeć się idei w sumie tyich zbiorów.

Zbiór - jako zakres – może być – i jest - traktowany jako przedmiot matematyki, tworząc dyscyplinę matematyczną, którą nazwano "naiwną teooria mnogości". Sama nazwa jest dziiwolągiem językowym, niepotrzebnie umniejszającym w pełni ukształtowaną dyscyplinę. Inaczej jest ze zbiorem jako ideą. Ta pojawia się skokiem myslowym jako uniwersalium matematyczne. Dlatego, problem z b i o r u j a k o i d e i nie da się oddzielić od pytania o n a t u r ę s a m e j m a t e m a t y k i. Pojawienie się pojęcia zbioru jako idei nie daje się wytłumaczyć na sposób, którym tłumaczyliśmy pojawianie się pojęcia koła. Nie istnieje zmysł, który by wymuszał na nas to pojęcie. Chyba że za ten zmysł uznamy umiejscowione świecie S czyste potrzeby naszej myśli. Ale wtedy jesteśmy w sytuacji interwencji świata S w pojęcia, które sam stwarza.

Sięgając po pojęcie zbioru jako idei, dotykamy samych podstaw naszego myślenia. Zwrot dokonał się w okresie największego rozkwitu matematyki, a przecież sięganie do podstaw miewa zazwyczaj przyczynę w przeczuciu jakiegoś regresu. Chociaż może się to wiązać z poczuciem wypełnienia zadania, co daje prawo do spojrzenia wstecz. Sytuacjom w których kierujemy spojrzenie ku samym sobie nie towarzyszy radość. Może także i to sprawia, że już przy pierwszym praktycznym zetknięciu się ze zbiorami jako ostrzeżenie odczuwamy brak wobec nich oczekiwań. To się potwierdza. Chcąc wyjaśnić c o ś za pomoca pojęcia zbioru, zmuszeni jesteśmy majpierw objaśniać samych siebie.

Wiek dziewiętnasty to wiek wielkich teorii, ale poza wspomnianym koncertem paradoksalnych konstrukcji w teorii funkcji, nie widać w nim dawnej keplerowskiej i eulerowskiej świeżości. Nowe gałęzie matematyki rozwijają dla jakby dla wypełnienia powinności zwieńczania swoich dokonań w teorie, a poprzez pojawiające się z a m y s ł y a k s j o m a t y z a c y j n e, odchodzą od zadania poszerzania nowych zasobów wyobraźni. Rozwój odbywa się za sprawą motywacji wewnętrznych. Jest to coraz rzadziej ofensywność poznawcza.

Opisowy charakter teorii mnogości jest po prostu jej cechą, a więc nie na miejscu byłby zarzut. Twierdzi się, że każdą rzecz matematyczną można o p i s a ć w języku zbiorów. Ale jeśli chodzi o siłę twórczą, to nie znamy pojęć, które w e s z ł y b y do matematyki motywowane samym zmysłem należenia elementu do zbioru.

T r u d n o ś c i w e w n ę t r z n e ś w i a t a S.

Świat S dozwala, by "myśli myślały sie same". Kiedy zostaje sam ze swoimi myślami, nie umie bronić się przed pytaniami, które pod jakimś wewnętrznym przymusem sam sobie stawia, co których nie potrafi się określić. Jesteśmy wciągani w sytuacje a n t y n o m i a l n e, przed czym matematyka świata S nie potrafi nas z a w c z a s u przestrzec.

Trudnością są zdania z udziałłem zwrotu w s z y s t k o. Z tą trudnością zetknęli się filozofowie schoalystyczni w dyskusjach o uniwersaliach takich jak praprzyczyna i omnipotencja. Ale była to burza, która nie sięgała jeszcze matematyki. To nastapiło dopiero w ostatnich stu latach. Nie ma kłopotu, jeśli mówimy o wszystkim w obrębie ustalonego zakresu, to jest o w s z y s t k i m w ś r ó d.

Zacznijmy od najbardziej znanej trudności, znanej jako a n t y n o m i a R u s s e l l a. Pomyślmy w s z y s t k i e zbiory. Tego nie zabrania nieczuły na treść świat S. Pojęcia takie jak w s z y s t k o i n i c są pozazmysłowe, w każdym razie nie znamy zmysłu, który by je odczuwał, a pojęcie z b i o r u nie angażuje w tym zwrocie niczego poza przyzwoleniem językowym.

