Rozmyta Kreska Sheffera

Piotr Helbin

Instytut Matematyki, Uniwersytet Śląski, Katowice
Letnia Szkoła Instytutu Matematyki 2018

25 IX 2018

Kreska Sheffera (dysjunkcja)

$p \uparrow q \longleftrightarrow \neg(p \wedge q)$

Kreska Sheffera (dysjunkcja)

$p \uparrow q \longleftrightarrow \neg(p \wedge q)$

p	q	$p \uparrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Kreska Sheffera (dysjunkcja)

$p \uparrow q \longleftrightarrow \neg(p \wedge q)$

p	q	$p \uparrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$\neg p \longleftrightarrow p \uparrow p$

Kreska Sheffera (dysjunkcja)

$p \uparrow q \longleftrightarrow \neg(p \wedge q)$

p	q	$p \uparrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$\neg p \longleftrightarrow p \uparrow p$$

$$p \wedge q \longleftrightarrow (p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q)$$

Kreska Sheffera (dysjunkcja)

$$p \uparrow q \longleftrightarrow \neg(p \wedge q)$$

p	q	$p \uparrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$\neg p \longleftrightarrow p \uparrow p$$

$$p \wedge q \longleftrightarrow (p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q)$$

$$p \vee q \longleftrightarrow (p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)$$

Kreska Sheffera (dysjunkcja)

$p \uparrow q \longleftrightarrow \neg(p \wedge q)$

p	q	$p \uparrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$\neg p \longleftrightarrow p \uparrow p$$

$$p \wedge q \longleftrightarrow (p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q)$$

$$p \vee q \longleftrightarrow (p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)$$

$$p \longrightarrow q \longleftrightarrow p \uparrow (q \uparrow q) \longleftrightarrow p \uparrow (p \uparrow q)$$

Baczyński, M., Jayaram, B.:
Fuzzy Implications. Volume 231 of Studies in Fuzziness and Soft Computing.
Springer, Berlin, Heidelberg, (2008).

Fodor, J., Roubens, M.:
Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support.
Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1994).

Helbin P., Niemyska W., Berruezo P., Massanet S., Ruiz-Aguilera D., Baczyński M.
On Fuzzy Sheffer Stroke Operation.
In: Rutkowski L., Scherer R., Korytkowski M., Pedrycz W., Tadeusiewicz R., Zurada J. (eds) Artificial Intelligence and Soft Computing. (2018)

Klement, E., Mesiar, R., Pap, E.:
Triangular Norms.
Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (2000).

Niemyska, W., Baczyński, M., Wąsowicz, S.:
Sheffer Stroke Fuzzy Implications.
Proceedings of: EUSFLAT–2017, (2018).

Definicja 1

Funkcję $C\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ nazywamy ***koniunkcją rozmytą***, gdy dla każdych $x, y, z \in [0,1]$ spełnione są następujące warunki:

(C1) $C(x,y) \le C(z,y)$ dla $x \le z$, czyli $C(\cdot, y)$ jest niemalejąca,

(C2) $C(x,y) \le C(x,z)$ dla $y \le z$, czyli $C(x, \cdot)$ jest niemalejąca,

(C3) $C(0,1) = 0 = C(1,0)$ oraz $C(1,1) = 1$.

Definicja 1

Funkcję $C\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ nazywamy ***koniunkcją rozmytą***, gdy dla każdych $x, y, z \in [0,1]$ spełnione są następujące warunki:

(C1) $C(x,y) \leq C(z,y)$ dla $x \leq z$, czyli $C(\cdot, y)$ jest niemalejąca,

(C2) $C(x,y) \leq C(x,z)$ dla $y \leq z$, czyli $C(x, \cdot)$ jest niemalejąca,

(C3) $C(0,1) = 0 = C(1,0)$ oraz $C(1,1) = 1$.

