

# WIELOMIANOGRAFIA Z POCHODNYMI RZĘDU UŁAMKOWEGO

W. Kotarski,  
Instytut Informatyki  
Letnia Szkoła IM – Brenna 2018

# PLAN

1. Wielomianografia (polynomiography)
2. Wielomianografy dla  $z^\alpha - 1$ , dla  $3 \leq \alpha \leq 4$
3. Pochodne ułamkowe (Riemann-Liouville, Caputo)
4. Metoda Newtona z pochodną ułamkową
5. Eksperymenty
  - Baseny przyciągania
  - Kolorowanie w zależności od liczby iteracji
6. Uwagi końcowe
7. Literatura

# 1. Wielomianografia

B. Kalantari – 2005 patent USA – za tworzenie estetycznych wzorów przez zastosowanie algorytmów znajdowania pierwiastków wielomianów zmiennej zespolonej i wyznaczania ich basenów przyciągania.

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0,$$

Sumerowie – 3000 pne.

Zasadnicze Tw. Algebry

Caley -1879

Julia -1919

Mandelbrot - 1982

- Iteracja Newtona:  $z_0$  dane

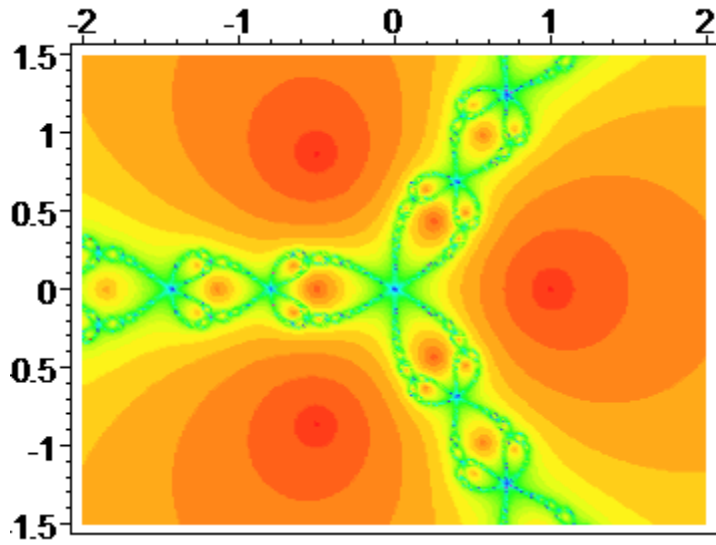
$$z_{k+1} = z_k - \frac{p(z_k)}{p'(z_k)}, \quad k = 0, 1, \dots$$

- Iteracja Halleya :  $z_0$  dane

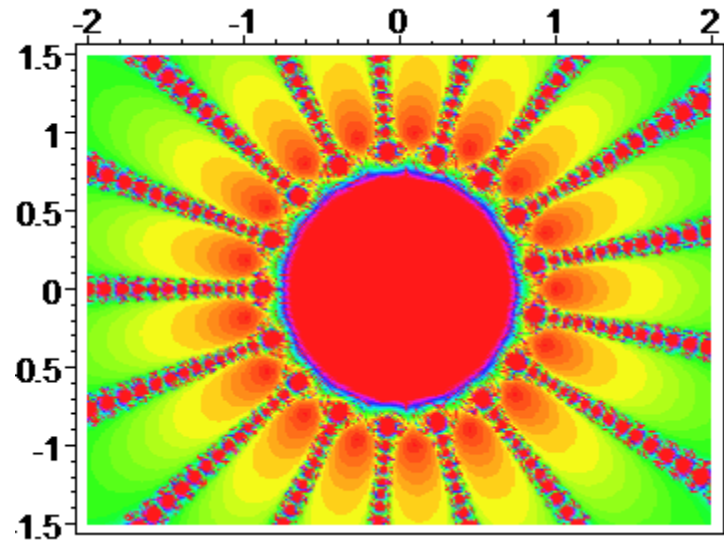
$$z_{k+1} = z_k - \frac{1}{a_k}, \quad \text{gdzie } a_k = \frac{p'(z_k)}{p(z_k)} - \frac{1}{2} \frac{p''(z_k)}{p'(z_k)}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Ciąg  $\{z_k; k = 0, 1, \dots\}$  może być zbieżny do pierwiastka wielomianu bądź nie. Zbieżność oznacza, że po pewnej liczbie iteracji znajduje się przybliżenie pierwiastka z zadaną dokładnością. Punkty startowe koloruje się ze względu na liczbę wykonanych iteracji.

