Wybrane schematy i reguły wnioskowania w logice rozmytej

Katarzyna Miś

Uniwersytet Śląski

Letnia Szkoła Instytutu Matematyki,
Brenna, 24-28 września 2018

Schematy wnioskowania w logice klasycznej

- Sylogizm hipotetyczny

$$\frac{(A \to B) \ \wedge \ (B \to C)}{\therefore \ A \to C}$$

Schematy wnioskowania w logice klasycznej

- Sylogizm hipotetyczny

$$\frac{(A \to B) \ \wedge \ (B \to C)}{\therefore \ A \to C}$$

- Modus Ponendo Ponens

$$\frac{(A \to B) \ \wedge \ A}{\therefore \ B}$$

Schematy wnioskowania w logice klasycznej

- Sylogizm hipotetyczny

$$\frac{(A \to B) \ \wedge \ (B \to C)}{\therefore \ A \to C}$$

- Modus Ponendo Ponens

$$\frac{(A \to B) \ \wedge \ A}{\therefore \ B}$$

- Modus Tollendo Tollens

$$\frac{(A \to B) \ \wedge \ \neg B}{\therefore \ \neg A}$$

Schematy wnioskowania w logice klasycznej

- Sylogizm hipotetyczny

$$\frac{(A \to B) \ \wedge \ (B \to C)}{\therefore \ A \to C}$$

- Modus Ponendo Ponens

$$\frac{(A \to B) \ \wedge \ A}{\therefore \ B}$$

- Modus Tollendo Tollens

$$\frac{(A \to B) \ \wedge \ \neg B}{\therefore \ \neg A}$$

- Redukcja do absurdu

$$\frac{(\neg A \to B) \ \wedge \ \neg B}{\therefore \ A}$$

Algebra Boole'a

Niech $\mathcal{L} =< L, \cap, \cup, 0, 1, \neg >$ będzie algebrą Boole'a (z porządkiem $x \leq y \Leftrightarrow x \cup y = y,\ x, y \in L$).

Implikację $x \to y$ definujemy jako

$$x \to y = \neg x \cup y \tag{1}$$
$$x \to y = \max\{t \in L\colon x \cap t \leq y\}, \tag{2}$$

Wzory (1) oraz (2) są w algebrze Boole'a równoważne.

$$\frac{(\neg A \to B) \ \wedge \ \neg B}{\therefore \ A}$$

Prawo redukcji do absurdu

W $\mathcal{L}$, korzystając z rozdzielności, mamy

$$\begin{aligned}(\neg x \to y) \cap \neg y &= (\neg\neg x \cup y) \cap \neg y = (x \cup y) \cap \neg y \\ &= (x \cap \neg y) \cup (y \cap \neg y) = x \cap \neg y \cup 0 \\ &= x \cap \neg y \leq x\end{aligned}$$

$$\frac{(\neg A \to B)\ \wedge\ \neg B}{\therefore\ A}$$

Prawo redukcji do absurdu

W $\mathcal{L}$, korzystając z rozdzielności, mamy

$$\begin{aligned}(\neg x \to y) \cap \neg y &= (\neg\neg x \cup y) \cap \neg y = (x \cup y) \cap \neg y \\ &= (x \cap \neg y) \cup (y \cap \neg y) = x \cap \neg y \cup 0 \\ &= x \cap \neg y \leq x\end{aligned}$$

$$(\neg x \to y) \cap \neg y \leq x$$

Schematy wnioskowania w logice rozmytej

- $\cap \rightsquigarrow$ t-norma
- $\neg \rightsquigarrow$ negacja rozmyta
- $\rightarrow \rightsquigarrow$ implikacja rozmyta

Definicja 1

Funkcję $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ nazywamy implikacją rozmytą, jeśli dla $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in [0,1]$ spełnione są następujące warunki.

(I1) $x_1 \leq x_2 \Rightarrow I(x_1, y) \geq I(x_2, y)$,

(I2) $y_1 \leq y_2 \Rightarrow I(x, y_1) \leq I(x, y_2)$,

(I3) $I(1,1) = 1, \quad I(0,0) = 1, \quad I(1,0) = 0.$

Definicja 1

Funkcję $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ nazywamy implikacją rozmytą, jeśli dla $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in [0,1]$ spełnione są następujące warunki.