Definicja 2

Funkcję $T\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ nazywamy **normą trójkątną** (w skrócie t-normą), gdy dla każdych $x, y, z, y_1, y_2 \in [0,1]$ spełnione są następujące warunki:

(T1) $T(x,y) = T(y,x)$, **(przemienność)**

(T2) $T(x, T(y,z)) = T(T(x,y), z)$, **(łączność)**

(T3) $y_1 \leq y_2 \Rightarrow T(x, y_1) \leq T(x, y_2)$, **(monotoniczność)**

(T4) $T(x,1) = x$. **(element neutralny 1)**

Definicja 3

Funkcję $S\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ nazywamy **konormą trójkątną** (w skrócie t-konormą), gdy dla każdych $x, y, z, y_1, y_2 \in [0,1]$ spełnione są następujące warunki:

(S1) $S(x,y) = S(y,x)$, **(przemienność)**

(S2) $S(x, S(y,z)) = S(S(x,y), z)$, **(łączność)**

(S3) $y_1 \le y_2 \Rightarrow S(x, y_1) \le S(x, y_2)$, **(monotoniczność)**

(S4) $S(x, 0) = x$. **(element neutralny 0)**

Definicja 3

Funkcję $S\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ nazywamy **konormą trójkątną** (w skrócie t-konormą), gdy dla każdych $x, y, z, y_1, y_2 \in [0,1]$ spełnione są następujące warunki:

(S1) $S(x,y) = S(y,x)$, **(przemienność)**

(S2) $S(x, S(y,z)) = S(S(x,y),z)$, **(łączność)**

(S3) $y_1 \leq y_2 \Rightarrow S(x,y_1) \leq S(x,y_2)$, **(monotoniczność)**

(S4) $S(x,0) = x$. **(element neutralny 0)**

Definicja 4

Funkcję $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ nazywamy **implikacją rozmytą** jeśli spełnia poniższe warunki:

(I1) I jest nierosnąca ze względu na pierwszą zmienną,

(I2) I jest niemalejąca ze względu na drugą zmienną,

(I3) $I(0,0) = I(1,1) = 1$ oraz $I(1,0) = 0$.

Definicja 5

Nierosnącą funkcję $N\colon [0,1] \to [0,1]$ nazywamy **negacją rozmytą**, jeśli $N(0) = 1$, $N(1) = 0$. Ponadto, negację rozmytą N nazywamy negacją

1. **ścisłą**, gdy jest ściśle malejąca i ciągła;
2. **silną**, gdy jest inwolucją, czyli $N(N(x)) = x$, dla wszystkich $x \in [0,1]$.

Definicja 6

Funkcję $D : [0,1]^2 \to [0,1]$ nazywamy ***Rozmytą Kreską Sheffera*** gdy dla każdych $x, y, z \in [0,1]$ spełnione są następujące warunki:

(D1) $D(x,z) \geq D(y,z)$ dla $x \leq y$, czyli $D(\cdot, z)$ jest nierosnąca,

(D2) $D(x,y) \geq D(x,z)$ dla $y \leq z$, czyli $D(x, \cdot)$ jest nierosnąca,

(D3) $D(0,1) = D(1,0) = 1$ oraz $D(1,1) = 0$.

Definicja 6

Funkcję $D : [0,1]^2 \to [0,1]$ nazywamy ***Rozmytą Kreską Sheffera*** gdy dla każdych $x, y, z \in [0,1]$ spełnione są następujące warunki:

(D1) $D(x,z) \geq D(y,z)$ dla $x \leq y$, czyli $D(\cdot, z)$ jest nierosnąca,

(D2) $D(x,y) \geq D(x,z)$ dla $y \leq z$, czyli $D(x, \cdot)$ jest nierosnąca,

(D3) $D(0,1) = D(1,0) = 1$ oraz $D(1,1) = 0$.

Definicja 7

Niech D będzie Rozmytą Kreską Sheffera.

i) Funkcję N_D^l zdefiniowaną następująco $N_D^l(x) = D(x,1)$ dla wszystkich $x \in [0,1]$ nazywamy ***lewą negacją*** D.

ii) Funkcję N_D^r zdefiniowaną następująco $N_D^r(x) = D(1,x)$ dla wszystkich $x \in [0,1]$ nazywamy ***prawą negacją*** D.

iii) Funkcję N_D^d zdefiniowaną następująco $N_D^d(x) = D(x,x)$ dla wszystkich $x \in [0,1]$ nazywamy ***diagonalną negacją*** D.

Przykłady Rozmytych Kresek Sheffera

1. $D_{\mathsf{M}}(x,y) = 1 - T_{\mathsf{M}}(x,y) = 1 - \min\{x,y\} = \max\{1-x, 1-y\}$;
2. $D_{\mathsf{LK}}(x,y) = 1 - T_{\mathsf{LK}}(x,y) = 1 - \max\{x+y-1, 0\} = \min\{2-x-y, 1\}$;
3. $D_{\mathsf{P}}(x,y) = 1 - T_{\mathsf{P}}(x,y) = 1 - xy$;
4. $D_{\mathsf{P}}^{\mathsf{k}}(x,y) = 1 - C_{\mathsf{P}}^{\mathsf{k}}(x,y) = 1 - (xy)^k$.