Jesli wszytkie zbiory miałyby tworzyc zbiór w sensie formalnym teorii zbiorów, to zbiór wszystkich podzbiorów tego zbioru byłby w nim zawarty, a zatem byłby mocy nie większej niż sam ten zbiór, co przeczyłoby akceptowanemu przez teorię znanemu twierdzeniu Cantora. Dlatego z b i o r u w s z y s t k i ch z b i o r ó w nie w p r o w d z a m y do rozważań teorii mnogości, korzystając ze s w o b o d y w tworzeniu pojęć, jaką daje nam matematyka. Było to stanowisko Cantora, jakie przeciwstawił Hilbertowi, który dopatrzył się w pojęciu zbioru wszystkich zbiorów sprzeczności, nie widząc sposobu na usunięcie go poza obręb rozważań, skazując teorię mnogości na obrócenie się w system aksjomatyczny usuwający trudnoąsci sobie znanymi sposobami..

Trudnością w rozumieniu zbioru wszystkich zbiorów jest również to, ze zbiór ten byłby elementem samego siebie, Tego rodzaju zbiór powinien być wykluczony z rozważań juz z zasadniczych racji metafizycznych. Cantor już wiele lat wcześniej widział podobną trudność tworząc zbiór Ω liczb porządkowych II klasy (tj. liczb porządkowych przeliczalnych). Ale, zauważył że jest to zbiór mający nieprzeliczalnie wiele poprzednilków na budowanej przez siebie skali, przez co nie jest żadnym ze swoich elementów, które - interpretowane jak o zbiory - są przeliczalne. Trudność powodowana tym, że zbiór Ω mógłby być własnym elementem, została zatem z a w c z a s u przez Cantora usunięta, przez co znikała przeszkoda wprowadzenia tego zbioru do rozważań matematycznych.

Cantor nie uważał, by należało czekać biernie na trudności powstające w wyniku nadużycia językowego, które prowadzi do widzenia zbioru wszystkich zbiorów w roli swojego własnego elementu. Wchodząc w metafizykę pojęcia, zauważył, że pojęcie nie spełnia ono warunków koniecznych dla nazwania go zbiorem.

Świat S ma również trudności dotyczące s a m e g o m y ś l e n i a, Myśl może myśleć o sobie. Zdanie orzekające "k ł a m i ę" stwarza trudność, jeśli podejmujemy kwestię p r a w d y tego zdania, kiedy zdaniu przypisujemy etykietę prawdziwości w przypadku zgodność treści zdania z rzeczywistością, a etykietę fałszu w razie niezgodności. Zatem, jeśli r z e c z y w i ś c i e kłamię, to zdanie "kłamię" opatruję e t y k i e t ą prawdy; podobnie, jeśli rzeczywiśćie mówię prawdę, to opatruję to zdanie etykietą fałszu. W żadnym z obu przypadków sprzeczności nie ma, bo konfrontuje się ze sobą rzeczy z róznych światów.

Nie mając możliwości zaglądania w rzeczywistość, świat S nie zna pojęcia prawdy jako z g o d n o ś c i z r z e c z y w i s t o ś ci ą i musi poprzestać na zgodności wewnętrznej swoich prawd. Jest świadom wszakże groźby błędu. W razie błędu odpowiedź świata zewnętrznego przyjdzie sama bez konieczności zadawania pytania. Świat S jest przygotowany przyjąć odpowiedzialność z b i o r o w ą za złe funkcjonowanie.

Logika jest najsłabszym punktem matematyczności. Jej obecność w rozumowaniach matematycznych jest najbardziej widoczna kiedy dotyczy pojęć słabo motywowanych intuicjami. Możnaby też powiedzieć, że jest polem niebezpieczeństw. To logika wprowadza do matematyki pojęcie s p r z e c z n o ś c i. Sama matematyka zna jedynie t r u d n o ś c i. Opiera się na intuicjach, a te, jeśli na ich drodze pojawiaja się trudności, szuka dla nich adaptacji w przebudowanej strukturze pojęć. Dotyczyłoby to i logiki, gdyby można było znaleźć zmysł, dzięki któremu jest nam podporządkowana i pozwala jąsensownie kształtowac. Jedynie rytm pierwotny mógłby być postawiony w tej roli, ale nie panujemy nad nim.