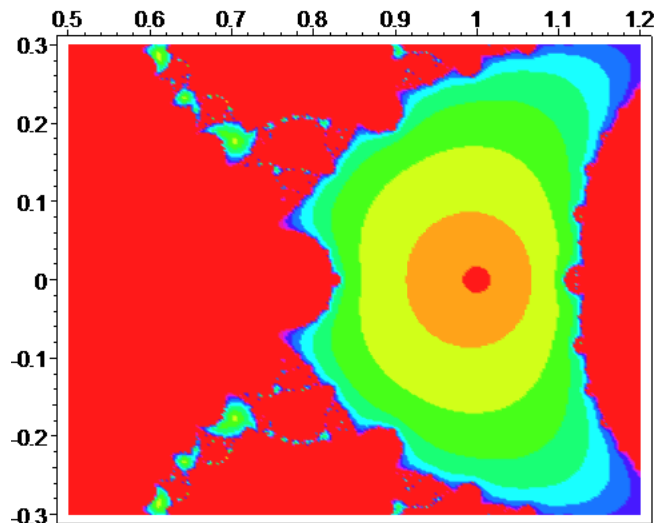
# Iteracja Newtona



$$z^3 - 1 = 0$$



$$z^{17} - 1 = 0$$



## Iteracja Halleya

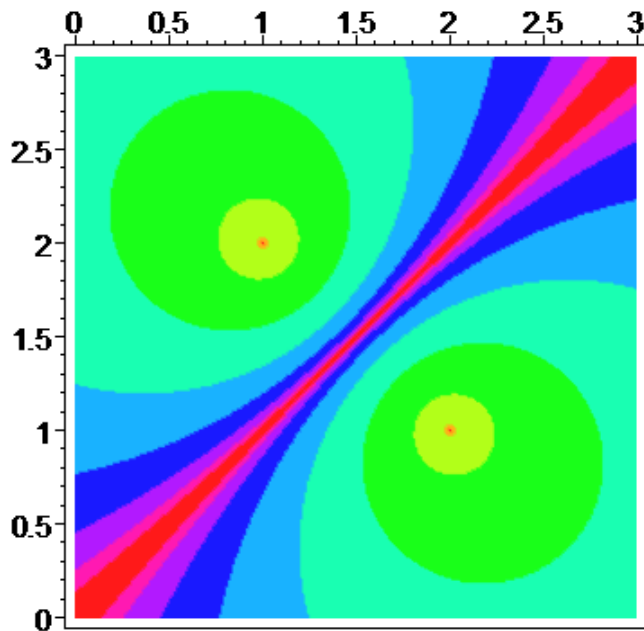
$$4z^4 + 2z^3 - 5z - 1 = 0$$

# Macierze permutacyjne

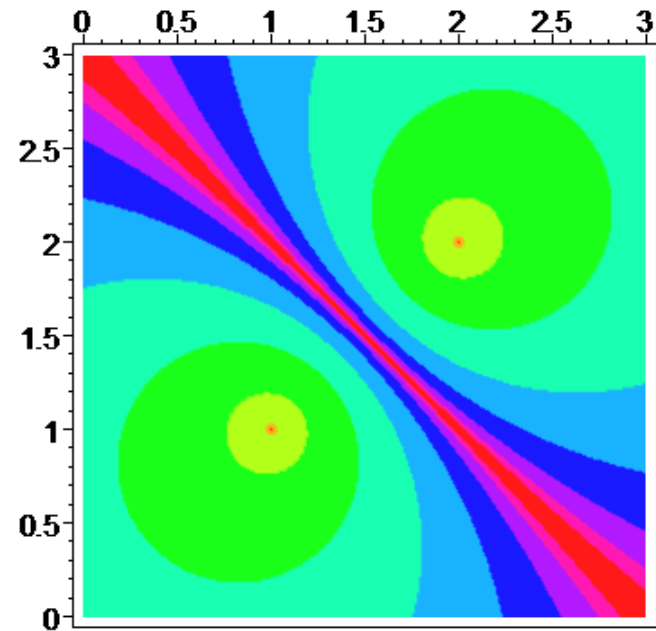
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