Przykłady Rozmytych Kresek Sheffera

1. $D_{\mathbf{M}}(x, y) = 1 - T_{\mathbf{M}}(x, y) = 1 - \min\{x, y\} = \max\{1 - x, 1 - y\};$
2. $D_{\mathbf{LK}}(x, y) = 1 - T_{\mathbf{LK}}(x, y) = 1 - \max\{x + y - 1, 0\} = \min\{2 - x - y, 1\};$
3. $D_{\mathbf{P}}(x, y) = 1 - T_{\mathbf{P}}(x, y) = 1 - xy;$
4. $D_{\mathbf{P}}^{\mathbf{k}}(x, y) = 1 - C_{\mathbf{P}}^{\mathbf{k}}(x, y) = 1 - (xy)^k.$

Przykłady Rozmytych Kresek Sheffera

1. $D_{\mathbf{M}}(x,y) = 1 - T_{\mathbf{M}}(x,y) = 1 - \min\{x,y\} = \max\{1-x, 1-y\}$;
2. $D_{\mathbf{LK}}(x,y) = 1 - T_{\mathbf{LK}}(x,y) = 1 - \max\{x+y-1, 0\} = \min\{2-x-y, 1\}$;
3. $D_{\mathbf{P}}(x,y) = 1 - T_{\mathbf{P}}(x,y) = 1 - xy$;
4. $D_{\mathbf{P}}^{\mathbf{k}}(x,y) = 1 - C_{\mathbf{P}}^{\mathbf{k}}(x,y) = 1 - (xy)^k$.

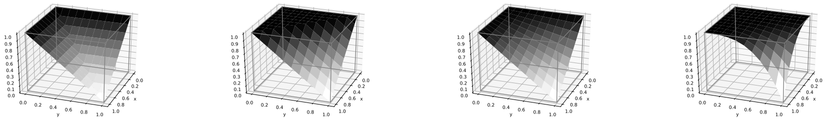
Przykłady Rozmytych Kresek Sheffera

1. $D_{\mathbf{M}}(x,y) = 1 - T_{\mathbf{M}}(x,y) = 1 - \min\{x,y\} = \max\{1-x, 1-y\};$
2. $D_{\mathbf{LK}}(x,y) = 1 - T_{\mathbf{LK}}(x,y) = 1 - \max\{x+y-1, 0\} = \min\{2-x-y, 1\};$
3. $D_{\mathbf{P}}(x,y) = 1 - T_{\mathbf{P}}(x,y) = 1 - xy;$
4. $D_{\mathbf{P}}^{\mathbf{k}}(x,y) = 1 - C_{\mathbf{P}}^{\mathbf{k}}(x,y) = 1 - (xy)^k.$

Przykłady Rozmytych Kresek Sheffera

1. $D_{\mathbf{M}}(x, y) = 1 - T_{\mathbf{M}}(x, y) = 1 - \min\{x, y\} = \max\{1 - x, 1 - y\};$
2. $D_{\mathbf{LK}}(x, y) = 1 - T_{\mathbf{LK}}(x, y) = 1 - \max\{x + y - 1, 0\} = \min\{2 - x - y, 1\};$
3. $D_{\mathbf{P}}(x, y) = 1 - T_{\mathbf{P}}(x, y) = 1 - xy;$
4. $D^{\mathbf{k}}_{\mathbf{P}}(x, y) = 1 - C^{\mathbf{k}}_{\mathbf{P}}(x, y) = 1 - (xy)^k.$

Wykresy Przykładowych Rozmytych Kresek Sheffera



Rysunek: Wykresy $D_{\mathbf{M}}, D_{\mathbf{LK}}, D_{\mathbf{P}}, D^{\mathbf{3}}_{\mathbf{P}}$.

Twierdzenie 8

Niech $D : [0,1]^2 \to [0,1]$ *będzie binarnym operatorem. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

i) *D jest Rozmytą Kreską Sheffera.*

ii) *Istnieje taka rozmyta koniunkcja* C *oraz ścisła negacja rozmyta* N*, że* $D(x,y) = N(C(x,y))$ *dla wszystkich* $x, y \in [0,1]$.