Antynomialność jest immanentną cechą świata S, w której myśl może być myślą o myśli, nie wykluczając, że o samej sobie. Wiemy, że już sam fundament matematyki, jakim jest liczba, wyrasta - co zauważył Dedekind - na antynomialności, Według wspomnianego już wcześniej Velasqueza – w świecie istot żyjących jedynie człowiekowi dana jest zdolność myślenia o własnych myslach. Z tym kłopotliwym prezentem musimy sobie radzić. W praktyce matematycznej, podobnie jak i w życiu codziennym, polega to na niezadawaniu pewnych pytań, niewypowiadaniem każdej prawdy, nad czym powinna czuwać nasza m e t a f i z y k a..

Pomyślano jednak, że w zkresie zbiorów i logiki można nie trudzić metafizyki - a stało się tak za sprawą D a v i d a H i l b e r t a. Ograniczono zakres pojęć, zamykając je – co zrobił E r n s t Z e r m e l o - w system aksjomatyczny wolny od znanych antynomii, poprzez z a k a z y tworzenia pewnego rodzaju konstrukcji. Jednakże, jak później wykazał Goedel, każdy dostatecznie duży system aksjomatyczny albo zawiera twierdzenia sprzeczne, a jeśli nie, to nie mieści w sobie wszystkich prawd, które potrafi wypowiedzieć. W zwrocie "nie mieści w sobie" nie chodzi o zwykłe "zawieranie się", lcz o możliwośc d o t a r c i a do tezy procedurą formalną. Twierdzenie Goedla jest twierdzeniem dotyczącym

nie naszego myslenia, i nawet nie konstrucji, jaką świat S zbudował w celu gromadzenia doznań matematycznych, lecz o słabości procedur formalnych, nie dorównujących naszym możliwościom tworzenia sytuacji marematycznych.
.
Uniwersum U zbiorów, tworzone przez Zermelę wokół skali liczb porądkowych i udoskonalone przez teoretyków mnogości, jest walizką, w której – w co wierzymy - ma się odnaleźć każdy fragment zarytmetyzowanej na gruncie mnogościowym matematyki. Ale ten fragment, zanim tam się znalazł, był żywym fragmentem naszego świata S. Myślmy za Weylem o c o n t i n u u m, obiekcie niemal natury fizycznej. Zanurzone w uniwersum U już się nie rozwija, co znaczy, że staje się jednym z alefów, podporząkowanym obcym sobie praw uniwersum U.

Z w i e ń c z e n i a

Odczuwamy niepokój, jeśli czegoś nie rozumiemy, a odczuwamy satysfakcję, kiedy niepowiązane ze sobą rzeczy potrafimy w myśli ze sobą połączyć. Jest to to, co kierowało Platonem, który dla połaczenia rzeczy w świecie oddzielnych, powoływał do świata S naszych myśli idee n a d r z ę d n e, które, miały wytłumaczyć pospolitość rzeczy. Dotyczy to nie tylko matematyki. Ten przymus myslowy kierował filozofów bizantyńskich – jak czytamy o tym u Focjusza – do rozumienia wielości poprzez dostrzeżenie w niej wspólnotowej jedności. Kierował też myślą Kartezjusza ku teorii wirów, usuwającej jego niepokój jaki stwarzała pusta przestrzeń. Ale nie pomińmy monad Leibniza i teorii eteru. Surowa myśl Arystotelesa i Newtona odrzucała tego rodzaju myślowe konstrukcje, wypowiadając dumnie swoje h y p o t h e s e s n o n f i n g o. Ucieczką ku wspólnemu rozumieniu grawitacji i kwantów jest teoria strun, która jest czystą konstrukcją myślową nie potwierdzoną doświadczeniem. Wspomnijmy też mitologię Wielkiego Wybuchu.