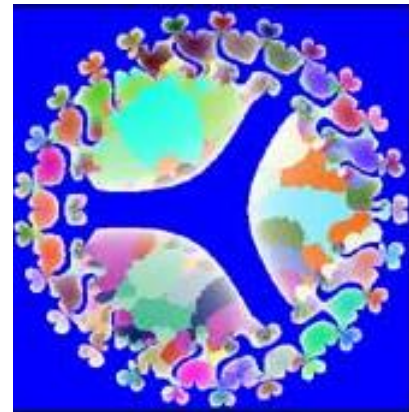
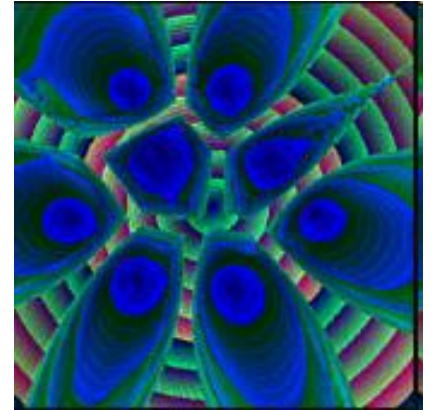
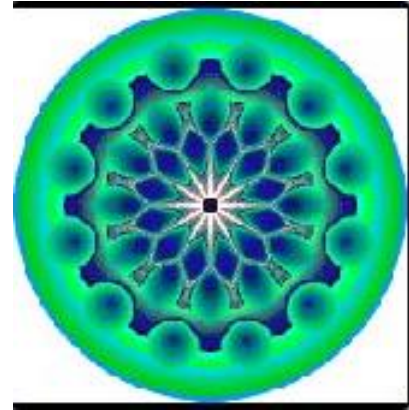
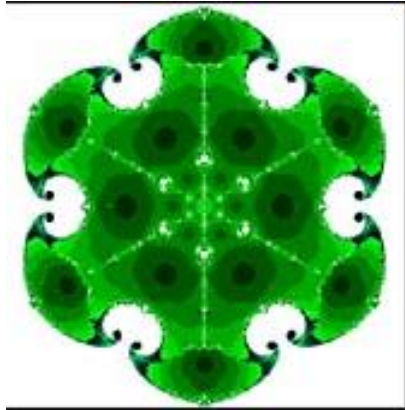
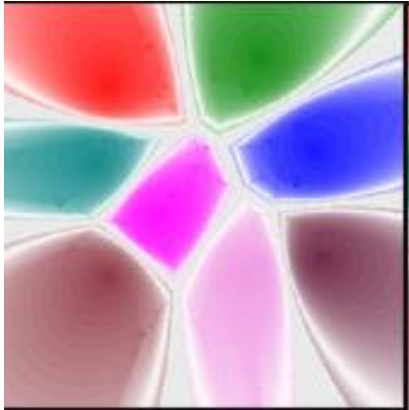
$$(z - (1 + i))(z - (2 + 2i))$$