Ponadto, w tym przypadku $C(x,y) = N^{-1}(D(x,y))$.

Ważne równania

(D4) $D(D(x,x),D(x,x)) = x$, dla wszystkich $x \in [0,1]$;

(D5) $D(1,x) = D(x,x)$, dla wszystkich $x \in [0,1]$ $(N_D^r = N_D^d)$;

(D6) $D(x,y) = D(y,x)$, dla wszystkich $x,y \in [0,1]$;

(D7) $D(x,D(D(y,z),D(y,z))) = D(D(D(x,y),D(x,y)),z)$, dla wszystkich $x,y,z \in [0,1]$.

Warto zauważyć, że warunek (**D4**) oznacza, że N_D^d silną negacją rozmytą.

Ważne równania

(D4) $D(D(x,x),D(x,x)) = x$, dla wszystkich $x \in [0,1]$;

(D5) $D(1,x) = D(x,x)$, dla wszystkich $x \in [0,1]$ ($N_D^r = N_D^d$);

(D6) $D(x,y) = D(y,x)$, dla wszystkich $x,y \in [0,1]$;

(D7) $D(x, D(D(y,z), D(y,z))) = D(D(D(x,y), D(x,y)), z)$, dla wszystkich $x,y,z \in [0,1]$.

Warto zauważyć, że warunek (**D4**) oznacza, że N_D^d silną negacją rozmytą.

Twierdzenie 9

*Niech T będzie t-normą a N niech będzie silną negacja. Operator $D := N \circ T$ spełnia wszystkie warunki (**D1**)-(**D7**) wtedy i tylko wtedy $T = T_M = \min$.*

Twierdzenie 10

*Niech D będzie Rozmytą Kreską Sheffera spełniającą warunek (**D4**). Wtedy funkcja $T\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ zdefiniowana następująco*

$$T(x,y) = D(D(x,y), D(x,y)), \qquad x, y \in [0,1] \tag{1}$$

*jest t-normą wtedy i tylko wtedy, gdy D spełnia dodatkowo (**D5**), (**D6**) oraz (**D7**).*

Twierdzenie 10

Niech D będzie Rozmytą Kreską Sheffera spełniającą warunek (**D4**)*. Wtedy funkcja $T\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ zdefiniowana następująco*

$$T(x,y) = D(D(x,y), D(x,y)), \qquad x, y \in [0,1] \tag{1}$$

jest t-normą wtedy i tylko wtedy, gdy D spełnia dodatkowo (**D5**), (**D6**) *oraz* (**D7**).

Twierdzenie 11

Niech D będzie Rozmytą Kreską Sheffera spełniającą warunek (**D4**)*. Wtedy funkcja $S\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ zdefiniowana następująco*

$$S(x,y) = D(D(x,x), D(y,y)), \qquad x, y \in [0,1] \tag{2}$$

jest t-konormą wtedy i tylko wtedy, gdy D spełnia dodatkowo (**D5**), (**D6**) *oraz* (**D7**).

Twierdzenie 12

Niech D będzie Rozmytą Kreską Sheffera. Wtedy funkcja $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ zdefiniowana następująco

$$I(x,y) = D(x, D(y,y)), \qquad x, y \in [0,1], \tag{3}$$

jest implikacją rozmytą.

Twierdzenie 12

Niech D będzie Rozmytą Kreską Sheffera. Wtedy funkcja $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ zdefiniowana następująco

$$I(x,y) = D(x, D(y,y)), \qquad x, y \in [0,1], \tag{3}$$

jest implikacją rozmytą.

Twierdzenie 13

Niech D będzie Rozmytą Kreską Sheffera. Wtedy funkcja $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ zdefiniowana następująco

$$I(x,y) = D(x, D(x,y)), \qquad x, y \in [0,1], \tag{4}$$

*spełnia (**I2**) oraz (**I3**).*

Twierdzenie 14

Dla funkcji $T\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ *następujące warunki są równoważne:*