Coś podobnego napotykamy i w matematyce czystej, będącej konglomeratem nieopowiązanych ze sobą dyscyplin, walczących o miejsce w naszym świecie S. Czy teoria zbiorów okaże się tym, co połączy matematykę w całość i da jej lepsze rozumienie? Trudno spodziewać sie od sceptyka, jakim jest autor tego szkicu, entuzjazmu dla tej myśli. Rozumienie całości, jakie osiągamy rozbudowując pojęcia poza granice wszelkiego odczuwania zmysłowego, jest w istocie ułudą rozumienia. Dodajmy też, że znane nam dotąd zbyt rozbudowane teorie pryskały jak bańki mydlane, bądąc w istocie naszymi życzeniami myślowymi. Przypominają się nam przy tej okazji słowa Kroneckera z listu do Cantora o teoriach, które przemijają, a jedyne co z nich zostaje to w z o r y. Zastąpmy wszakże to archaiczne słowo terminem w z o r z e c, bardziej odpowiadającym wspólczenej matematyce.

Bo matematykę można rozumieć jako kolekcję wzorców, ale też jako gmach zwieńczający wszystko. Mamy więc Sierpińskiego, mistrza detalu, i Banacha, stojących na przeciwstawnych pozycjach. O miejsce w naszym świecie S zabiega zarówno Platon jak i Arystoteles, Kartezjusz i Newton, wiek osiemnasty i dziewiętnasty, przeciwstawne sobie w widzeniu matematyki, Wchodzimy bowiem do matematyki o d k r y w a j ą c jakiś jej frapujący fragment, ale przychodzi moment, kiedy pragniemy s t w o r z y ć ogólniejsze rozumienie tego fragmentu w większej całości. Te frapującve fragmenty są istotą matematyki, wiążą ją poprzez odczucia zmysłowe z prwdziwą rzeczywistością. W ich odkrywaniu zmysł matematyczny wychodzi poza rolę kuriera, w której widział go niechętny matematyce Filozof.

Znane z przeszłości "prawa najwyżśze", którymi obdarzali nas Platon, Kartezjusz i Hoene-Wroński, dają jedynie ułudę rozumienia. Nie dała się zamknąć analiza matematyczna w wielce obiecujący świat szeregów Taylora, ani geometria w swoje formalizmy osiemnastowieczne. Przypominając jednak te próby, myślimy w istocie o wielkich formalizmach naszych czasów. Na ich przykładzie widzimy, jak po okresie rozwoju i ukazywaniu matematyce nowych horyzontów, przychodzi w sojuszu z logicyzmem moment, kiedy zaczynają matematykę ograniczać. W stadium poczatkowym teorii zbiorów m o g l i ś m y się cieszyć z tego, że w tak wielu rzeczach daje się widzieć zbiory. Wspólczesne tendencje z m u s z a j ą nas do widzenia w ten sposób każdej rzeczy.

S p o j r z e n i e   w   p r z y s z ł o ś ć

Czytamy u przyrodnika Jose Delgado (1971), że istotom żywym konieczny jest dla ich zdrowia wewnętrznego nieprzerwany dopływ nowości i pobudzeń idących z z e w n ą t r z. Jesli ten dopływ się utrzyma, matematyka ma zapewniony rozwó.j. Bo nie są dla matematyki przeszkodą trudności dowodowe. Znaczenie twiredzenia matematycznego nie zależy od tego, czy znalazło się dla niego dowód, ale od tego, jakie ma miejsce w naszym świecie S. Lemat Zorna i lemat Urysohna nie przestałyby mieć znaczenia, jeśliby pozostały niedowodliwymi zasadami. Jeśli stwarzałyby trudności takie jak kiedyś aporie Zenona, matematyka miałaby sposoby, by sięgnąc po przebudowę pojęc. Dlatego, to nie twierdzenie Goedla mogłoby zahamowac rozwój matematyki.

Obawy mają swe przyczyny gdizie indziej. Może wydać się niestosownym wypowiadać je w czasie, w którym na naszych oczach padły największe stuletnie problemy, a natężenie potoku rezultatów matematycznych przewyższa wszystko to, co w przeszłości. Niepokój ma jednak swe uzasadnienie, bo natężenie potoku odkryć matematycznych zawdzięczamy uruchomieniu całego nagromadzonego dotąd zasobu środków arytmetycznych, które znajdują dla siebie pokarm wśród problemów już dawniej postawionych.