(I1) $x_1 \leq x_2 \Rightarrow I(x_1, y) \geq I(x_2, y)$,

(I2) $y_1 \leq y_2 \Rightarrow I(x, y_1) \leq I(x, y_2)$,

(I3) $I(1,1) = 1, \quad I(0,0) = 1, \quad I(1,0) = 0.$

Definicja 2

Mówimy, że implikacja rozmyta I spełnia **własność lewostronnego elementu neutralnego**, jeżeli

$$I(1, y) = y, \qquad y \in [0,1]. \tag{NP}$$

Przykład 1

- Implikacja Łukasiewicza

$$I_{\mathbf{LK}}(x,y) = \min\{1, 1-x+y\}, \qquad x,y \in [0,1]$$

- Implikacja Gödla

$$I_{\mathbf{GD}}(x,y) = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ y, & x > y \end{cases}, \qquad x,y \in [0,1]$$

- Implikacja Reichenbacha

$$I_{\mathbf{RC}}(x,y) = 1-x+xy, \qquad x,y \in [0,1]$$

- Implikacja Fodora

$$I_{\mathbf{FD}}(x,y) = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ \max\{1-x, y\}, & x > y \end{cases}, \qquad x,y \in [0,1].$$

Definicja 3

Funkcję malejącą $N\colon [0,1] \to [0,1]$ nazywamy **negacją rozmytą**, jeśli $N(0) = 1$, $N(1) = 0$. Ponadto, wyróżniamy m.in.

(i) **ścisłą**, jeśli jest ściśle malejąca i ciągła,

(ii) **silną**, jeśli jest inwolucją, tzn. $N(N(x)) = x$ dla $x \in [0,1]$.

Definicja 4

Niech I będzie implikacją rozmytą. Funkcję $N_I\colon [0,1] \to [0,1]$ zdefiniową następująco

$$N_I(x) = I(x,0), \qquad x \in [0,1] \tag{3}$$

nazywamy negacją naturalną I lub **negacją indukowaną** przez I.

Definicja 5

Funkcję $T\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ nazywamy normą trójkątną (t-normą), jeżeli, dla $x, y, z \in [0,1]$, spełnione są następujące warunki.

$$T(x,y) = T(y,x), \tag{T1}$$

$$T(x, T(y,z)) = T(T(x,y),z), \tag{T2}$$

$$T(x,y) \leq T(x,z) \text{ dla } y \leq z, \text{ tzn. } T(x,\cdot) \text{ jest rosnąca,} \tag{T3}$$

$$T(x,1) = x. \tag{T4}$$

Przykład 2

- t-norma drastyczna

$$T_{\mathbf{D}}(x,y) = \begin{cases} 0, & x,y \in [0,1) \\ \min\{x,y\}, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

- t-norma nilpotentne minimum

$$T_{\mathbf{nM}}(x,y) = \begin{cases} 0, & x+y \leq 1 \\ \min\{x,y\}, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

- t-norma Łukasiewicza

$$T_{\mathbf{LK}}(x,y) = \max\{0, x+y-1\}, \qquad x.y \in [0,1].$$

Definicja 6

Funkcję $S\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ nazywamy konormą trójkątną (t-konormą), jeżeli, dla $x, y, z \in [0,1]$, spełnione są następujące warunki.

$$S(x,y) = S(y,x), \tag{S1}$$

$$S(x, S(y,z)) = S(S(x,y), z), \tag{S2}$$

$$S(x,y) \le S(x,z) \text{ dla } y \le z, \text{ tzn. } S(x,\cdot) \text{ jest rosnąca}, \tag{S3}$$

$$S(x,0) = x. \tag{S4}$$

Klement E. P., Mesiar R., Pap E.: *Triangular norms.* Kluwer, Dordrecht (2000)

Sylogizm hipotetyczny

$$\frac{(A \to B) \ \land \ (B \to C)}{\therefore \ A \to C}$$

$\downarrow$

$$T(I(x,z), I(z,y)) \leq I(x,y), \qquad x,y,z \in [0,1]$$

Sylogizm hipotetyczny

$$\frac{(A \to B) \ \wedge \ (B \to C)}{\therefore \ A \to C}$$

↓

$$T(I(x,z), I(z,y)) \leq I(x,y), \qquad x,y,z \in [0,1]$$

Redukcja do absurdu

$$\frac{(\neg A \to B) \ \wedge \ \neg B}{\therefore \ A}$$

↓

$$T(I(N(x),y), N(y)) \leq x, \qquad x,y \in [0,1]$$

Modus Ponendo Ponens

$$\frac{(A \to B) \ \wedge \ A}{\therefore \ B}$$

$$\downarrow$$

$$T(I(x,y),x) \leq y, \qquad x,y \in [0,1]$$

Modus Ponendo Ponens

$$\frac{(A \to B) \ \wedge \ A}{\therefore \ B}$$

$$\downarrow$$

$$T(I(x, y), x) \leq y, \qquad x, y \in [0, 1]$$

Modus Tollendo Tollens

$$\frac{(A \to B) \ \wedge \ \neg B}{\therefore \ \neg A}$$

$$\downarrow$$

$$T(I(x, y), N(y)) \leq N(x), \qquad x, y \in [0, 1]$$

Wnioskowanie przybliżone

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Jeżeli } x \text{ jest } A, \text{ to } y \text{ jest } B\\ x \text{ jest } A'\end{array}}{y \text{ jest } B'}$$