1. T *jest t-normą ciągłą archimedesową* ($T(x,x) < x$, *dla wszystkich* $x \in (0,1)$).
2. T *ma ciągły addytywny generator, tzn. istnieje taka funkcja ciągła ściśle malejąca* $f\colon [0,1] \to [0,\infty]$ *spełniająca* $f(1) = 0$, *która jest jednoznaczna z dokładnością do mnożenia przez stałą dodatnią, że*

$$T(x,y) = f^{-1}(\min(f(x) + f(y), f(0))), \qquad x, y \in [0,1]. \tag{5}$$

Definicja 15

Niech $f\colon [0,1] \to [0,\infty]$ będzie taką funkcją nierosnącą, że $f(0) = \infty$ i $f(1) = 0$ oraz niech $g\colon [0,\infty] \to [0,1]$ będzie taką funkcją niemalejącą, że $g(0) = 0$ i $g(\infty) = 1$. Wtedy funkcję $D_{f,g}\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ zdefiniowaną następująco

$$D_{f,g}(x,y) = g(f(x) + f(y)), \qquad x, y \in [0,1],$$

nazywamy $(f,g)-$ Kreską Sheffera. W tym przypadku parę (f,g) nazywamy parą addytywnych generatorów $D_{f,g}$.

Definicja 15

Niech $f\colon [0,1] \to [0,\infty]$ będzie taką funkcją nierosnącą, że $f(0) = \infty$ i $f(1) = 0$ oraz niech $g\colon [0,\infty] \to [0,1]$ będzie taką funkcją niemalejącą, że $g(0) = 0$ i $g(\infty) = 1$. Wtedy funkcję $D_{f,g}\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ zdefiniowaną następująco

$$D_{f,g}(x,y) = g(f(x) + f(y)), \qquad x, y \in [0,1],$$

nazywamy $(f,g)-$ Kreską Sheffera. W tym przypadku parę (f,g) nazywamy parą addytywnych generatorów $D_{f,g}$.

Przykład 16

Niech $f(x) = \begin{cases} \infty, & x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$ *oraz* $g(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$. *Wówczas*

$D_{f,g}(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) = (1,1) \\ 1, & pp. \end{cases}$ *jest maksymalną Rozmytą Kreską Sheffera.*

Twierdzenie 17

Niech (f, g) będzie parą addytywnych generatorów. Wówczas $D_{f,g}$ jest Rozmytą Kreską Sheffera.

Twierdzenie 17

Niech (f, g) będzie parą addytywnych generatorów. Wówczas $D_{f,g}$ jest Rozmytą Kreską Sheffera.

Twierdzenie 18

Niech (f, g) będzie taką parą addytywnych generatorów $D_{f,g}$, że g jest funkcją ściśle rosnącą i ciągłą oraz N jest negacją rozmytą ścisłą. Wtedy następujące zdania są równoważne:

i) $N^{-1} \circ D_{f,g}$ *jest t-normą.*

ii) $f = g^{-1} \circ N$.
W tym przypadku

$$D_{g,N}(x, y) = g(g^{-1}(N(x)) + g^{-1}(N(y))), \qquad x, y \in [0, 1].$$

Twierdzenie 19

Niech $g\colon [0,\infty] \to [0,1]$ *będzie funkcją ściśle rosnącą i ciągłą oraz niech* N *będzie negacją rozmytą ścisłą. Wtedy następujące zdania są równoważne:*

i) $D_{g,N}$ *spełnia (D4).*

ii) *Istnieje taki automorfizm* $\varphi\colon [0,1]^2 \to [0,1]$, *że* $N(x) = g\left(\frac{g^{-1}\left((N_C)_\varphi(x)\right)}{2}\right)$, *gdzie* $(N_C)_\varphi(x) = \varphi^{-1}(1-\varphi(x))$, *dla dowolnych* $x \in [0,1]$.

Twierdzenie 19

Niech $g\colon [0,\infty] \to [0,1]$ *będzie funkcją ściśle rosnącą i ciągłą oraz niech* N *będzie negacją rozmytą ścisłą. Wtedy następujące zdania są równoważne:*

i) $D_{g,N}$ *spełnia (D4).*

ii) *Istnieje taki automorfizm* $\varphi\colon [0,1]^2 \to [0,1]$*, że* $N(x) = g\left(\frac{g^{-1}\left((N_C)_\varphi(x)\right)}{2}\right)$*, gdzie* $(N_C)_\varphi(x) = \varphi^{-1}(1-\varphi(x))$*, dla dowolnych* $x \in [0,1]$*.*

Twierdzenie 20

Niech $g\colon [0,\infty] \to [0,1]$ *będzie funkcją ściśle rosnącą i ciągłą oraz niech* N *będzie negacją rozmytą ścisłą. Wtedy* $D_{g,N}$ *nigdy nie spełnia warunku (D5).*

Dziękuje za uwagę!