Wyczerpuje się nasze bezpośrednie odczuwanie matematyki obecnej w zjawiskach. Jak pisze S. P. Z e r v o s, nie uczymy się od naszych braci mniejszych, odcinając się od nieczłowieczych źródeł metafizyki. Ale i nauki przyrodnicze przestały być hojne w problemy. To dzięki nim matematyka rozszerzała się o nowe pola badań i rozwijała swe metody. Nie zaspakaja tej potrzeby zmatematyzowana krańcowo fizyka, której problemy są najczęściej w t ó r n y m i problemami matematycznymi. Wgląd w mikroświat nie wzbogaca nas o nowe idee matematyczne. Dla jego penetracji fizycy wolą eksploatować dawno już rozwinięte metody matematyczne.

Moglibyśmy wszakze uznać, że matematyka rozwinęła sie już w określonym kształcie i domaganie się stałego jej rozwoju ma postać obsesji. Dlaczego tak nam na matematyce zależy? Czy na twierdzeniach, które gdy zyskają dowód, zyskują status szacownych przedmiotów kolekcji? Nie, bo chodzi raczej na utrzymaniu napięcia myślowego, tego niepokoju, który towarzyszy pytaniu matematycznemu. . Nepokój matematyczny - jego natęzenie i jakość - jest tym, co daje nam poczucie żywotności myślowej. Obawiamy się też zejścia ku matematyczności gorszego gatunku.

Nawet przy całkowitym braku nowych zadań, nasza myśl, pozostawiona samej sobie, nie zatrzyma się. Poddana rytmowi pierwotnemu będzie rozwijać do wyczerpania nagromadzonych dotąd możliwości. Poznawanie świata, w którym matematyka dotąd uczestniczyła, zejdzie w niej na daleki plan. Możemy wyobrazić sobie stan graniczny, kiedy zostaniemy s a m n a s a m z e z b i o r e m i l i c z b ą. Już teraz odczuwamy możliwość tej krańcowości. Częścią tej matematyki będzie matematyka Cantora, ale zdominuje ją eksplozja kombinatoryczna związana z samą liczbą. Mysli będą nie tylko myślały się same, ale będą nas zmuszały do gonitwy za nimi bez obietnicy ich przeżywania. Potok myśli może byc wtedy nawet pełen prawd – przy tym absolutnych, bo koniecznych - nie znajdujących oparcia w doznanich zmysłowych, nie mających nic więcej do powiedzenia poza tym, że są prawdami

L i t e r a t u r a

Arystoteles, Fizyka

Saul Bellow, Herzog, Czytelnik Warszawa

Andriej Biełyj, Pietierburg

Richard Dedekind, Was sindund was sollen die Zahlen?, Braunschweig 1888

Jose Delgado, Mozg i soznanije (przekład), Mir Moskwa 1976

Jacek Dębiec, Mózg i matematyka, Biblos Tarnów 2002

Ernest Dimnet, Sztuka myślenia, Biblioteka Wiedzy 22, Trzaska, Evert i Michalski, Warszawa

G. H. Hardy, A Mathematician's Apology,

Andrzej Lelek, Zbiory, PZWS Warszawa 1966

Moses Mendelssohn, O oczywistości w naukach metafizycznych, Wrocław 1999

Jan Mikusiński, O twierdzeniu Zorna, Wiadomości Matematyczne 9 (1967), 225 – 232,

John von Neumann, The Mathematician, Works on the Mind, Vol. I, no 1 (University of Chicago Press, Chicago 1947, 180 – 196; The Mathematician
Part 2 – przedruk March 2006,

Henri Poincare', Nauka i hipoteza, Warszawa 1908

Jan Potocki, Rękopis znaleziony w Saragossie (Dzień trzydziesty siódmy), Warszawa 1976,

G, E. Sziłow, [Gieorgij Kaciweli], Matiematika i diejstwitielnost', 1975

Władysław Tatarkiewicz, Historia filozofii, I - III

Eckhart Tolle, Potęga teraźniejszości,

Hermann Weyl, Das Kontinuum, Leipzig 1918,

Alexander Israel Wittenberg, Vom Denken in Begriffen, Birkhauser Verlag, Basel – Stuttgart 1957,

S. P. Zervos, On the development of mathematical intuition, Tensor N. S. 26 (1972), 307 – 467.