Wnioskowanie przybliżone

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Jeżeli } x \text{ jest } A, \text{ to } y \text{ jest } B \\ x \text{ jest } A'\end{array}}{y \text{ jest } B'}$$

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Jeżeli } x \text{ jest } A_1, \text{ to } y \text{ jest } B_1 \\ \text{Jeżeli } x \text{ jest } A_2, \text{ to } y \text{ jest } B_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \text{Jeżeli } x \text{ jest } A_n, \text{ to } y \text{ jest } B_n \\ x \text{ jest } A'\end{array}}{y \text{ jest } B'}$$

Złożenia relacji rozmytych

$$B' = A' @ R$$

Złożenia relacji rozmytych

$$B' = A' @ R$$

$@ = \circ$

Złożeniowa reguła wnioskowania (*The Compositional Rule of Inference* Zadeh 1973)

$$B' = A' \circ R \tag{CRI}$$

Złożenia relacji rozmytych

$$B' = A' @ R$$

$@ = \circ$

Złożeniowa reguła wnioskowania (*The Compositional Rule of Inference* Zadeh 1973)

$$B' = A' \circ R \qquad \text{(CRI)}$$

$$B'(y) = \sup_{x \in X} T(A'(x), R(x, y)), \quad x \in X, y \in Y,$$

T - t-norma

$@ = \lhd$

Iloczyn Bandlera-Kohouta

$$B' = A' \lhd R \tag{BK}$$

$@ = \lhd$

Iloczyn Bandlera-Kohouta

$$B' = A' \lhd R \tag{BK}$$

$$B'(y) = \inf_{x \in X} J(A'(x), R(x, y)), \quad x \in X, y \in Y,$$

J - implikacja rozmyta

Relacja R

$$\check{R}(x,y) = \bigvee_{i=1}^{n} (A_i(x) * B_i(y)), \qquad x \in X, y \in Y$$

$*$ - t-norma

Relacja R

$$\check{R}(x,y) = \bigvee_{i=1}^{n} (A_i(x) * B_i(y)), \qquad x \in X, y \in Y$$

$*$ - t-norma

$$\hat{R}(x,y) = \bigwedge_{i=1}^{n} (A_i(x) \rightarrow B_i(y)), \qquad x \in X, y \in Y$$

$\rightarrow$ - implikacja rozmyta

(CRI)

$$y = \sup_{x \in [0,1]} T(x, I(x,y)), \quad y \in [0,1] \tag{GMP}$$

(CRI)

$$y = \sup_{x \in [0,1]} T(x, I(x,y)), \quad y \in [0,1] \tag{GMP}$$

$$N(x) = \sup_{y \in [0,1]} T(N(y), I(x,y)), \quad x \in [0,1] \tag{GMT}$$

(CRI)

$$y = \sup_{x \in [0,1]} T(x, I(x,y)), \quad y \in [0,1] \qquad \text{(GMP)}$$

$$N(x) = \sup_{y \in [0,1]} T(N(y), I(x,y)), \quad x \in [0,1] \qquad \text{(GMT)}$$

$$x = \sup_{y \in [0,1]} T(N(y), I(N(x),y)), \quad x \in [0,1] \qquad \text{(GRA)}$$

(CRI)

$$y = \sup_{x \in [0,1]} T(x, I(x, y)), \quad y \in [0, 1] \tag{GMP}$$

$$N(x) = \sup_{y \in [0,1]} T(N(y), I(x, y)), \quad x \in [0, 1] \tag{GMT}$$

$$x = \sup_{y \in [0,1]} T(N(y), I(N(x), y)), \quad x \in [0, 1] \tag{GRA}$$

$$I(x, y) = \sup_{z \in [0,1]} T(I(x, z), I(z, y)), \quad x, y \in [0, 1] \tag{GHS}$$