$$(z - (1 + 2i))(z - (2 + i))$$



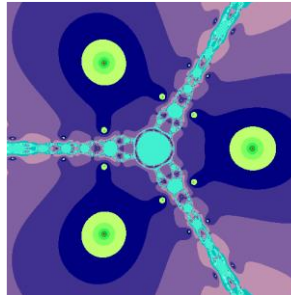
# Wielomianografy



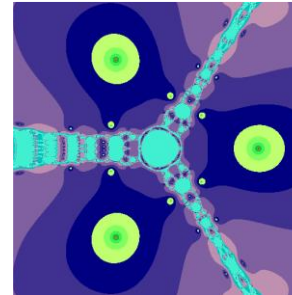
<http://www.polynomiography.com>

## 2. Wielomianografy dla $z^\alpha - 1$ , $3 \leq \alpha \leq 4$

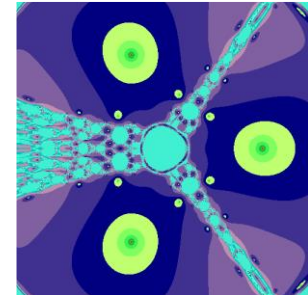
$\alpha = 3.0$



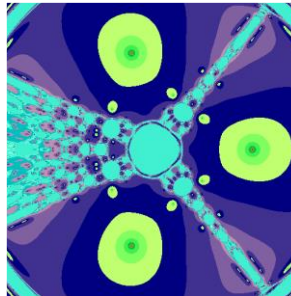
$\alpha = 3.1$



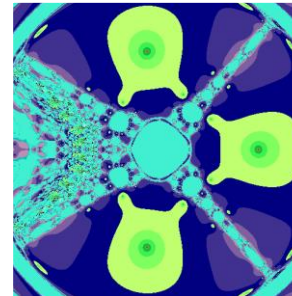
$\alpha = 3.3$



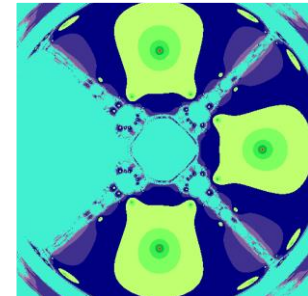
$\alpha = 3.5$



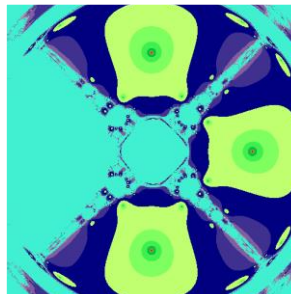
$\alpha = 3.7$



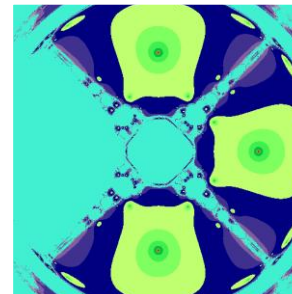
$\alpha = 3.9$



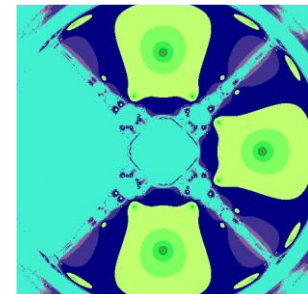
$\alpha = 3.95$



$\alpha = 3.97$



$\alpha = 3.99$

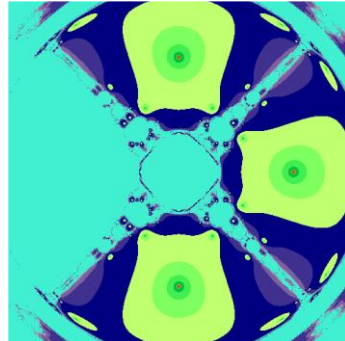


Zastosowano tu metodę  
hybrydową z [9].

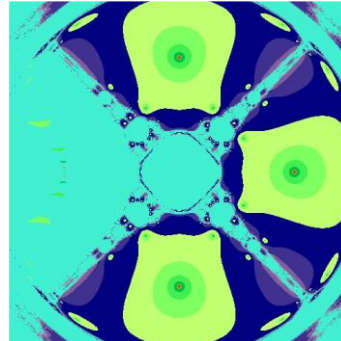


# Wartość krytyczna

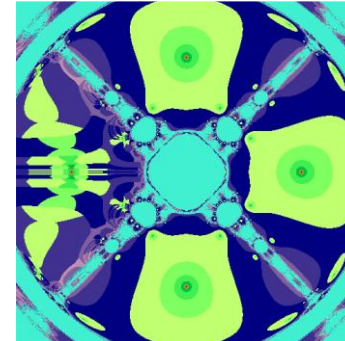
$\alpha = 3.995$



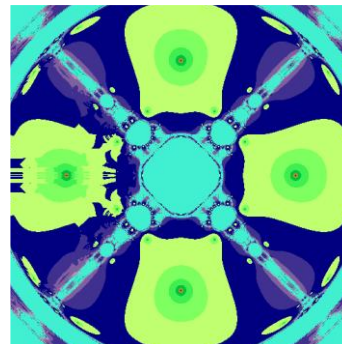
$\alpha = 3.997$



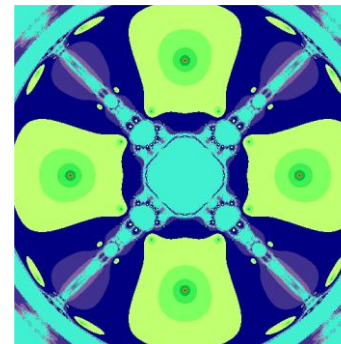
$\alpha = 3.998$



$\alpha = 3.999$



$\alpha = 4.0$



Pojawiają się bifurkacje!

# 3. Pochodne rzędu ułamkowego

1695 – w korespondencji L'Hospitala do Leibniza po raz pierwszy pojawia się pytanie o sens pochodnej ułamkowego rzędu,

Abel (1823 ) – podaje rozwiązanie problemu tautochrony,

Funkcja Gamma Eulera – uogólnienie  $n!$

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0.$$

- $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1,$
- $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z),$
- $\Gamma(n) = (n - 1)!, \quad n \in \mathbb{N},$
- $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$

## Pochodna Riemanna – Liouville ułamkowego rzędu $\alpha$

$$D_a^\alpha f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha-1} f(t) dt, & \operatorname{Re}(\alpha) < 0 \\ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt, & \operatorname{Re}(\alpha) > 0 \end{cases} \quad n = \lfloor \operatorname{Re}(\alpha) \rfloor + 1.$$

$$D_0^\alpha x^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-\alpha+1)} x^{m-\alpha},$$

$$D_0^{1/2} f_1(x) = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(3/2)} x^{1/2}, \quad D_0^{1/2} f_0(x) = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1/2)} x^{-1/2},$$

## Pochodna Caputo rzędu $\alpha$

$$D^\alpha f(t) := \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau, & n-1 < \alpha < n \in \mathbb{N}, \\ \frac{d^n}{dt^n} f(t), & \alpha = n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} D^\alpha t = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} t^{1-\alpha}, \\ D^\alpha t^2 = \frac{2}{\Gamma(3-\alpha)} t^{2-\alpha}, \\ D^\alpha t^3 = \frac{6}{\Gamma(4-\alpha)} t^{3-\alpha}, \\ D^\alpha t^4 = \frac{24}{\Gamma(5-\alpha)} t^{4-\alpha}. \end{cases} \quad D^{1/2} t = \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}$$

# 4. Metoda Newtona z pochodną ułamkową

W pracach [1], [2] rozważa się uogólnienie metody Newtona na przypadek pochodnych Riemanna –Liouville ułamkowego rzędu, z warunkiem początkowymi na prostej,  $f(x)$  jest wielomianem. Okazuje się, że metoda ta znajduje nie tylko pierwiastki rzeczywiste ale również zespolone.

$$x_{n+1} := {}^{\alpha}\Phi(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{D_0^{\alpha} f(x_n)}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Dalej rozważamy formalną zależność:

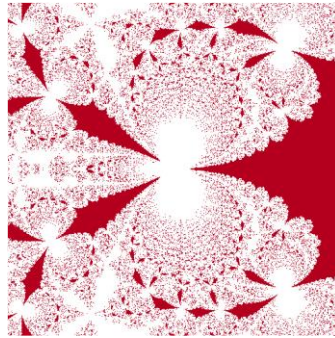
$$z_{k+1} = z_k - \frac{p(z_k)}{D^\alpha p(z_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$
$$z_0 \in \mathcal{C}$$

Na podstawie [11] pochodna ułamkowa jest dobrze określona.