(GHS)

$$I(x,y) = \sup_{z\in[0,1]} T(I(x,z), I(z,y)), \qquad x,y \in [0,1]$$

(GHS)

$$I(x,y) = \sup_{z \in [0,1]} T(I(x,z), I(z,y)), \qquad x, y \in [0,1]$$

$x = 1$

(GHS)

$$I(x,y) = \sup_{z\in[0,1]} T(I(x,z), I(z,y)), \qquad x, y \in [0,1]$$

$x = 1$

$$y = \sup_{z\in[0,1]} T(z, I(z,y))$$

(GHS)

$$I(x,y) = \sup_{z\in[0,1]} T(I(x,z), I(z,y)), \qquad x,y \in [0,1]$$

$x = 1$

$$y = \sup_{z\in[0,1]} T(z, I(z,y))$$

$y = 0$

(GHS)

$$I(x,y) = \sup_{z\in[0,1]} T(I(x,z), I(z,y)), \qquad x,y \in [0,1]$$

$$x = 1$$

$$y = \sup_{z\in[0,1]} T(z, I(z,y))$$

$$y = 0$$

$$N_I(x) = \sup_{z\in[0,1]} T(I(x,z), N_I(z))$$

(GHS)

$$I(x, y) = \sup_{z \in [0,1]} T(I(x, z), I(z, y)), \qquad x, y \in [0, 1]$$

$x = 1$

$$y = \sup_{z \in [0,1]} T(z, I(z, y))$$

$y = 0$

$$N_I(x) = \sup_{z \in [0,1]} T(I(x, z), N_I(z))$$

$y = 0, x \to N(x), N = N_I$

(GHS)

$$I(x,y) = \sup_{z\in[0,1]} T(I(x,z), I(z,y)), \qquad x,y \in [0,1]$$

$$x = 1$$

$$y = \sup_{z\in[0,1]} T(z, I(z,y))$$

$$y = 0$$

$$N_I(x) = \sup_{z\in[0,1]} T(I(x,z), N_I(z))$$

$$y = 0, x \rightarrow N(x), N = N_I$$

$$x = \sup_{z\in[0,1]} T(I(N(x),z), N(z))$$

Definicja 7

Funkcję $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ nazywamy R-implikacją, jeśli istnieje taka t-norma T, że

$$I(x,y) = \sup\{t \in [0,1] : T(x,t) \leq y\}, \qquad x,y \in [0,1].$$

Implikację I indukowaną z t-normy T oznaczamy I_T.

Definicja 8

Funkcję $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ nazywamy (S,N)-implikacją, jeżeli istnieje taka t-konorma S oraz taka negacja N, że

$$I(x,y) = S(N(x),y), \qquad x,y \in [0,1].$$

Jeżeli N jest negacją silną, to I nazywamy silną implikacją lub S-implikacją.

Twierdzenie 1

Niech T będzie t-normą. T jest lewostronnie ciągła $\Leftrightarrow$ (T, I_T) *spełnia* (GHS).

Twierdzenie 1

Niech T będzie t-normą. T jest lewostronnie ciągła $\Leftrightarrow$ (T, I_T) *spełnia* (GHS).

Stwierdzenie 1

Niech T będzie t-normą lewostronnie ciągłą, a T^* dowolną t-normą. Wtedy para (T^*, I_T) *spełnia* (GHS) $\Leftrightarrow$ $T^* \leq T$.

$$\inf_{z \in [0,1]} I_1(C(x,z), C(z,y)) = I_2(x,y) \qquad \text{(BK-GHS)}$$

$$\inf_{z\in[0,1]} I_1(C(x,z),C(z,y)) = I_2(x,y) \qquad \text{(BK-GHS)}$$

Twierdzenie 2

Niech $F, G\colon [0,1]^2 \to [0,1]$*,* G *niech będzie semikopułą oraz niech* (F,G) *spełnia nierówność*

$$F(x,y) \leq F(G(x,z),G(z,y)).$$

Wówczas (F,G,F) *spełnia* (BK-GHS)*.*

Wniosek 1

Jeżeli T jest t-normą, to (I_T, T, I_T) spełnia (BK-GHS).

Wniosek 2

Niech T będzie t-normą, a I_2 implikacją rozmytą. Wówczas (I_2, T, I_T) spełnia (BK-GHS) $\Leftrightarrow I_T \leq I_2$.

$$V(x,y) = \inf_{z \in [0,1]} I_1(I_2(x,z), C(z,y)), \qquad x, y \in [0,1]$$

$$V(x,y) = \inf_{z \in [0,1]} I_1(I_2(x,z), C(z,y)), \qquad x, y \in [0,1]$$

- rozwiązanie innych równań powstałych z (BK)

$$V(x,y) = \inf_{z \in [0,1]} I_1(I_2(x,z), C(z,y)), \qquad x, y \in [0,1]$$

- rozwiązanie innych równań powstałych z (BK)
- przypadek wielu reguł

Dziękuję za uwagę!