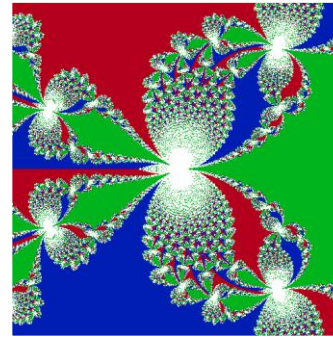
# 5. Eksperymenty

Baseny przyciągania  
dla  $z^3 - 1 = 0$ ,  
różne  $\alpha$

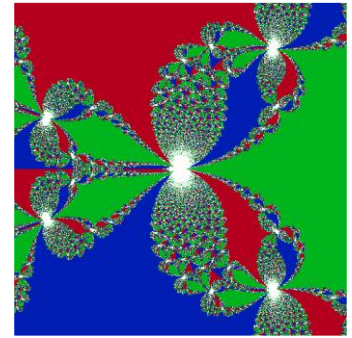
$\alpha = 0.6$



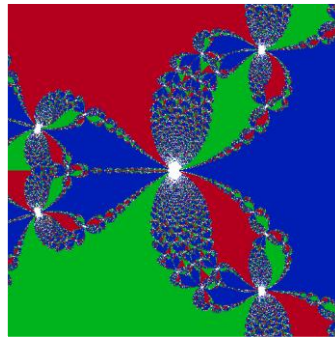
$\alpha = 0.7$



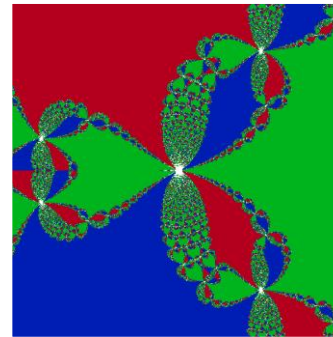
$\alpha = 0.75$



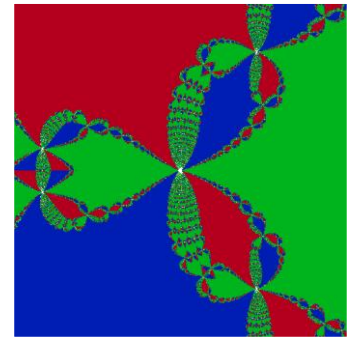
$\alpha = 0.8$



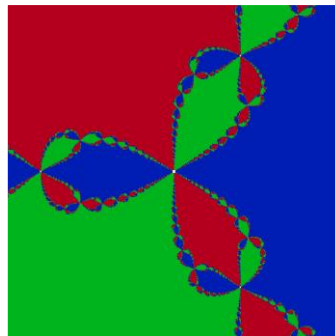
$\alpha = 0.85$



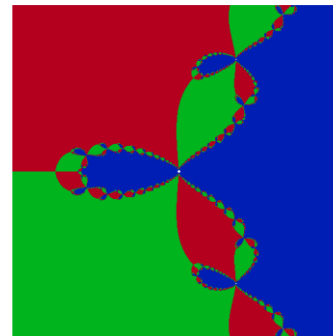
$\alpha = 0.9$



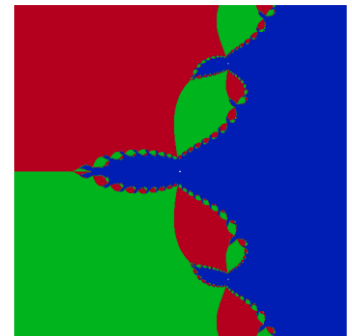
$\alpha = 1.0$



$\alpha = 1.1$



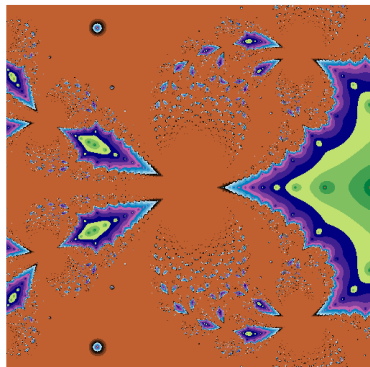
$\alpha = 1.2$



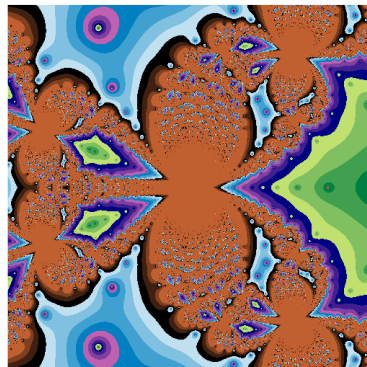


# Kolorowanie w zależności od liczby iteracji dla $z^3 - 1 = 0$ , różne $\alpha$

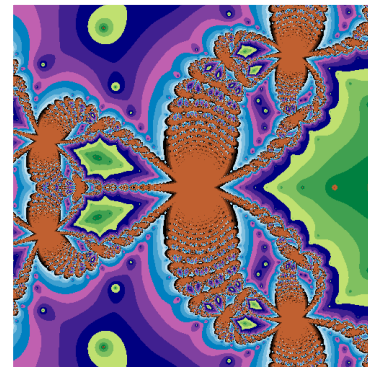
$\alpha = 0.7$



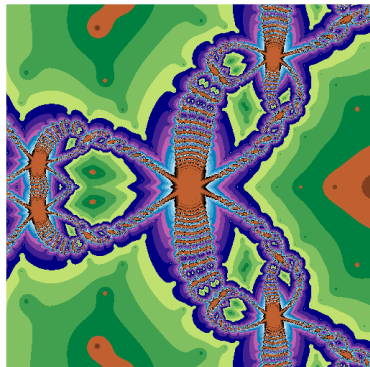
$\alpha = 0.75$



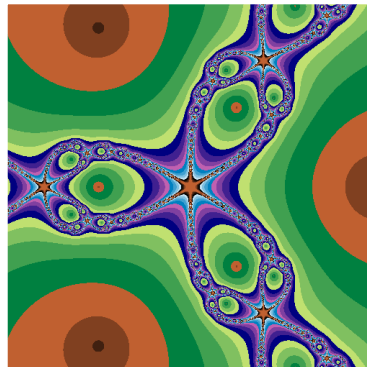
$\alpha = 0.8$



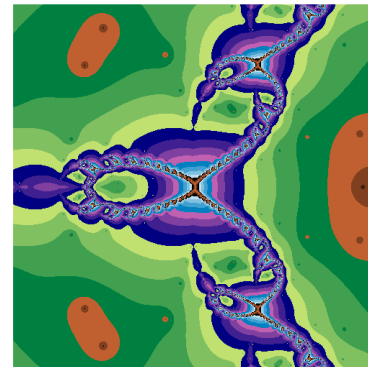
$\alpha = 0.9$



$\alpha = 1.0$



$\alpha = 1.1$



# 6. Uwagi końcowe

- Wielomianografy ilustrują dynamikę procesu znajdowania miejsc zerowych wielomianów zespolonych,
- Gdy  $\alpha \rightarrow 3$  otrzymuje się wielomianografy dla  $z^3 - 1 = 0$ .
- W dalszych eksperymentach możliwe jest zastosowanie różnych rodzajów iteracji, podobnie jak w [4]..

# 7. Literatura

1. Brambila F., Torres A., Fractional Newton-Raphson method. *arXiv preprint arXiv:1710.07634*, 2017.
2. Brambila-Paz, F., Torres-Hernandez A, i.in., Newton-Raphson Method Accelerated with Aitken's Method, 2018arXiv180408445B
3. Bologna M.: Short Introduction to Fractional Calculus, Lecture Notes, Universidad de Tarapaca, Arica, Chile (2005), pp. 41-54
4. Gdawiec K., Kotarski W., Lisowska A., Polynomiography Based on the Nonstandard Newton-Like Root Finding Methods, *Abstract and Applied Analysis*, Vol. 2015, Article ID 797594, 19 pages
5. Gdawiec K., Kotarski W., Lisowska A., Polynomiography for Square Systems of Equations with Mann and Ishikawa Iterations, *WSCG 2016 Short Papers Proceedings*, pp. 1-5, (2016)
6. Gdawiec K., Kotarski W.: Polynomiography for the polynomial infinity norm via Kalantari's formula and nonstandard iterations, *Applied Mathematics and Computation*, Volume 307, 15 August 2017, pages 17-30, <https://doi.org/10.1016/j.amc.2017.02.038>
7. Istheva M.K: Properties and Applications of the Fractional Caputo Operator, Master Thesis, Department of Mathematics, Universität at Karlsruhe (TH), 2005
8. Kalantari B.: Polynomial Root-Finding and Polynomiography, World Scientific, Singapore (2009)
9. Kotarski W., Lisowska A., Polynomiography via the Hybrids of Gradient Descent and Newton Methods with Mann and Ishikawa Iterations. In: Rocha Á., Adeli H., Reis L.P., Costanzo S. (eds) *Trends and Advances in Information Systems and Technologies. WorldCIST'18 2018. Advances in Intelligent Systems and Computing*, vol. 746. Springer, Cham, [https://doi.org/10.1007/978-3-319-77712-2\\_43](https://doi.org/10.1007/978-3-319-77712-2_43)
10. Lahr, N.B. & Reiter, C.A. Visualizing Newton's method on fractional exponents, *The Visual Computer* (1994) 11: 82. <https://doi.org/10.1007/BF01889978>
11. Munkhammar J., Riemann-Liouville Fractional Derivatives and the Taylor-Riemann Series, U.U.D.M. Project Report 2004:7, Department of Mathematics, Uppsala University
12. Tavassoli M.H., Tavassoli A., Ostad Rahimi M.R.: The geometric and physical interpretation of fractional order derivatives of polynomial functions, *Differential Geometry - Dynamical Systems*, Vol.15, 2013, pp. 93-104

Dziękuję za uwagę!